Matematika s statistiko
Števila in funkcije

Funkcije

(1) Za naslednje predpise določi maksimalna definicijska območja:

(a) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$,

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)$,

(c) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$,

(d) $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$.

Rešitev: (a) Kvadratni koren je definiran samo za nenegativna števila, zato je

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 16 - x^2 \geq 0\}.$$

Rešitev te neenačbe je

$$\begin{aligned} 16 - x^2 &\geq 0, \\ x^2 - 16 &\leq 0, \\ (x-4)(x+4) &\leq 0. \end{aligned}$$

Rešitev te kvadratne neenačbe je interval $[-4, 4]$, od koder sledi

$$D_f = [-4, 4].$$

(b) Naravni logaritem je definiran za pozitivna števila, zato je

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{5x - x^2}{4} > 0 \right\}.$$

Rešitev te neenačbe je

$$\begin{aligned} \frac{5x - x^2}{4} &> 0, \\ 5x - x^2 &> 0, \\ x(5 - x) &> 0. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$D_f = (0, 5).$$

(c) Racionalna funkcija je definirana povsod, kjer je imenovalec neničeln. V našem primeru to pomeni, da je

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4 \neq 0 \right\}.$$

Enačba $x^2 - 4 = 0$ ima rešitvi

$$x_{1,2} = \pm 2,$$

zato je

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

(d) Funkcija arc sin je definirana na intervalu $[-1, 1]$. To pomeni, da je

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \in [-1, 1]\}.$$

Definicijsko območje funkcije f je torej določeno z neenačbama

$$x^2 - 1 \geq -1,$$
$$x^2 - 1 \leq 1.$$

Prva neenačba je zmeraj izpolnjena, drugo pa poenostavimo v

$$x^2 - 1 \leq 1,$$
$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \leq 0.$$

Od tod dobimo

$$D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

□

(2) Nariši grafe naslednjih funkcij in zapiši njihova definicijska območja ter zaloge vrednosti:

(a) $f(x) = x^3 - x$,

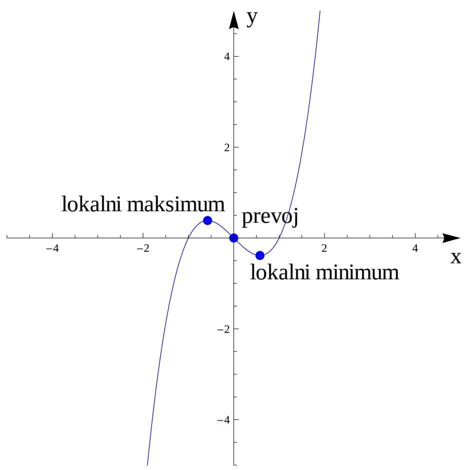
(b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$,

(c) $f(x) = \ln(x+1) - 1$.

Rešitev: (a) Polinom $f(x) = x^3 - x$ je definiran za vsako realno število, zato je $D_f = \mathbb{R}$. Ker je lihe stopnje, je surjektiven, kar pomeni, da je $Z_f = \mathbb{R}$. Iz razcepa

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

lahko preberemo, da ima f tri realne ničle, in sicer $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ in $x_3 = 1$. Pri $x \to \infty$ bo vrednost funkcije f rasla čez vse meje, pri $x \to -\infty$ pa bo šla proti minus neskončno.

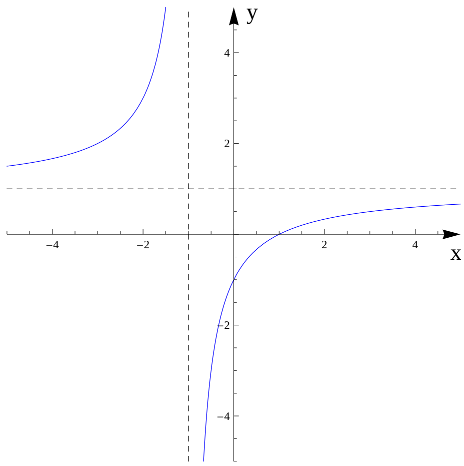


Najprej funkcija nekaj časa narašča, nato pada, nazadnje pa spet narašča. Ima en lokalni minimum in en lokalni maksimum. Levo od izhodišča je funkcija konkavna, desno od izhodišča pa konveksna. V točki $x = 0$ ima prevoj. Ker je vsota samih lihih potenc, je f liha funkcija.

