



Pogojna verjetnost in Bayesov teorem

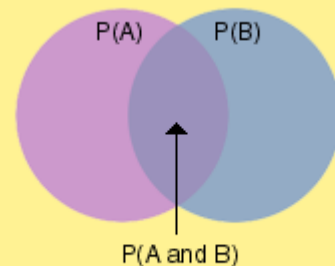
Iztok Grabnar

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za farmacijo

Oktober, 2011

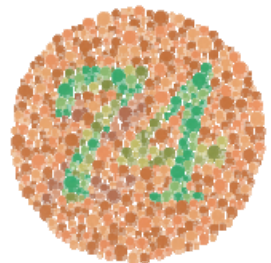
Pogojna verjetnost

- Verjetnost dogodka "a" pri pogoju, da se je zgodil dogodek "b"
- Zapis:
 - $p(a|b)$
 - | pomeni "če je", "če imamo", "če velja"
- Uporaba:
 - Diagnostični testi (občutljivost/specifičnost)
 - Analiza podatkov, primerjava modelov
 - Markovski procesi

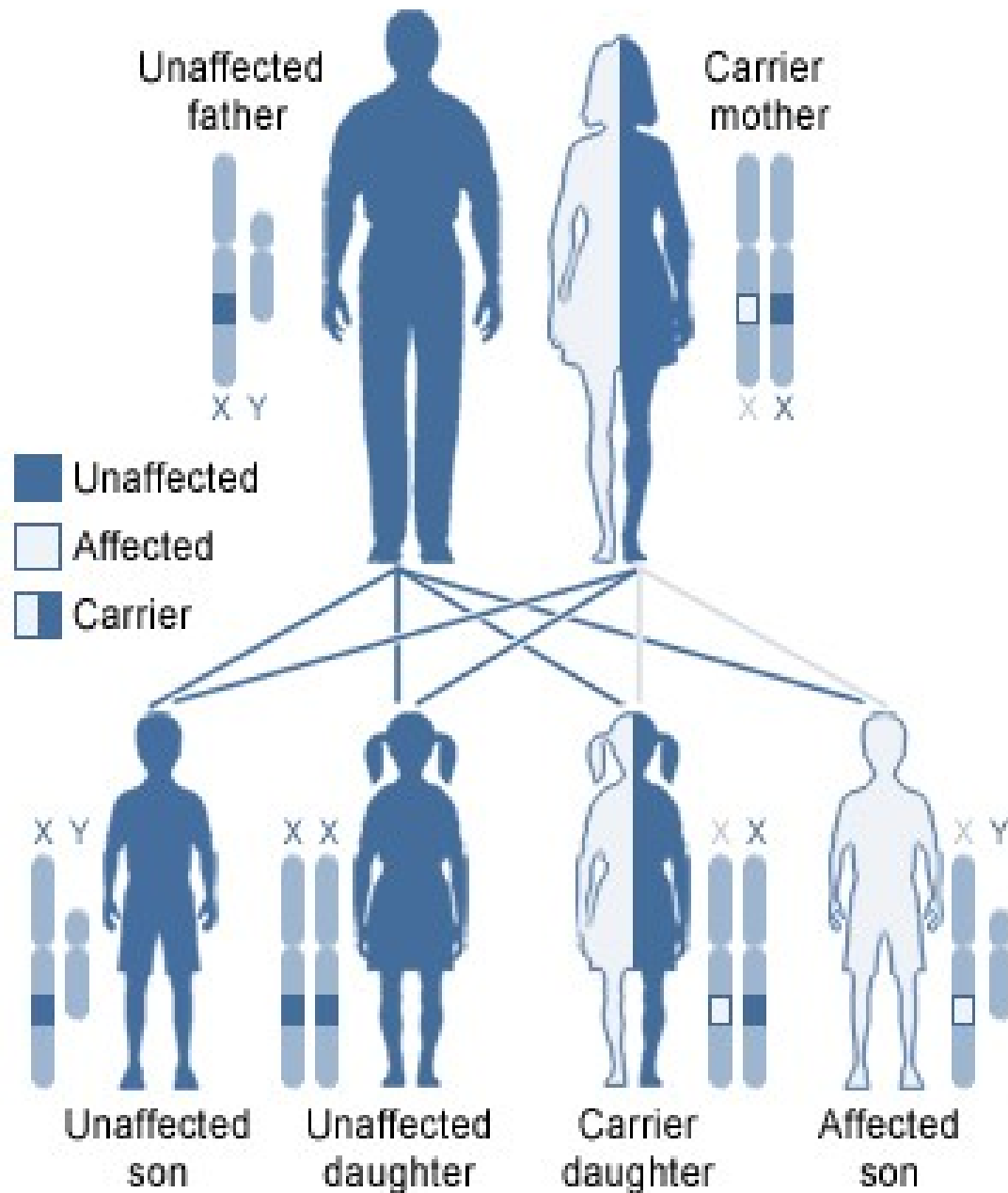


Množenje verjetnosti





- ❑ Verjetnost, da bo otrok deček ($p=0,51$)
- ❑ Verjetnost krvne skupine A ($p=0,43$)
- ❑ Kakšna je verjetnost, da bo otrok deček s krvno skupino A?
- ❑ Verjetnost barvne slepote ($p=0,04$)
- ❑ Kakšna je verjetnost, da bo otrok deklica z barvno slepoto?



X-linked recessive, carrier mother



Igralne karte

			
13	13	13	13
13	13	7	13

$P(S)$

$P(F)$

$P(S|F)$

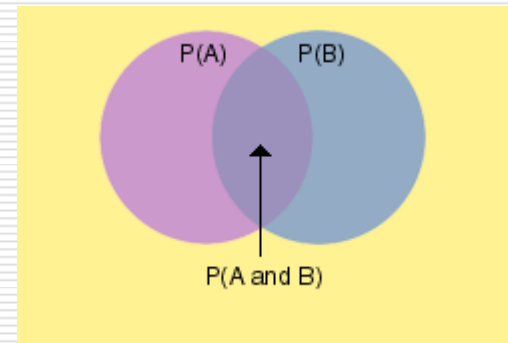
