Matematika s statistiko
Integral

Nedoločeni integral

(1) Izračunaj nedoločene integrale s pomočjo substitucije:

(a) $\int (5-2x)^9\,dx$,

(b) $\int \frac{dx}{x^2+9}$,

(c) $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$.

Rešitev:

(a) $\int (5-2x)^9\,dx$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = 5-2x$. Sledi $dt = -2dx$ in

$$\int (5-2x)^9\,dx = -\frac{1}{2}\int t^9\,dt = -\frac{1}{20}t^{10} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{20}(5-2x)^{10} + C}}.$$

(b) $\int \frac{dx}{x^2+9}$:

Vzemimo novo spremenljivko $t = \frac{x}{3}$. Potem je $dt = \frac{dx}{3}$ in

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C}}.$$

<u>Opomba</u>: Na podoben način lahko izračunamo, da za vsak $a > 0$ velja

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

(c) $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$:

Uvedimo novo spremenljivko $t = x^2+4$. Sledi $dt = 2x\,dx$ in

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln|x^2+4| + C}}.$$

<u>Opomba</u>: Včasih integriramo funkcije oblike $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, kjer je g neka funkcija. V takih primerih uvedemo novo spremenljivko $u = g(x)$ (sledi $du = g'(x)dx$), da dobimo

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C.$$

$\square$

(2) Izračunaj nedoločene integrale s pomočjo integracije po delih:

(a) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$,

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$,

(c) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \, dx$.

Rešitev: Pri integraciji po delih si pomagamo s formulo

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Ponavadi se pri izbiri u in dv ravnamo po načelu:

· $u \ldots$ funkcija, ki se pri odvajanju poenostavi,
· $dv \ldots$ izraz, ki ga znamo integrirati.

(a) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$:

Vzemimo $u = \ln x$ in $dv = x^2 \, dx$. Sledi $du = \frac{dx}{x}$ in $v = \frac{x^3}{3}$. Tako dobimo

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} \, dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C}}.$$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$:

Funkcijo $\operatorname{arc\,tg} x$ bomo odvajali, izraz dx pa integrirali. V dobljenem integralu bomo nato uvedli novo spremenljivko $t = x^2 + 1$. Sledi

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx &= x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}, \\ &= \underline{\underline{x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C}}. \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \, dx$:

Tokrat najprej vzemimo novo spremenljivko $t = x^2$, nato pa še integriramo po delih

$$\int x^3 e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int t e^t \, dt = \frac{1}{2} \left(t e^t - \int e^t \, dt \right) = \frac{1}{2} \left(t e^t - e^t \right) + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2} \left(x^2 - 1 \right) + C}}.$$

$\square$

(3) Izračunaj nedoločena integrala racionalnih funkcij:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+10}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$.

Rešitev: Za integracijo racionalnih funkcij imamo na razpolago algoritem, ki nas vedno (z več ali manj truda) pripelje do rezultata. Praviloma integriramo racionalne funkcije s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

- S pomočjo deljenja zapišemo racionalno funkcijo v obliki $R(x) = p(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kjer je polinom r nižje stopnje kot polinom q.
- Polinom q razcepimo na produkt linearnih faktorjev in pa nerazcepnih kvadratnih faktorjev.
- Funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov s pomočjo nastavkov:
  - $\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$,
  - $\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1+C_1x}{x^2+bx+c} + \frac{B_2+C_2x}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_l+C_lx}{(x^2+bx+c)^l}$.
- Integriramo vsak parcialni ulomek posebej.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$:

Najprej bomo razcepili racionalno funkcijo na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x-5}{(x^2-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x^2+3x+2)+B(x^2+x-2)+C(x^2-1)}{(x^2-1)(x+2)},\\ &= \frac{x^2(A+B+C)+x(3A+B)+2A-2B-C}{(x^2-1)(x+2)}.\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu pridemo do sistema treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned}A+B+C &= 1,\\ 3A+B &= -2,\\ 2A-2B-C &= -5,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A=-1$, $B=1$ in $C=1$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x-5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right)dx,\\ &= \underline{\underline{-\ln|x-1| + \ln|x+1| + \ln|x+2| + C}}.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+10}{(x+1)(x^2+9)}\,dx$:

Sedaj bomo vzeli nastavek:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+10}{(x+1)(x^2+9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B+Cx}{x^2+9} = \frac{A(x^2+9)+(B+Cx)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)},\\ &= \frac{x^2(A+C)+x(B+C)+(9A+B)}{(x+1)(x^2+9)}.\end{aligned}$$

Tukaj dobimo sistem treh enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned}A+C&=1,\\ B+C&=1,\\ 9A+B&=10,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A=1$, $B=1$, $C=0$. Sledi

$$\int \frac{x^2+x+10}{(x+1)(x^2+9)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+9}\right) dx = \underline{\underline{\ln|x+1| + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C}}.$$

$\square$