(b) Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ima pol pri $x = -1$ in ničlo $x = 1$. Od tod takoj sledi, da je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Iz enakosti

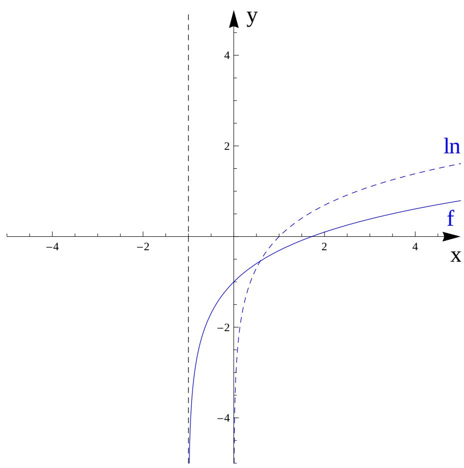
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

sledi, da je premica $y = 1$ vodoravna asimptota funkcije f pri $x \to \pm\infty$ ter da je zaloga vrednosti funkcije f enaka $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Funkcija f ves čas narašča. Levo od pola je konveksna, desno od pola pa konkavna. Funkcija f je bijekcija iz množice $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ na množico $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) Logaritemska funkcija $f(x) = \ln(x+1) - 1$ je definirana na $D_f = (-1, \infty)$, pri $x = -1$ pa ima logaritemski pol. Ničlo ima pri $x = e - 1$. Njen graf dobimo tako, da graf naravnega logaritma prestavimo za eno enoto v levo in eno enoto navzdol.



Funkcija f povsod narašča, a čedalje počasneje. Povsod je konkavna. Lokalnih ekstremov in prevojev nima. Pri $x \to \infty$ raste čez vse meje. Je injektivna in surjektivna, zato definira bijekcijo $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$. $\square$

(3) Za dana para funkcij f in g izračunaj predpisa in definicijski območji funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ in $g(x) = x - 2$,

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ in $g(x) = \sqrt{x}$.

Rešitev: (a) <u>Predpisa</u>:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-2) = \frac{x-2}{(x-2)+3} = \frac{x-2}{x+1},$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x+3}\right) = \frac{x}{x+3} - 2 = \frac{x-2x-6}{x+3} = -\frac{x+6}{x+3}.$$

<u>Definicijski območji</u>:

Pri določanju definicijskega območja kompozituma dveh funkcij moramo biti pazljivi. Ni namreč dovolj, da pogledamo, kje je definiran predpis kompozituma. Če hočemo, da je kompozitum $f \circ g$ definiran v točki x, mora biti v x definirana funkcija g, hkrati pa mora biti funkcija f definirana v točki $g(x)$:

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g \text{ je definirana v } x \text{ in } f \text{ je definirana v } g(x)\}.$$

V našem primeru je:

· funkcija g definirana povsod,
· funkcija f definirana na $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Za funkcijo $f \circ g$ je torej

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq -3\},$$

kar pomeni, da mora biti $x - 2 \neq -3$. Od tod sledi

$$D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Za funkcijo $g \circ f$ pa imamo

$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ je definirana v } x\},$$

kar pomeni, da je

$$D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

(b) <u>Predpisa</u>:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{x+1},$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

<u>Definicijski območji</u>:

V tem primeru je:

· funkcija f definirana povsod,
· funkcija g definirana na $[0, \infty)$.

Za funkcijo $f \circ g$ je torej

$$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g \text{ je definirana v } x\},$$

oziroma

$$D_{f\circ g} = [0, \infty).$$

V tem primeru vidimo, da se definicijsko območje funkcije $f \circ g$ razlikuje od maksimalnega definicijskega območja predpisa za funkcijo $f \circ g$.