$P(F|S)$

Primer pogojne verjetnosti

- Diagnostični klinični test
- Dogodka
 - Dogodek A: Pacient ima bolezen
 - Dogodek B: Test je pozitiven

□ Zapis:

- $p(A \cap B)$ ■ Verjetnost, da ima pacient bolezen in pozitiven izid testa
- $p(A \cap B')$ ■ Verjetnost, da ima pacient bolezen, a je izid testa negativen (**lažno negativen**)
- $p(A' \cap B)$ ■ Verjetnost, da pacient nima bolezn, a je izid testa pozitiven (**lažno pozitiven**)
- $p(A|B)$ ■ Verjetnost, da ima pacient bolezen, če je izid testa pozitiven
- $p(A|B')$ ■ Verjetnost, da ima pacient bolezen, če je izid testa negativen



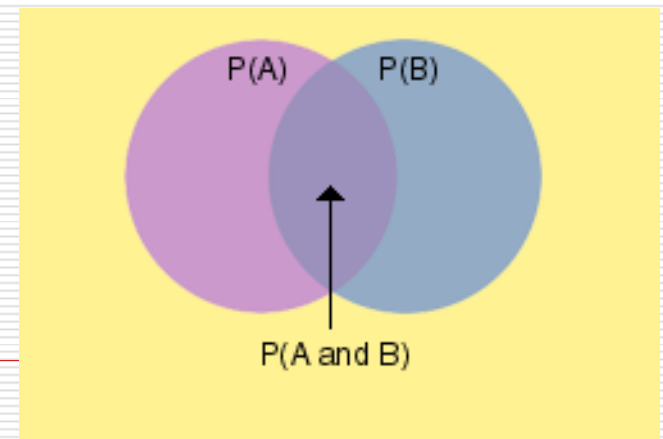
30% pacientov, ki so bili v letu 2008 sprejeti v enoti nujne medicinske pomoči UKC Ljubljana zaradi bolečine v trebušni votlini, je imelo akutno vnetje slepiča. 70% bolnikov z vnetjem slepiča je imelo telesno temperaturo nad 37,5°C. Pri pacientih, ki niso imeli vnetja slepiča, pa je bila telesna temperatura višja od 37,5°C pri 40% bolnikov.

