Matematika s statistiko
Odvodi

Računanje odvodov

(1) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $h(x) = x \ln x$,

(b) $h(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$,

(c) $h(x) = \ln(2x+3)$,

(d) $h(x) = e^{-x^2}$,

(e) $h(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$,

(f) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,

(g) $h(x) = x^2 e^{-x}$.

Rešitev: Odvode naslednjih funkcij bomo izračunali s pomočjo tabele osnovnih odvodov in pa s pomočjo pravil za odvod vsote, produkta, kvocienta in kompozituma funkcij:

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x),\\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},\\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x).
\end{aligned}
$$

Prvi dve in zadnja formula veljajo za poljubne odvedljive funkcije f in g, pri tretji pa mora biti funkcija g neničelna. Iz formule za odvod produkta in pa dejstva, da je odvod konstante enak nič, sledi še, da za poljuben $c \in \mathbb{R}$ in za poljubno odvedljivo funkcijo f velja

$$(c \cdot f)'(x) = cf'(x).$$

(a) Funkcija $h(x) = x \ln x$ je produkt funkcij $f(x) = x$ in $g(x) = \ln x$. Z uporabo formule za odvod produkta dobimo

$$h'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

(b) Funkcija $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$ je kvocient funkcij $f(x) = x$ in $g(x) = 1 - x^2$, zato je njen odvod enak

$$h'(x) = \frac{1 \cdot (1-x^2) - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

(c) Funkcijo $h(x) = \ln(2x+3)$ lahko zapišemo kot kompozitum funkcij $f(x) = \ln x$ in $g(x) = 2x + 3$. Potem je $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = 2$ in

$$h'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{2}{2x+3}.$$

(d) Tokrat lahko $h(x) = e^{-x^2}$ zapišemo kot kompozitum funkcij $f(x) = e^x$ in $g(x) = -x^2$. Sledi

$$h'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = -2x\, e^{-x^2}.$$

(e) Sedaj vzemimo $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ in $g(x) = \frac{1}{x}$. Sledi $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ in

$$h'(x) = \frac{1}{1+g(x)^2} \cdot g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(f) Za izračun odvoda funkcije $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ bomo uporabili verižno pravilo in pa formulo za odvod kvocienta

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)^3}}.$$

(g) V tem primeru bomo uporabili verižno pravilo in pa formulo za odvod produkta

$$h'(x) = (x^2)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x}.$$

□

(2) Dana je kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

(a) Poišči tangento na graf funkcije v točki z absciso $x = 0$.

(b) Poišči tangenti na krivuljo, ki potekata skozi točko $T(2, 2)$.

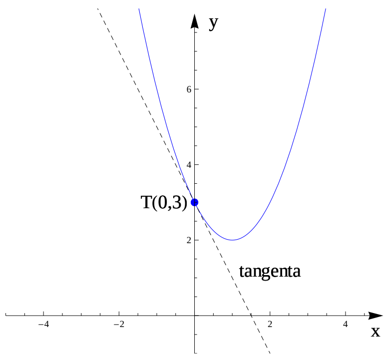
Rešitev: (a) Spomnimo se, da lahko premico, ki ima smerni koeficient k in gre skozi točko $T(x_0, y_0)$, podamo z enačbo

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

V primeru, ko iščemo tangento na krivuljo $y = f(x)$, se lahko spomnemo na geometrijski pomen odvoda, da izpeljemo, da je

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

enačba tangente na dano krivuljo v točki $(x_0, f(x_0))$.



V našem primeru je $f'(x) = 2x - 2$, točka na krivulji pa $T(0,3)$. Smerni koeficient tangente v tej točki je enak $f'(0) = -2$, enačba tangente skozi to točko pa

$$y = -2x + 3.$$

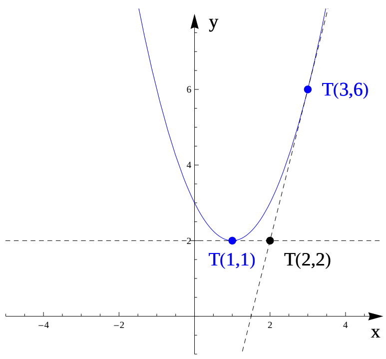
(b) Spet bomo uporabili formulo za enačbo tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, le da bomo upoštevali, da je tokrat dana točka na tangenti, iščemo pa točke na grafu. Ker gre tangenta skozi točko $T(2,2)$, bomo vzeli, da je $x = y = 2$. Od tod dobimo