Za funkcijo $g \circ f$ pa je

$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\},$$

Ker je $x^2 + 1 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je

$$D_{g\circ f} = \mathbb{R}.$$

□

(4) Dana je funkcija $f(x) = e^{x-1} + 2$.

(a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti dane funkcije ter pokaži, da je injektivna.

(b) Izračunaj definicijsko območje in predpis za inverzno funkcijo.

(c) Skiciraj grafa funkcije in inverzne funkcije.

Dokaz. (a) Eksponentna funkcija je definirana povsod, v njeni zalogi vrednosti pa so pozitivna realna števila. V našem primeru imamo opravka z eksponentno funkcijo, ki je premaknjena za dve enoti navzgor in eno enoto v desno. Zato je

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R}, \\ Z_f &= (2, \infty). \end{aligned}$$

Pokažimo sedaj, da je funkcija f injektivna. Funkcija je po definiciji injektivna, če dve različni vrednosti preslika v dve različni vrednosti. Grafično to pomeni, da vsaka vodoravnica seka graf funkcije v največ eni točki. Če hočemo injektivnost dane funkcije formalno dokazati, moramo pokazati, da iz enakosti $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$.

V našem primeru imamo:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y), \\ e^{x-1} + 2 &= e^{y-1} + 2, \\ e^{x-1} &= e^{y-1}, / \ln \\ x - 1 &= y - 1, \\ x &= y. \end{aligned}$$

(b) Inverzna funkcija bijektivne funkcije $f : A \to B$ je funkcija $f^{-1} : B \to A$, za katero je

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \mathrm{id}_A, \\ f \circ f^{-1} &= \mathrm{id}_B. \end{aligned}$$

Če je funkcija f samo injektivna, potem za definicijsko območje inverzne funkcije ne moremo vzeti celega B, ampak samo zalogo vrednosti Z_f funkcije f.

V našem primeru je torej

$$D_{f^{-1}} = (2, \infty).$$

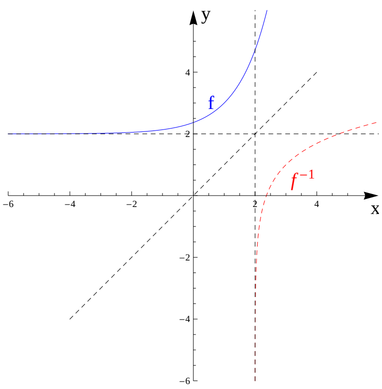
Predpis za inverzno funkcijo izračunamo, tako da v izrazu $y = f(x)$ zamenjamo vlogi x in y in nato poskusimo izraziti y.

$$\begin{aligned} x &= e^{y-1} + 2, \\ x - 2 &= e^{y-1}, \\ \ln(x-2) &= y - 1, \\ y &= \ln(x-2) + 1. \end{aligned}$$

Tako dobimo predpis za inverzno funkcijo

$$f^{-1}(x) = \ln(x-2) + 1.$$

(c) Poglejmo si še grafa funkcije in inverzne funkcije.



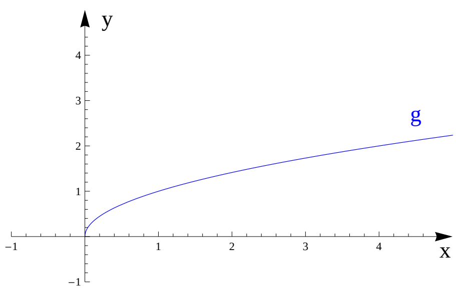
□

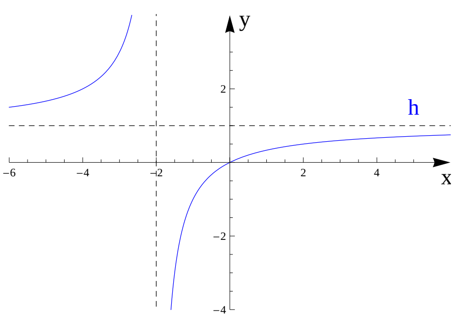
(5) Skiciraj grafa naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$,