-
- Kaj lahko rečemo o dogodku A, če poznamo izid B?
 - Pozitiven test = bolezen, negativen test = zdrav?
 - Diagnostični testi niso idealni!

$$p(A \cap B) = p(A|B)p(B) = p(B|A)p(A)$$
$$p(A|B') = \frac{p(A \cap B')}{p(B')} = \frac{p(A \cap B')}{1 - p(B)}$$

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B|A)p(A) + p(B|A')p(A')}$$

- Odvisnost dogodkov A in B
 - Ali je $p(A)$ odvisna od $p(B)$?
 - Ali je $p(B)$ odvisna od $p(A)$?



Bayesov teorem

- Dogodki A_i kjer je $i = 1$ do k so:

- Nezdržljivi: $A_i \cap A_j = \emptyset$ za vse i, j

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_k) = 1$$

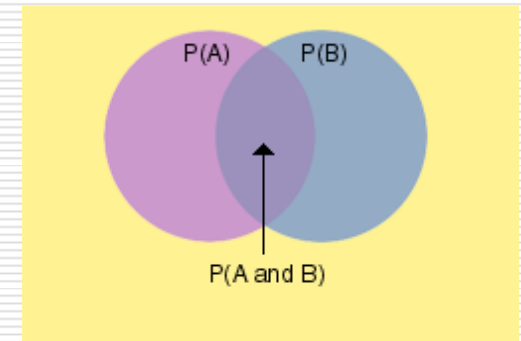
- Za vsak dogodek B

$$p(B) = p(B|A_1)p(A_1) + \dots + p(B|A_k)p(A_k)$$

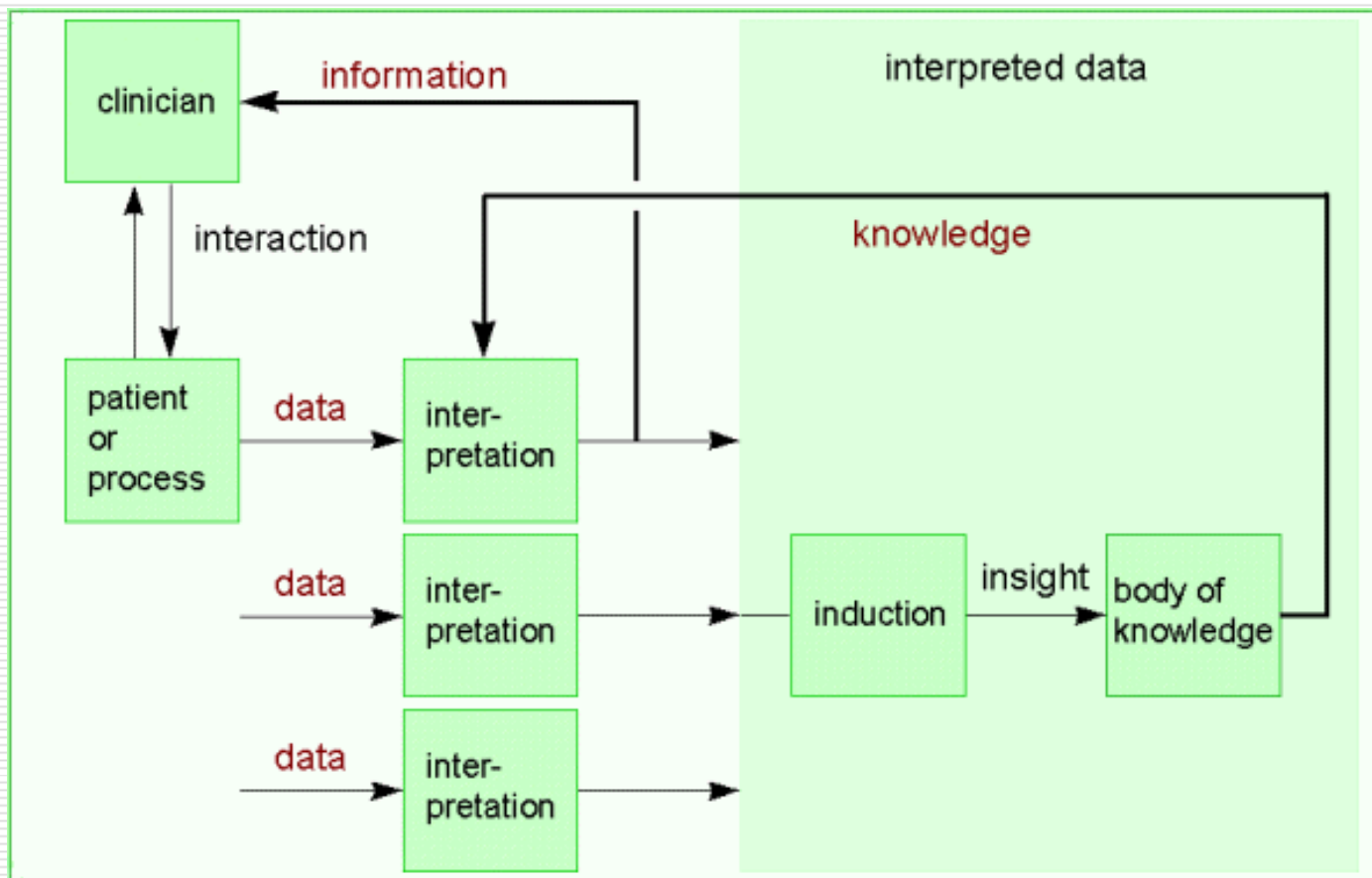
$$p(B) = \sum_{i=1}^k p(B|A_i)p(A_i)$$

- Bayesov teorem

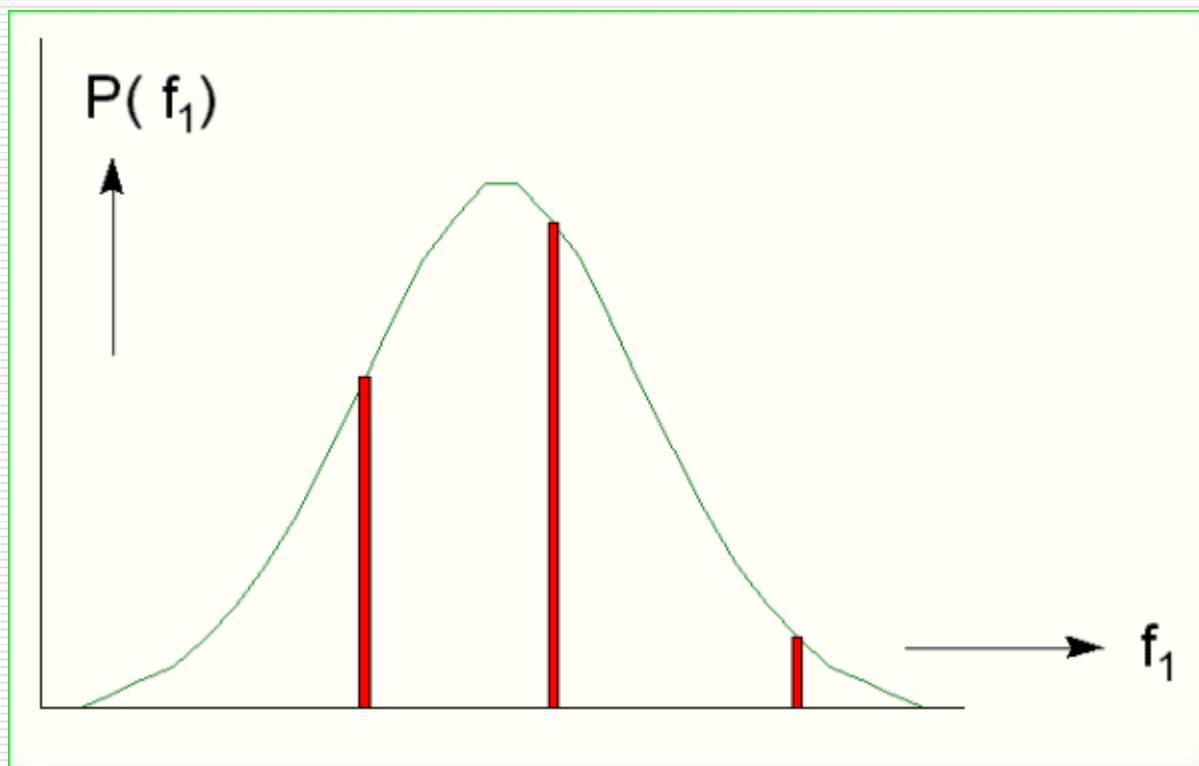
$$p(A_j|B) = \frac{p(A_j \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B|A_j) \cdot p(A_j)}{\sum_{i=1}^k p(B|A_i)p(A_i)}$$