$$\begin{aligned}
2 &= f'(x_0)(2 - x_0) + f(x_0), \\
2 &= (2x_0 - 2)(2 - x_0) + x_0^2 - 2x_0 + 3, \\
2 &= -2x_0^2 + 6x_0 - 4 + x_0^2 - 2x_0 + 3, \\
0 &= x_0^2 - 4x_0 + 3.
\end{aligned}$$

Ta enačba ima rešitvi $x_0 = 1$ in $x_0 = 3$. Ustrezni točki na grafu funkcije f sta $T(1,2)$ in $T(3,6)$, enačbi tangent pa

$$\begin{aligned}
y &= 2, \\
y &= 4x - 6.
\end{aligned}$$

Poglejmo še skico.



$\square$

(3) Za dani funkciji izračunaj intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti:

(a) $f(x) = x \ln x$,

(b) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Rešitev: Intervale naraščanja in padanja funkcije iščemo s pomočjo odvoda. Kjer je odvod pozitiven, funkcija narašča, kjer je negativen, pa pada. V točkah, kjer odvod zamenja predznak, ima funkcija lokalni ekstrem. Na podoben način iščemo intervale konveksnosti in konkavnosti s pomočjo drugega odvoda. Funkcija je konveksna, kjer je drugi odvod pozitiven in konkavna, kjer je negativen. Točke, kjer drugi odvod zamenja predznak, imenujemo prevoji.

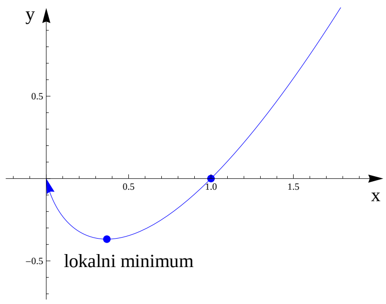
(a) Funkcija $f(x) = x \ln x$ je definirana na $D_f = (0, \infty)$. Njen odvod je enak

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

od koder sledi, da f narašča na (e^{-1}, ∞) in pada na $(0, e^{-1})$. V točki $x = e^{-1}$ ima funkcija f lokalni minimum. Drugi odvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Ker je $f''(x) > 0$ za vsak $x \in D_f$, je funkcija f konveksna. S pomočjo teh informacij že lahko približno skiciramo graf funkcije f.



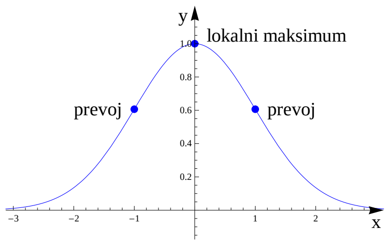
(b) Gaussova funkcija $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ je definirana za vsa realna števila. Njen odvod je

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Od tod sledi, da f narašča na $(-\infty, 0)$ in pada na $(0, \infty)$. V točki $x = 0$ ima funkcija f lokalni maksimum. Drugi odvod funkcije f je

$$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Funkcija f je konveksna na $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, konkavna pa na $(-1, 1)$. V točkah $x = \pm 1$ ima funkcija f prevoja.



$\square$

(4) Izračunaj parcialne odvode naslednjih funkcij:

(a) $f(x, y) = x^2 + y$,
(b) $f(x, y) = x^3 y - xy^2$,
(c) $f(x, y) = e^x y + e^y x$,
(d) $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.

Rešitev: Parcialne odvode računamo podobno kot navadne odvode, le da moramo paziti, po kateri spremenljivki odvajamo. Kadar odvajamo po spremenljivki x, si mislimo, da je y konstanta in obratno.

(a) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = x^2 + y$ sta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

(b) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = x^3y - xy^2$ sta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - y^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 2xy.$$

(c) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = e^x y + e^y x$ sta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y + e^y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + e^y x.$$

(d) Parcialna odvoda funkcije $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ sta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x)\cos(y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x)\sin(y).$$

$\square$