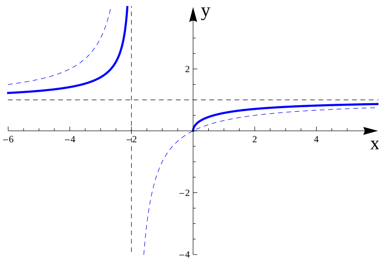
(b) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$.

Rešitev: (a) Funkcijo $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$ lahko zapišemo kot kompozitum $f = g \circ h$ korenske funkcije $g(x) = \sqrt{x}$ in racionalne funkcije $h(x) = \frac{x}{x+2}$.

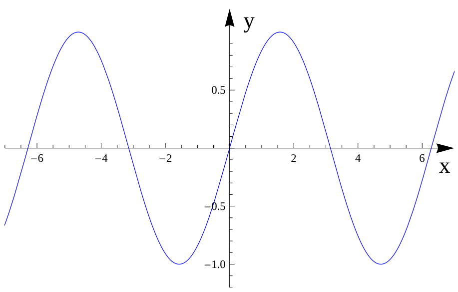


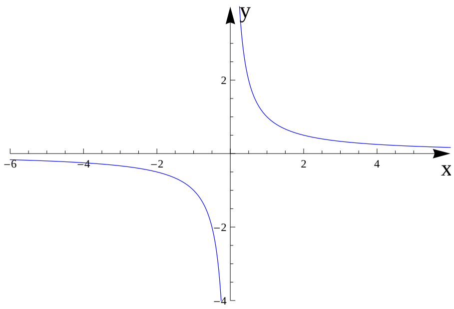


Če hočemo, da bo funkcija f definirana, mora biti definirana funkcija h, ki mora biti hkrati nenegativna. Funkcija h je racionalna funkcija, ki ima pol pri $x = -2$, ničlo pri $x = 0$ ter vodoravno asimptoto $y = 1$. Z grafa funkcije h lahko preberemo, da je torej $D_f = (-\infty, -2) \cup [0, \infty)$. Če pogledamo graf funkcije g, vidimo, da funkcija g vrednosti manjše od 1 poveča, vrednosti večje od 1 pa zmanjša. S pomočjo tega dejstva lahko skiciramo graf funkcije f. Na spodnji skici je s črtkano črto narisan graf funkcije h, s polno črto pa graf funkcije f.

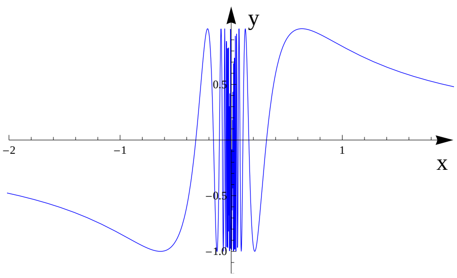


(b) Funkcijo $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ lahko zapišemo kot kompozitum sinusne in racionalne funkcije.

