Matematika s statistiko
Števila in funkcije

Limite in zveznost

(1) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x}-x}{2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2\left(\dfrac{6x+4}{6x-5}\right)$.

Rešitev: Pri računanju limit funkcij si bomo pomagali z naslednjimi limitami oziroma s pravili za računanje limit:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ za vsak $k>0$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\right)$,

Pri prvih treh pravilih je pogoj, da vse limite obstajajo, pri tretjem pravilu pa mora biti še $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \neq 0$. Pri petem pravilu mora biti f zvezna funkcija, hkrati pa mora obstajati limita funkcije g.

(a) Računamo limito racionalne funkcije. Pri takih limitah števec in imenovalec delimo z najvišjo potenco in nato uporabimo četrto pravilo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

(b) Limite iracionalnih funkcij računamo podobno kot limite racionalnih funkcij, le da skušamo z delno racionalizacijo razlike korenov pretvoriti v vsote korenov.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}-x}{2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{2(\sqrt{x^2-x}+x)}, \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-x)-x^2}{2(\sqrt{x^2-x}+x)}, \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}, \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Sedaj bomo uporabili peto pravilo, ki pravi, da limite komutirajo z zveznimi funkcijami. To pomeni, da lahko korene, logaritme, sinuse itd. damo pred limito.

$$\lim_{x\to\infty} \log_2\left(\frac{6x+4}{6x-5}\right) = \log_2\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+4}{6x-5}\right)\right) = \log_2\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6+\frac{4}{x}}{6-\frac{5}{x}}\right)\right) = \log_2 1 = 0.$$

$\square$

(2) Izračunaj linearni asimptoti funkcije $f(x) = \sqrt{x^2+x}$.

Rešitev: Premica $y = kx + n$ je linearna asimptota funkcije f pri $x \to \infty$, če je

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx+n)) = 0.$$

Analogno definiramo tudi asimptote pri $x \to -\infty$.
Če ima funkcija f linearno asimptoto, lahko koeficienta k in n izračunamo z limitama:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$
$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Najprej izračunajmo asimptoto, ko gre $x \to \infty$:

$$k_+ = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1,$$
$$n_+ = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}.$$

Od tod sledi, da ima funkcija f pri $x \to \infty$ linearno asimptoto

$$y_+(x) = x + \frac{1}{2}.$$

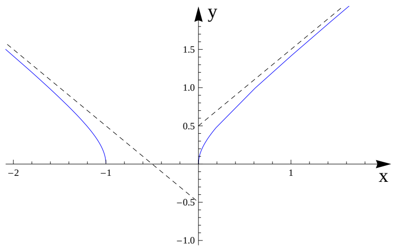
Ko gre $x \to -\infty$, pa dobimo:

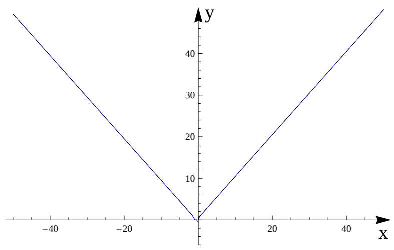
$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1,$$
$$n_- = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x} + x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = -\frac{1}{2},$$

kar pomeni, da je asimptota pri $x \to -\infty$ premica

$$y_-(x) = -x - \frac{1}{2}.$$

Vidimo, da ima funkcija f dve različni linearni asimptoti.





$\square$

(3) Izračunaj limite funkcij:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sin(x-1)}$.

Rešitev: Pri računanju limit funkcij v točki $a \in \mathbb{R}$ veljajo podobna pravila kot pri računanju limit funkcij pri $x \to \infty$, pomagamo pa si lahko tudi z limito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\text{a)} \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} = -2.$$

$$\text{b)} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{c)} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sin(x-1)} \overset{x-1=t}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t(t+2)}{\sin t} = 2.$$

$\square$

(4) Naj bo $f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

(a) Določi definicijsko območje in območje zveznosti funkcije f.

(b) Ali je mogoče f zvezno razširiti na $\mathbb{R}$?

