Matematika s statistiko
Odvodi

Uporaba odvoda

(1) Poišči globalne ekstreme danih funkcij:

(a) funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ na intervalu $[-1, 3]$,

(b) funkcije $f(x) = |x|$ na intervalu $[-1, 1]$.

Rešitev: Ena izmed lepih lastnosti zveznih funkcij je ta, da vsaka zvezna funkcija f, ki je definirana na omejenem in zaprtem intervalu $[a, b]$, na tem intervalu doseže svojo minimalno in maksimalno vrednost. Če je funkcija f še razmeroma gladka, lahko ti dve vrednosti poiščemo s pomočjo odvoda. Pri iskanju ekstremnih vrednosti najprej zožimo nabor morebitnih kandidatov na naslednje tipe točk z intervala $[a, b]$:

· stacionarne točke funkcije f v (a, b) (to so točke $x \in (a, b)$, za katere velja $f'(x) = 0$),
· robni točki intervala $[a, b]$,
· točke na intervalu $[a, b]$, v katerih funkcija f ni odvedljiva.

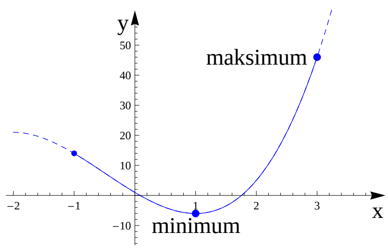
(a) Najprej izračunajmo odvod funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Velja

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1).$$

Stacionarni točki sta torej $x = -2$ in $x = 1$. Znotraj intervala $[-1, 3]$ pa leži samo stacionarna točka $x = 1$. Polinomi so odvedljive funkcije, zato so kandidati za ekstreme funkcije f točke $\{-1, 1, 3\}$. Sedaj moramo izračunati vrednosti funkcije f v teh točkah, da najdemo ekstremni vrednosti. Iz vrednosti $f(-1) = 14$, $f(1) = -6$ in $f(3) = 46$ sklepamo, da je:

$$\max(f) = 46 \text{ pri } x = 3,$$
$$\min(f) = -6 \text{ pri } x = 1.$$

Poglejmo še graf funkcije f.



(b) Sedaj imamo funkcijo $f(x) = |x|$, ki jo lahko zapišemo tudi s predpisom

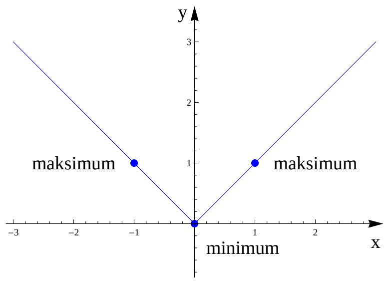
$$f(x) = \begin{cases} x & ; x > 0, \\ 0 & ; x = 0, \\ -x & ; x < 0. \end{cases}$$

Odvedljiva je povsod, razen v točki $x = 0$, njen odvod pa je

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x > 0, \\ -1 & ; \ x < 0. \end{cases}$$

Vidimo, da nima stacionarnih točk, zato so kandidati za ekstreme funkcije f točke $\{-1, 0, 1\}$. Vrednosti funkcije f v teh točkah so $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ in $f(1) = 1$. Od tod sledi:

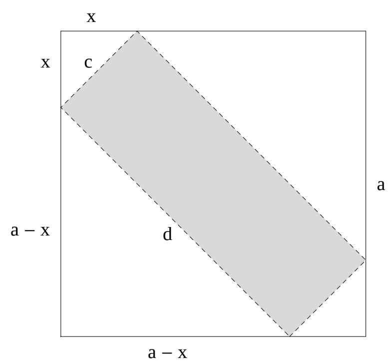
$$\begin{aligned} &\max(f) = 1 \text{ pri } x = -1 \text{ in } x = 1, \\ &\min(f) = 0 \text{ pri } x = 0. \end{aligned}$$



$\square$

(2) V kvadrat s stranico a včrtamo pravokotnik, katerega stranice so vzporedne diagonalama kvadrata. Med vsemi takšnimi pravokotniki poišči tistega, ki ima največjo ploščino, in jo tudi izračunaj.

Rešitev: Najprej označimo dolžine odsekov na stranicah kvadrata, ki jih določajo stranice pravokotnika z x in $x - a$.