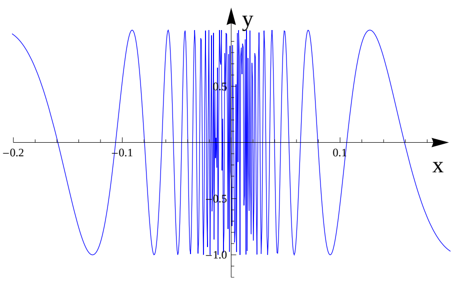




Definirana je povsod, razen pri $x = 0$. Racionalna funkcija $x \mapsto 1/x$ ima vodoravno asimptoto $y = 0$. Če gre torej $x \to \pm\infty$, bo šel izraz $1/x \to 0$. Tangenta na graf sinusne funkcije v točki $x = 0$ ima enačbo $y = x$, kar pomeni, da sta za majhne vrednosti x funkciji $x \mapsto \sin x$ in $x \mapsto x$ približno enaki. Od tod sledi, da se funkcija f pri zelo velikih vrednostih obnaša podobno kot racionalna funkcija $x \mapsto 1/x$. Po drugi strani pa bo šel izraz $1/x \to \infty$, ko bo padal $x \to 0$. Grafično to pomeni, da moramo neskončno sinusoido stisniti na interval $(0, 1)$. Tako dobljen graf niha med premicama $y = \pm 1$ s čedalje večjo frekvenco. Ker je funkcija f liha, dobimo obliko grafa za negativne vrednosti z zrcaljenjem preko izhodišča.



Če si pogledamo sliko malce pobliže, res vidimo, da postaja frekvenca čedalje večja. Zelo blizu izhodišča grafa ni več mogoče natančno narisati.



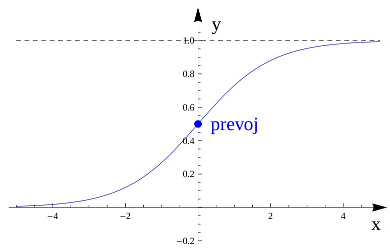
□

(6) Verhulstov model rasti populacije v nekem okolju predpostavlja, da je rast modelirana z logistično funkcijo oblike
$$f(x) = \frac{K}{1 + (K/P_0 - 1)e^{-rx}}.$$

(a) Skiciraj graf funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(b) Analiziraj spremembo grafa funkcije f, če spreminjamo parametre K, P_0 in r.

Rešitev: (a) Najprej skicirajmo graf funkcije $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Funkcija f je definirana za vsa realna števila, njena začetna vrednost pa je $f(0) = 1/2$. Ker je funkcija $x \mapsto 1 + e^{-x}$ padajoča, je funkcija f naraščajoča. Ima dve vodoravni asimptoti. Pri $x \to -\infty$ gre $f(x) \to 0$, pri $x \to \infty$ pa gre $f(x) \to 1$. V točki $x = 0$ ima funkcija f prevoj. Levo od prevoja je konveksna, desno od prevoja pa konkavna.



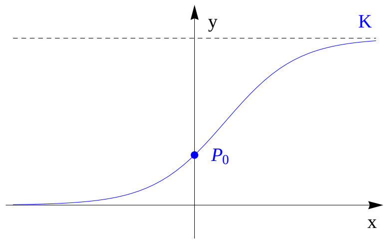
Grafu funkcije f rečemo logistična krivulja.

(b) Splošna logistična funkcija ima obliko
$$f(x) = \frac{K}{1 + (K/P_0 - 1)e^{-rx}},$$
kjer parametre K, P_0 in r interpretiramo na naslednji način:

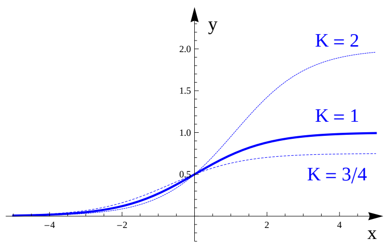
- $K \ldots$ maksimalna populacija,
- $P_0 \ldots$ začetna populacija,
- $r \ldots$ koeficient rasti.

S funkcijo takšne oblike lahko modeliramo rast prebivalstva na našem planetu. Pri tem je P_0 število ljudi v nekem začetnem trenutku, K pa maksimalno število ljudi, ki bi lahko bivalo na planetu Zemlja. V praksi lahko parametra r in K določimo tako, da izmerimo število prebivalstva v nekaterih obdobjih in nato poiščemo logistično krivuljo, ki se najbolje prilega podatkom.

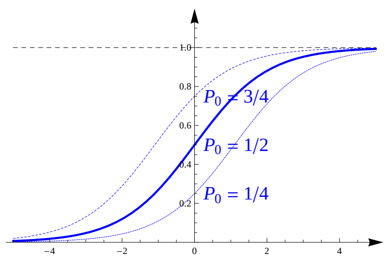
Splošna logistična funkcija je naraščajoča z začetno vrednostjo P_0. Pri $x \to \infty$ ima vodoravno asimptoto $y = K$, pri $x \to -\infty$ pa $y = 0$.