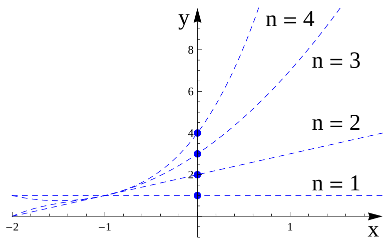
Rešitev: (a) Predpis za funkcijo f je definiran na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ določa zvezno funkcijo, saj je definiran kot kvocient dveh polinomov, pri čemer imenovalec nima ničel na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Funkcijo f lahko zvezno razširimo na $\mathbb{R}$, če obstaja $\lim_{x\to 0} f(x)$. Računajmo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+nx+\binom{n}{2}x^2+\cdots+x^n\right)-1}{x}, \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{nx+\binom{n}{2}x^2+\cdots+x^n}{x}, \\
&= \lim_{x\to 0} \left(n+\binom{n}{2}x+\cdots+x^{n-1}\right), \\
&= n.
\end{aligned}$$

Če torej dodatno definiramo $f(0) = n$, dobimo zvezno funkcijo na $\mathbb{R}$.

Opomba: Opravka imamo z družino funkcij $f_n(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$, ki se izven točke $x = 0$ ujemajo z ustreznimi polinomi. Če namreč definiramo $p_n(x) = n + \binom{n}{2}x + \binom{n}{3}x^2 \cdots + x^{n-1}$, velja $f_n(x) = p_n(x)$ za vse $x \neq 0$. Zato je zvezna razširitev funkcije f_n na $\mathbb{R}$ polinom p_n. Na sliki so prikazani grafi razširitev za $n = 1, 2, 3, 4$.



$\square$

(5) S pomočjo metode bisekcije:

(a) poišči rešitev enačbe $x^3 + 3x^2 + 10x - 5 = 0$ na eno decimalko natančno,

(b) poišči rešitev enačbe $\cos x = x$ na dve decimalki natančno.

Rešitev: Poznamo metode, s pomočjo katerih lahko rešujemo polinomske, trigonometrične, eksponentne in druge enačbe. V kolikor te metode delujejo, lahko najdemo natančne rešitve enačb. Če točne rešitve ne znamo najti, pa lahko približno rešitev poiščemo z metodo bisekcije.

Pri metodi bisekcije uporabljamo naslednji algoritem:

· izberemo željeno natančnost,

· enačbo zapišemo v obliki $f(x) = 0$,

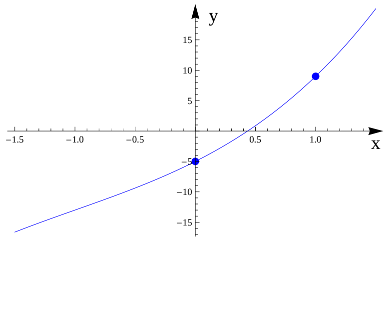
· izberemo začetni interval, ki vsebuje ničlo,

· na vsakem koraku razdelimo interval na dva dela in izberemo tistega, ki vsebuje ničlo,

· postopek ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti.

Delovanje metode temelji na dejstvu, da je graf zvezne funkcije neprekinjen. Če ima torej funkcija v enem krajišču intervala negativno vrednost, v drugem pa pozitivno vrednost, mora imeti nekje na intervalu ničlo.

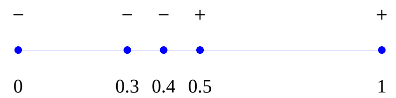
(a) Najprej poiščimo ničlo polinoma $p(x) = x^3 + 3x^2 + 10x - 5$. Če pogledamo graf polinoma p, vidimo, da je $p(0) = -5$ in $p(1) = 9$, od koder sledi, da je nekje na intervalu $[0, 1]$ ničla polinoma p.



Začeli bomo torej z intervalom $[0,1]$. Sedaj bomo postopoma ta interval razpolavljali (v okviru naše natančnosti), dokler ne bomo dobili dovolj majhnega intervala, ki vsebuje ničlo.

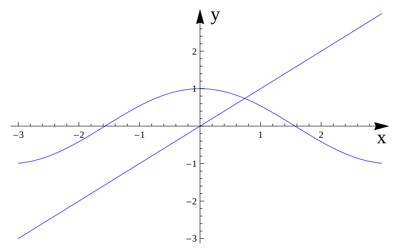
- $f(0.5) = 0.75,$ zato bo ničla na intervalu $[0, 0.5]$,
- $f(0.3) = -1.703,$ zato bo ničla na intervalu $[0.3, 0.5]$,
- $f(0.4) = -0.456,$ zato bo ničla na intervalu $[0.4, 0.5]$.

Pokazali smo, da ima polinom p ničlo na intervalu $[0.4, 0.5]$, zato lahko vzamemo približek za ničlo $x = 0.4$.



Če bi hoteli dobiti bolj natančen približek, bi morali izvesti še nekaj korakov. Boljši približek je $x = 0.435001$.