Z uporabo Pitagorovega izreka potem dobimo

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{2}x, \\ d &= \sqrt{2}(a - x). \end{aligned}$$

Ploščina včrtanega pravokotnika je odvisna od parametra x, in sicer

$$S(x) = cd = \sqrt{2}x\sqrt{2}(a - x) = 2(ax - x^2).$$

Možne dolžine parametra x ležijo na intervalu $x \in [0, a]$. Robni točki sicer ustrezata degeneriranima pravokotnikoma.

Iščemo torej maksimum funkcije S na intervalu $[0, a]$. Odvod funkcije S je enak

$$S'(x) = 2\,(a - 2x)\,,$$

od koder dobimo, da je $x = \frac{a}{2}$ stacionarna točka funkcije S. Levo od stacionarne točke je odvod pozitiven, desno pa negativen, zato v tej točki funkcija S doseže svoj maksimum.

Med včrtanimi pravokotniki ima največjo ploščino kvadrat z dolžino stranice

$$c = d = \frac{a}{2},$$

njegova ploščina pa je enaka $S = \frac{a^2}{2}$. $\square$

(3) Poišči globalne ekstreme danih funkcij:

(a) funkcije $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2 - 2y$ na trikotniku z oglišči $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ in $C(0, 2)$,
(b) funkcije $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ na krogu, določenim z neenačbo $x^2 + y^2 \leq 1$.

Rešitev: Kandidati za globalne ekstreme odvedljive funkcije na ravninskem liku so:

· stacionarne točke v notranjosti lika,
· oglišča lika,
· stacionarne točke na robnih krivuljah.

Če želimo najti ekstreme, moramo torej najprej poiskati vse te točke, nato pa izračunati vrednosti funkcije v teh točkah. Največja in najmanjša izmed dobljenih vrednosti sta globalna ekstrema funkcije.

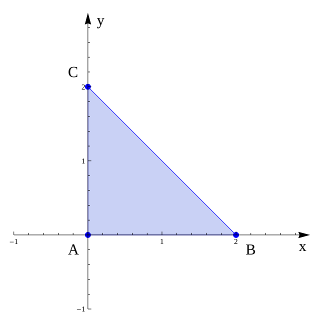
(a) Najprej poiščimo stacionarne točke funkcije $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2 - 2y$. To so rešitve sistema enačb:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Parcialna odvoda funkcije f sta $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y - 2$. Od tod dobimo sistem enačb

$$2x - 3y = 0,$$
$$-3x + 8y = 2,$$

ki ima rešitev $x = 6/7$, $y = 4/7$. Stacionarna točka $T_1(6/7, 4/7)$ leži znotraj trikotnika ABC, zato jo moramo upoštevati.



Rob trikotnika sestoji iz treh daljic. Če zožimo funkcijo f na vsako izmed daljic, dobimo funkcijo ene spremenljivke.

Daljica AB: Na daljici AB je $y = 0$, spremenljivka x pa teče na intervalu $x \in [0, 2]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija $f(x, 0) = x^2$. Ker je $f'(x, 0) = 2x$, dobimo stacionarno točko $(0, 0)$, ki pa je hkrati oglišče trikotnika.

Daljica BC: Na daljici BC je $y = 2 - x$, spremenljivka x pa teče na intervalu $x \in [0, 2]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija

$$f(x, 2 - x) = x^2 - 3x(2 - x) + 4(2 - x)^2 - 2(2 - x) = 8x^2 - 20x + 12.$$

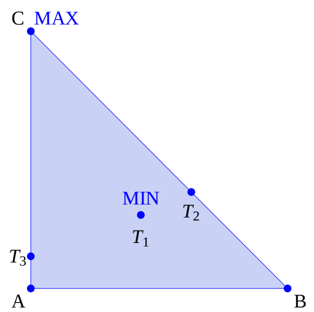
Njen odvod je $f'(x, 2 - x) = 16x - 20$, zato dobimo stacionarno točko $T_2(5/4, 3/4)$.