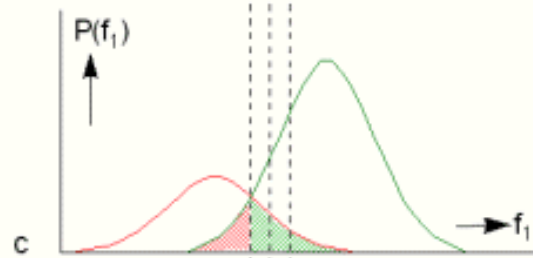
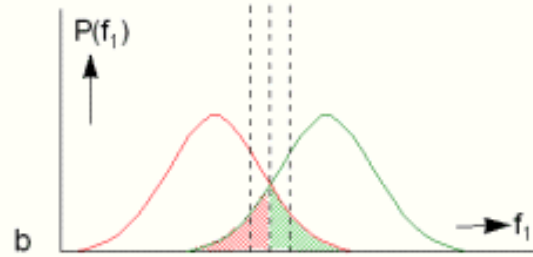
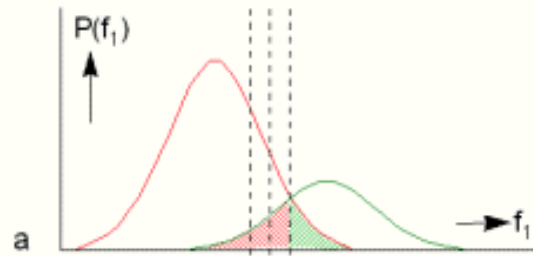


Podatek, informacija in znanje



Učenje





15.01 Relationships between True Positive (TP), True Negative (TN), False Positive (FP), and False Negative (FN)

		Decision Model		
		+	-	
Truth	+	TP	FN	100%
	-	FP	TN	100%

Table 15.1. Relationships between True Positive (TP), True Negative (TN), False Positive (FP), and False Negative (FN).

Občutljivost in specifičnost

15.02 Illustration of Sensitivity, Specificity, and Predictive Value

		Decision Model		
		+	-	
Truth	+	a	b	a + b
	-	c	d	c + d
		a + c	b + d	a + b + c + d

Table 15.2. Illustration of Sensitivity, Specificity, and Predictive Value (see text).

Občutljivost $TP = a / (a + b)$

Specifičnost $TN = d / (c + d)$

Pozitivna napovedna vrednost $PNV = a / (a + c)$

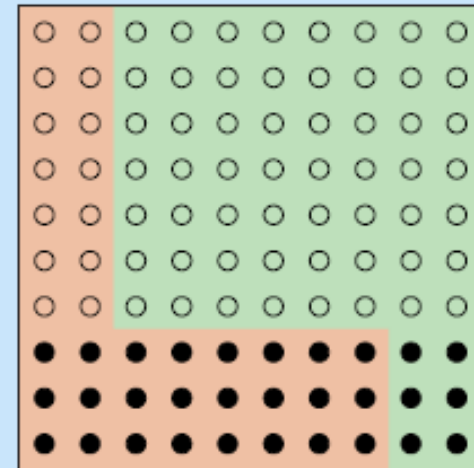
Negativna napovedna vrednost $NNV = d / (b + d)$