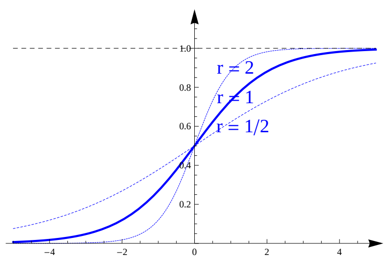
Vidimo, da število prebivalstva najprej nekaj časa eksponentno raste, dokler planet ne postane pregosto poseljen. Nato raste čedalje počasneje in se približuje limitni vrednosti. Funkcija $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ ustreza parametrom $K = 1$, $P_0 = 1/2$ in $r = 1$. Če fiksiramo P_0 in r ter spreminjamo K, se bo spremenila vodoravna asimptota funkcije pri $x \to \infty$. Če K povečamo, se bo prevojna točka premaknila v desno (to pomeni, da bo eksponentna rast trajala nekoliko dlje), če ga zmanjšamo, pa v levo. V tem primeru smo v začetnem trenutku že v situaciji upočasnjevanja hitrosti rasti prebivalstva.



Če fiksiramo K in r ter spreminjamo P_0, v bistvu spreminjamo začetno vrednost. Manjša začetna vrednost pomeni premik prevoja v desno, večja pa v levo.



V primeru, ko sta K in P_0 fiksna, nam parameter r določa hitrost rasti v začetnem trenutku. Večji r pomeni, da se bo graf funkcije f hitreje približal limitni vrednosti.



□

(7) Z Gaussovimi funkcijami oblike

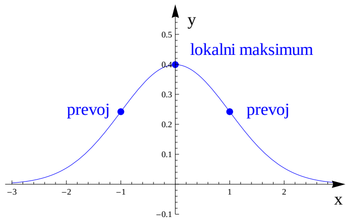
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

opisujemo normalne porazdelitve.

(a) Skiciraj graf funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(b) Analiziraj spremembo grafa funkcije f, če spreminjamo parametra μ in σ.

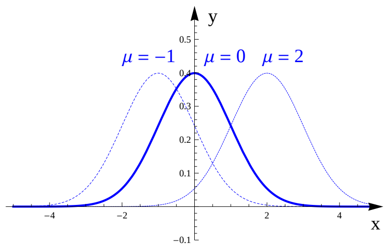
Rešitev: (a) Gaussova funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ je definirana na celi realni osi in je povsod pozitivna. V točki $x = 0$ ima lokalni maksimum, v točkah $x = \pm 1$ pa prevoja. Ko gre $x \to \pm\infty$, se graf funkcije f približuje abscisni osi. Funkcija f je soda.



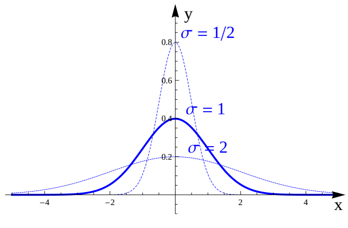
Konstanta $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ je izbrana tako, da je ploščina lika pod krivuljo enaka 1. S to konkretno Gaussovo funkcijo opisujemo standardno normalno porazdelitev.

(b) V splošnem primeru Gaussova funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ opisuje normalno porazdelitev s povprečno vrednostjo μ in s standardnim odklonom σ. Pri tem standardna normalna porazdelitev ustreza parametroma $\mu = 0$ in $\sigma = 1$.

Sprememba parametra μ povzroči, da se graf prestavi levo ali desno. Tako dobljen graf je nato simetričen glede na os $x = \mu$.



Parameter σ določa, kako razpršena je normalna porazdelitev. Če σ povečamo, se graf ratzegne, njegov vrh pa se zniža. V kolikor pa σ zmanjšamo, se vrh dvigne, graf pa se zoži.



□