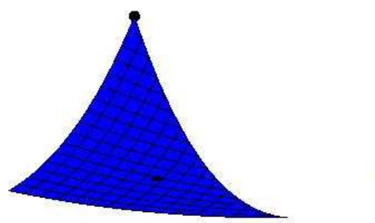
Daljica AC: Na daljici AC je $x = 0$, spremenljivka y pa teče na intervalu $y \in [0, 2]$. Zožitev funkcije f na to daljico je funkcija $f(0, y) = 4y^2 - 2y$. Iz $f'(0, y) = 8y - 2$ dobimo stacionarno točko $T_3(0, 1/4)$.

Kandidati za ekstreme so torej točke T_1, T_2, T_3 in oglišča A, B in C. Vrednosti funkcije f v teh točkah so:

$$\begin{aligned}
f(T_1) &= -4/7, \\
f(T_2) &= -1/2, \\
f(T_3) &= -1/4, \\
f(A) &= 0, \\
f(B) &= 4, \\
f(C) &= 12.
\end{aligned}$$

Maksimalna vrednost funkcije f na trikotniku ABC je 12 v točki C, minimalna vrednost pa je $-4/7$ v točki T_1. Grafe funkcij večih spremenljivk je težko risati, lahko pa si pomagamo z računalnikom. V našem primeru je graf funkcije f neka ploskev, ki ima za tloris trikotnik ABC.

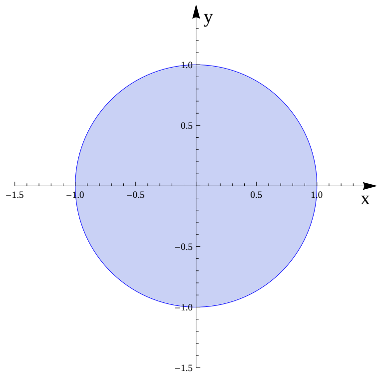




(b) Sedaj iščemo ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ na krogu, določenim z neenačbo $x^2 + y^2 \leq 1$. Parcialna odvoda funkcije f sta $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y$. Od tod dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
2x + 4y &= 0, \\
4x + 2y &= 0,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $x = 0$, $y = 0$. Stacionarna točka $T_1(0, 0)$ leži znotraj kroga.



Rob kroga je enotska krožnica. Lahko bi jo obravnavali v dveh kosih kot grafa funkcij $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, lažje pa je, če jo parametriziramo s polarnim kotom, in sicer:

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\phi, \\
y &= \sin\phi,
\end{aligned}
$$

kjer je $\phi \in [0, 2\pi]$. Zožitev funkcije f na krožnico je potem funkcija

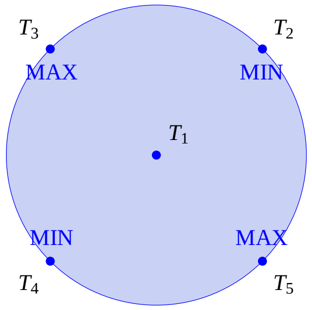
$$
f(\cos\phi, \sin\phi) = \cos^2\phi + 4\cos\phi\sin\phi + \sin^2\phi = 1 + 2\sin 2\phi
$$

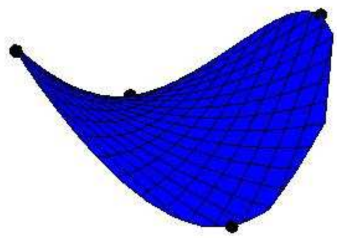
z odvodom $f'(\cos\phi, \sin\phi) = 4\cos 2\phi$. Stacionarne točke ustrezajo kotom $\phi \in [0, 2\pi]$, ki rešijo enačbo $4\cos 2\phi = 0$. To so koti $\phi \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$, ustrezne stacionarne točke pa so $T_2(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $T_3(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $T_4(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ in $T_5(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Za konec moramo še preveriti vrednosti funkcije f v dobljenih točkah:

$$
\begin{aligned}
f(T_1) &= 0, \\
f(T_2) &= 3, \\
f(T_3) &= -1, \\
f(T_4) &= 3, \\
f(T_5) &= -1.
\end{aligned}
$$

Vidimo, da funkcija f doseže maksimalno vrednost 3 v točkah T_2 in T_4 ter minimalno vrednost -1 v točkah T_3 in T_5. Graf funkcije f ima tokrat obliko sedla.





□

(4) S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite funkcij:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(x+1)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x}{e^x-\cos x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x\ln^2 x$.