Understanding sensitivity and specificity with the right side of the brain

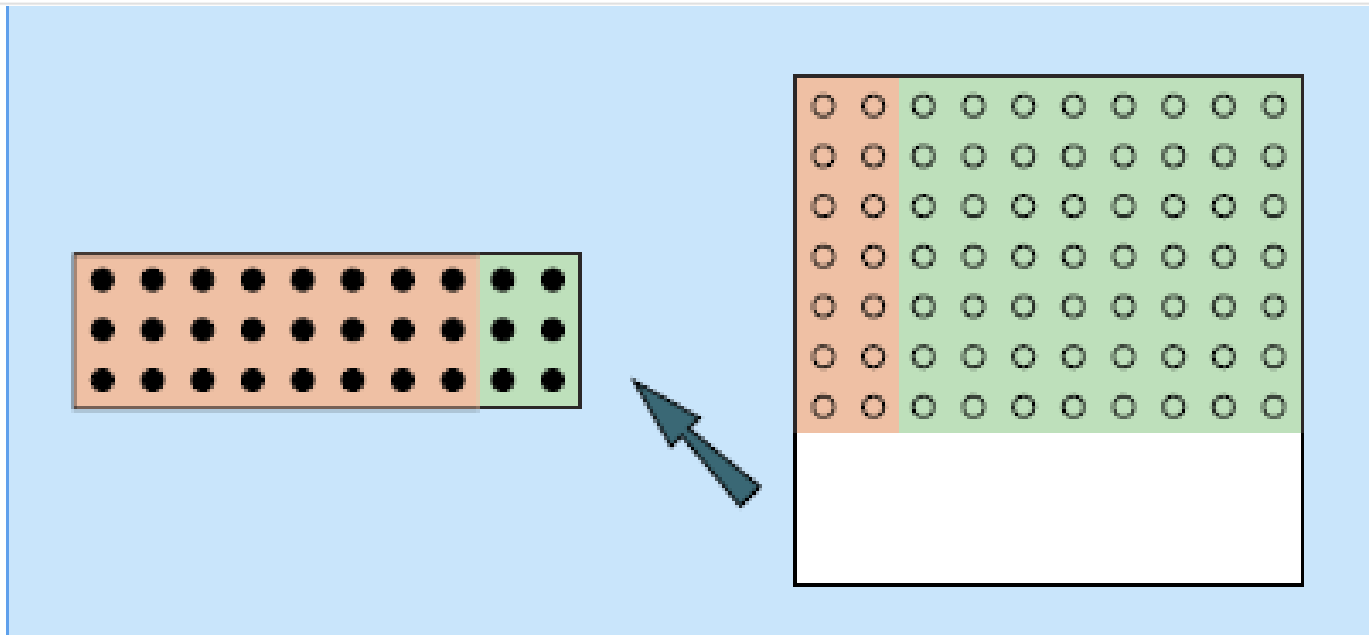
- ...is a well person
- ...is a person with a disease
- ...is a negative test result
- ...is a positive test result

and therefore....

- □ ...is a well person who tests negative (a true negative)
- □ ...is a person with a disease who tests positive (a true positive)
- □ ...is a well person who tests positive (a false positive)
- □ ...is a person with a disease who tests negative (a false negative)