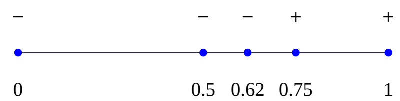
(b) Poskusimo sedaj rešiti enačbo $\cos x = x$. Z grafa je razvidno, da bo rešitev nekje na intervalu $[0,1]$.

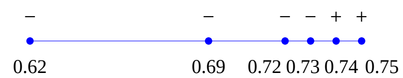


Da bi lahko uporabili metodo bisekcije, enačbo najprej prepišimo v obliko $x - \cos x = 0$ in definirajmo funkcijo $f(x) = x - \cos x$. Velja $f(0) = -1$ in $f(1) = 0.46$, zato bomo začeli z intervalom $[0,1]$.

- $f(0.5) = -0.37,$ zato bo ničla na intervalu $[0.5, 1]$,
- $f(0.75) = 0.018,$ zato bo ničla na intervalu $[0.5, 0.75]$,
- $f(0.62) = -0.19,$ zato bo ničla na intervalu $[0.62, 0.75]$,
- $f(0.69) = -0.08,$ zato bo ničla na intervalu $[0.69, 0.75]$,
- $f(0.72) = -0.03,$ zato bo ničla na intervalu $[0.72, 0.75]$,
- $f(0.74) = 0.001,$ zato bo ničla na intervalu $[0.72, 0.74]$,
- $f(0.73) = -0.01,$ zato bo ničla na intervalu $[0.73, 0.74]$.

Za približek za ničlo bomo vzeli število $x = 0.73$.





Bolj natančen približek za ničlo je $x = 0.739085$. □

(6) Definirajmo funkciji

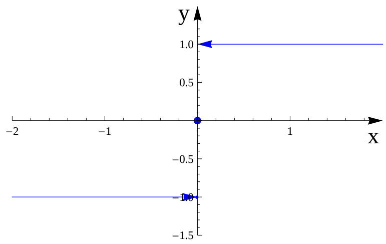
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

in $g(x) = x^3 - x$. Skiciraj grafe funkcij f, g, $f \circ g$ in $g \circ f$ ter obravnavaj njihovo zveznost.

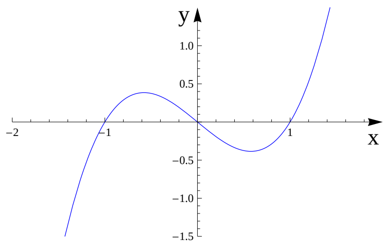
Rešitev: Funkcijo f lahko zapišemo tudi v obliki

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \; x > 0, \\ 0 & ; \; x = 0, \\ -1 & ; \; x < 0. \end{cases}$$

Funkcija f je lokalno konstantna in zvezna povsod razen v točki $x = 0$.



Poglejmo še graf zvezne funkcije $g(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.



Za kompozitum $g \circ f$ velja

$$g(f(x)) = \begin{cases} g(1) & ; \; x > 0, \\ g(0) & ; \; x = 0, \\ g(-1) & ; \; x < 0, \end{cases}$$

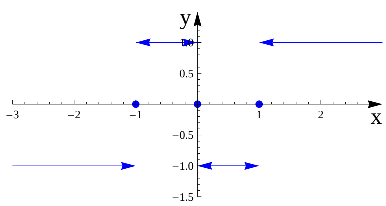
od koder sledi, da je $g(f(x)) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, kar pomeni, da je $g \circ f$ zvezna funkcija. Za funkcijo $f \circ g$ pa imamo

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & ; \; g(x) > 0, \\ 0 & ; \; g(x) = 0, \\ -1 & ; \; g(x) < 0, \end{cases}$$

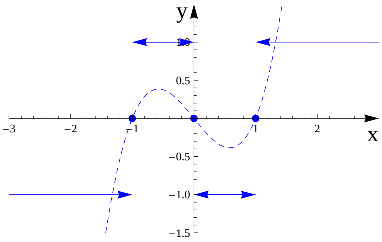
oziroma

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & ; \; -1 < x < 0 \text{ ali } x > 1, \\ 0 & ; \; x \in \{-1, 0, 1\}, \\ -1 & ; \; x < -1 \text{ ali } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Funkcija $f \circ g$ je zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.



Opomba: Za poljubno funkcijo h nam funkcija $f \circ h$ pove, kje je h pozitivna oziroma negativna, ničle funkcije $f \circ h$ pa ustrezajo ničlam funkcije h.



$\square$