Rešitev: S pomočjo odvoda lahko na preprost način izračunamo tudi kakšne limite, ki se sicer izkažejo za trd oreh. To nam pogosto pride prav pri študiju asimptotskega obnašanja funkcije.

L'Hospitalovo pravilo: Limita kvocienta $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, kjer gresta števec in imenovalec oba hkrati proti 0 ali pa oba hkrati proti $\pm\infty$ pri $x\to a$, je enaka limiti $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, če le-ta obstaja. Pri tem morata biti funkciji f in g odvedljivi v okolici točke $a\in\mathbb{R}$. Podobno velja, če namesto limite $x\to a$ gledamo limito $x\to\pm\infty$, ali pa enostransko limito.

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{1}{x+1}}=1.$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x}{e^x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-x+1}{e^x+\sin x}=2.$$

(c) $$\lim_{x\to 0+}x\ln^2 x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}2x=0.$$

□

(5) Skiciraj graf funkcije $f(x)=x\ln^2 x$.

Rešitev: Pri skiciranju grafov funkcij so nam v pomoč naslednji podatki, ki jih lahko predhodno izračunamo:

· definicijsko območje, ničle, poli, limite na robu definicijskega območja, asimptote,

· stacionarne točke, intervali naraščanja in padanja,

· prevoji, intervali konveksnosti in konkavnosti.

- Funkcija f je definirana na $D_f=(0,\infty)$ in ima ničlo v točki $x=1$. Limiti na robovih definicijskega območja pa sta

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}2x=0,$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\ln^2 x=\infty.$$

- Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x (\ln x + 2).$$

Torej je funkcija f naraščajoča na $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ in padajoča na $(e^{-2}, 1)$. V točki $x = e^{-2}$ ima funkcija f lokalni maksimum, v točki $x = 1$ pa lokalni minimum. Velja

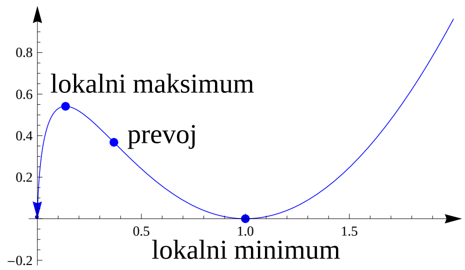
$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \ln x (\ln x + 2) = \infty,$$

od koder sklepamo, da ima graf funkcije f v točki $x = 0$ navpično tangento.

- Drugi odvod funkcije f je enak

$$f''(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1).$$

Od tod sledi, da je funkcija f konveksna na (e^{-1}, ∞) in konkavna na $(0, e^{-1})$, v točki $x = e^{-1}$ pa ima prevoj.



□

(6) Dane so točke $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ in $(2, -1)$.

(a) Poišči funkcijsko zvezo $y = A + Bx$, ki se po kriteriju najmanjših kvadratov najbolje ujema s temi podatki.

(b) Oceni vrednosti y pri $x = 1.5$ in pri $x = 3$.

(c) Kaj se zgodi s funkcijsko zvezo, če točkam dodamo še točki $(-3, -5)$ in $(3, -1.5)$.

Rešitev: (a) V praksi se pogosto srečamo s problemom, ko moramo podatke, ki jih dobimo z nekim merjenjem, opisati s funkcijsko zvezo. V kolikor domnevamo, da je ta zveza linearna, lahko poiščemo premico, ki se po kriteriju najmanjših kvadratov najbolje prilega podatkom.

Recimo, da imamo točke $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2), \ldots, T_n(x_n, y_n)$ v ravnini. Najprej moramo izračunati naslednja povprečja:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Premica, ki se najbolje ujema z danimi točkami, ima potem enačbo $y = A + Bx$, kjer je

$$B = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2},$$
$$A = \overline{y} - B\overline{x}.$$

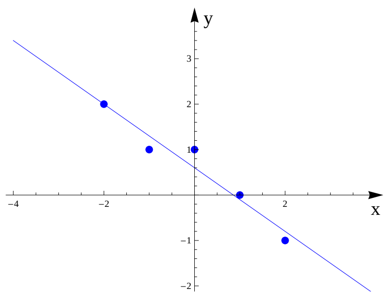
V našem primeru je

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{5}(-2-1+0+1+2) = 0, \\
\overline{y} &= \frac{1}{5}(2+1+1+0-1) = 0.6, \\
\overline{xy} &= \frac{1}{5}(-4-1+0+0-2) = -1.4, \\
\overline{x^2} &= \frac{1}{5}(4+1+0+1+4) = 2.
\end{aligned}$$

Od tod lahko izračunamo, da je $B = -0.7$ in $A = 0.6$, iskana premica pa ima enačbo

$$y = 0.6 - 0.7x.$$

Poglejmo še skico.