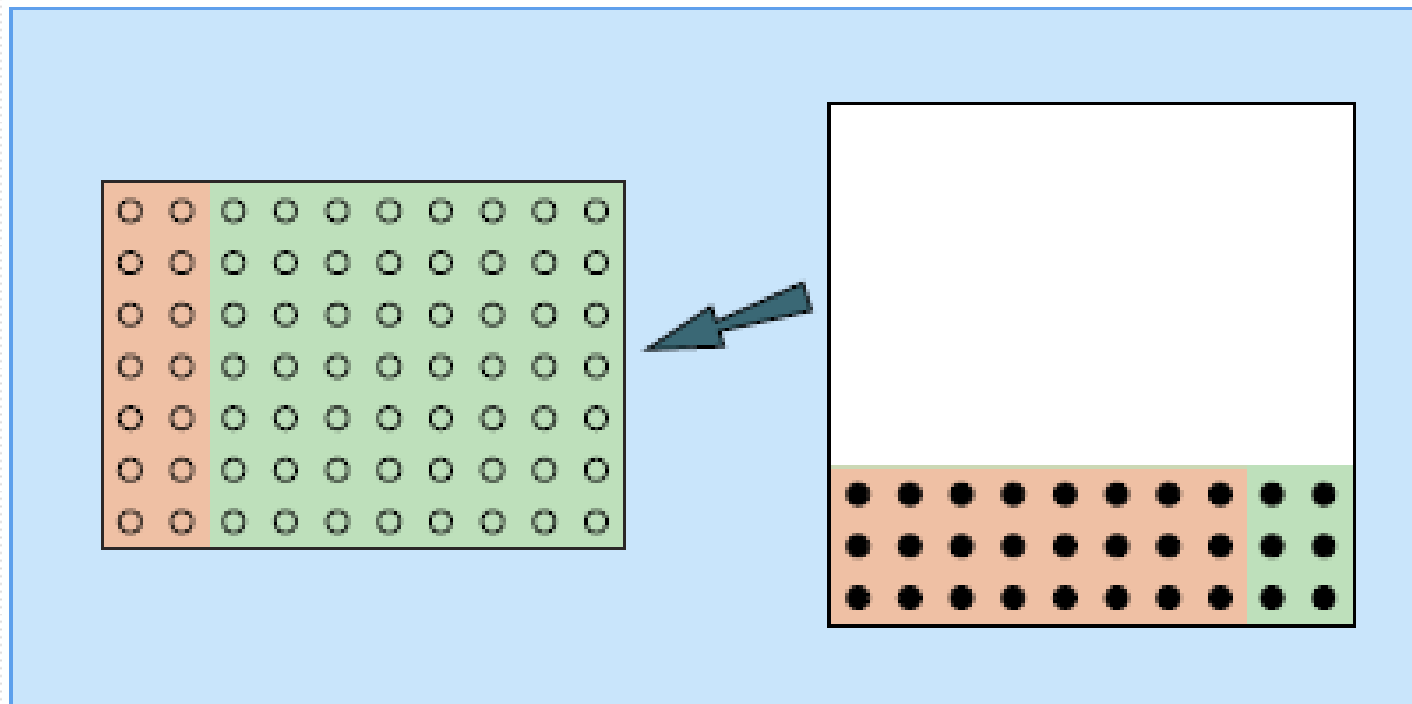


Občutljivost



$$24/30=80\%$$

Specifičnost



$$56/70 = 80\%$$

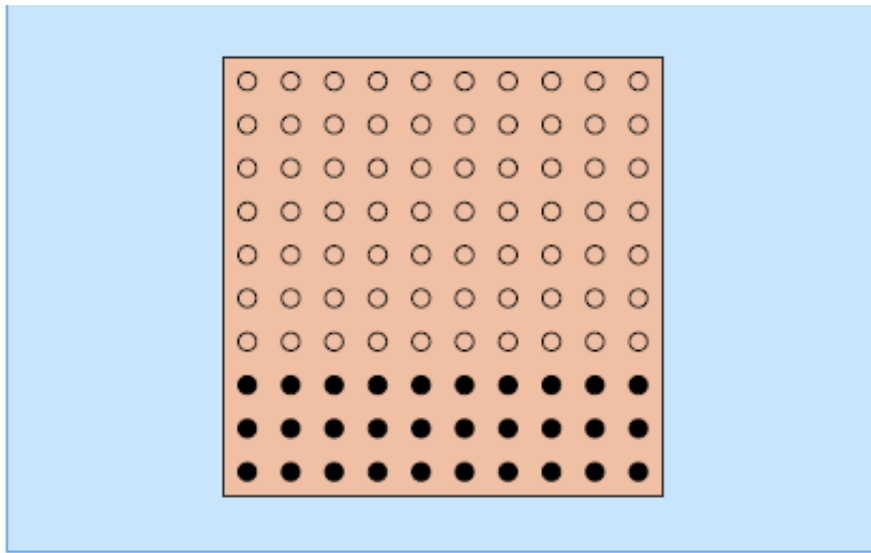