(b) S pomočjo izračunane funkcijske zveze lahko sedaj približno ocenimo vrednosti y pri vrednostih neodvisne spremenljivke, ki jih nimamo podane.

$$\begin{aligned}
y(1.5) &= -0.45, \\
y(3) &= -1.5.
\end{aligned}$$

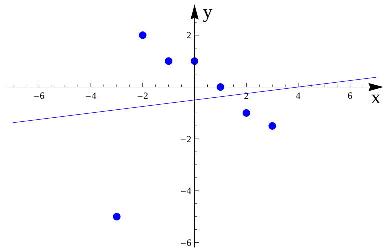
(c) Poglejmo si sedaj, kako se spremeni funkcijska zveza, če točkam dodamo še točki $(-3, -5)$ in $(3, -1.5)$. Točka $(3, -1.5)$ leži na premici, ki se najbolje prilega ostalim točkam, medtem ko točka $(-3, -5)$ leži precej izven nje. Povprečja so sedaj:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{7}(-2-1+0+1+2-3+3) = 0, \\
\overline{y} &= \frac{1}{7}(2+1+1+0-1-5-1.5) = -0.5, \\
\overline{xy} &= \frac{1}{7}(-4-1+0+0-2+15-4.5) = 0.5, \\
\overline{x^2} &= \frac{1}{7}(4+1+0+1+4+9+9) = 4.
\end{aligned}$$

Sedaj je $B = 0.125$ in $A = -0.5$, premica pa ima enačbo

$$y = -0.5 + 0.125x.$$

Kot vidimo na sliki, izračunana premica ne aproksimira najbolje danih točk. Razlog je v tem, da leži točka $(-3, -5)$ precej proč od premice, ki aproksimira ostale točke. Da bi se temu izognili, ponavadi ne upoštevamo točk, ki preveč odstopajo.



$\square$

(7) Dane so točke $(1, 0.1)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$ in $(4, 6)$. Poišči potenčno funkcijo $y = Ax^B$, ki se najbolje ujema z danimi podatki.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo poskusili najti potenčno funkcijo $y = Ax^B$, ki aproksimira dane točke. Če to funkcijsko zvezo logaritmiramo, pridemo do zveze

$$\ln y = \ln A + B \ln x.$$

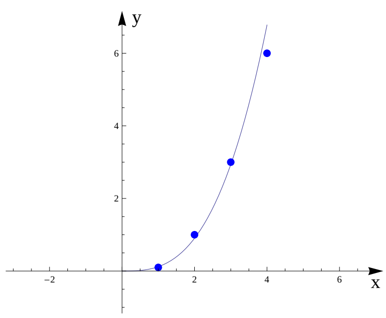
Sedaj lahko uporabimo formule za linearno aproksimacijo, s tem da pri računanju vrednosti x nadomestimo z vrednostmi $x' = \ln x$, vrednosti y pa z vrednostmi $y' = \ln y$. Sledi

$$\begin{aligned}
\overline{x'} &= \frac{1}{4}(0 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4) = 0.79, \\
\overline{y'} &= \frac{1}{4}(\ln 0.1 + 0 + \ln 3 + \ln 6) = 0.15, \\
\overline{x'y'} &= \frac{1}{4}(0 + 0 + (\ln 3)^2 + \ln 4 \ln 6) = 0.92, \\
\overline{x'^2} &= \frac{1}{4}(0 + (\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + (\ln 4)^2) = 0.90.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo $B = 2.91$, $\ln A = -2.15$ in $A = e^{-2.15} = 0.12$. Iskana potenčna funkcija ima enačbo

$$y = 0.12x^{2.91}.$$

Poglejmo še skico.



$\square$