Fig 6 Test with 100% sensitivity

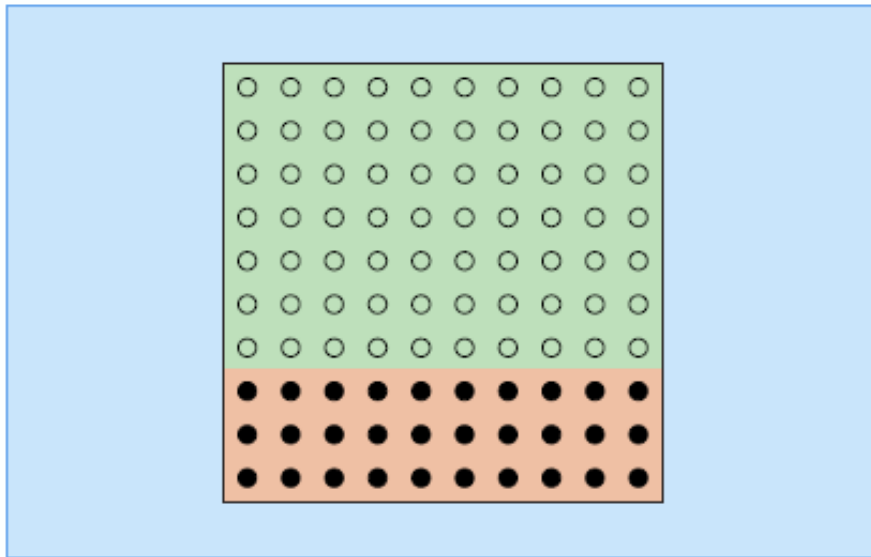
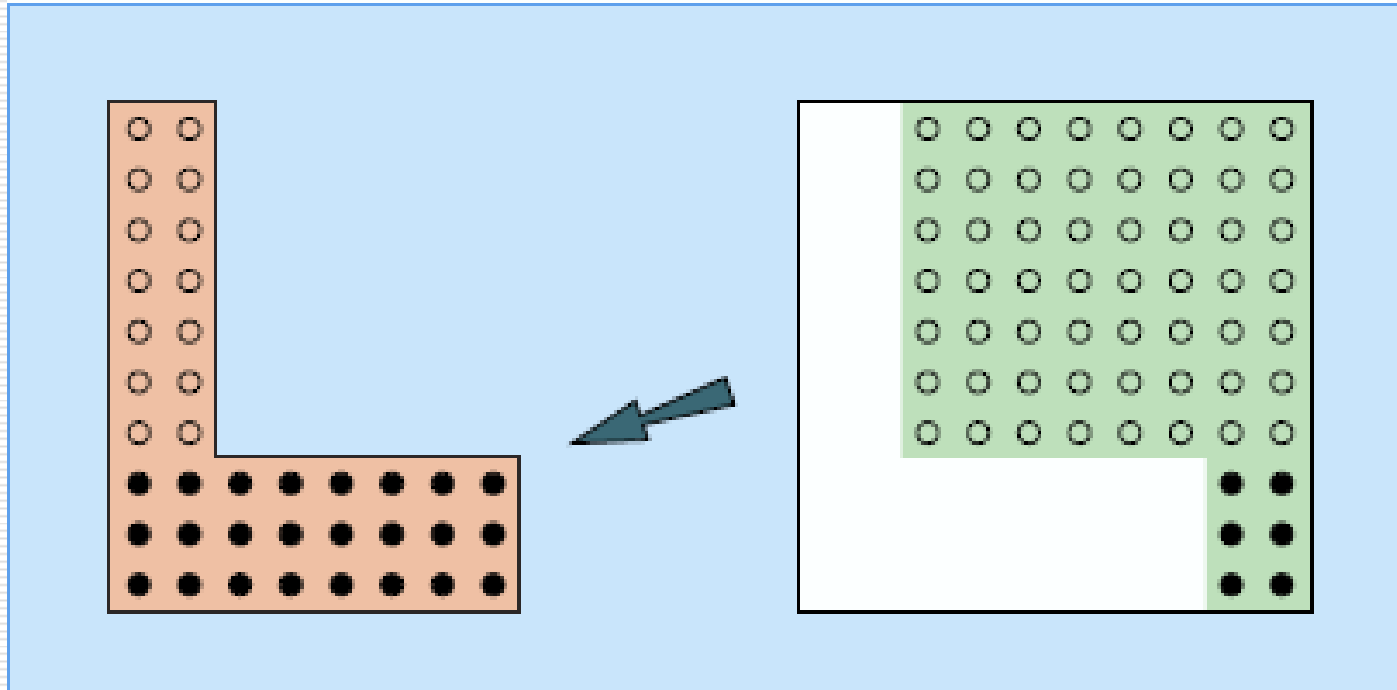


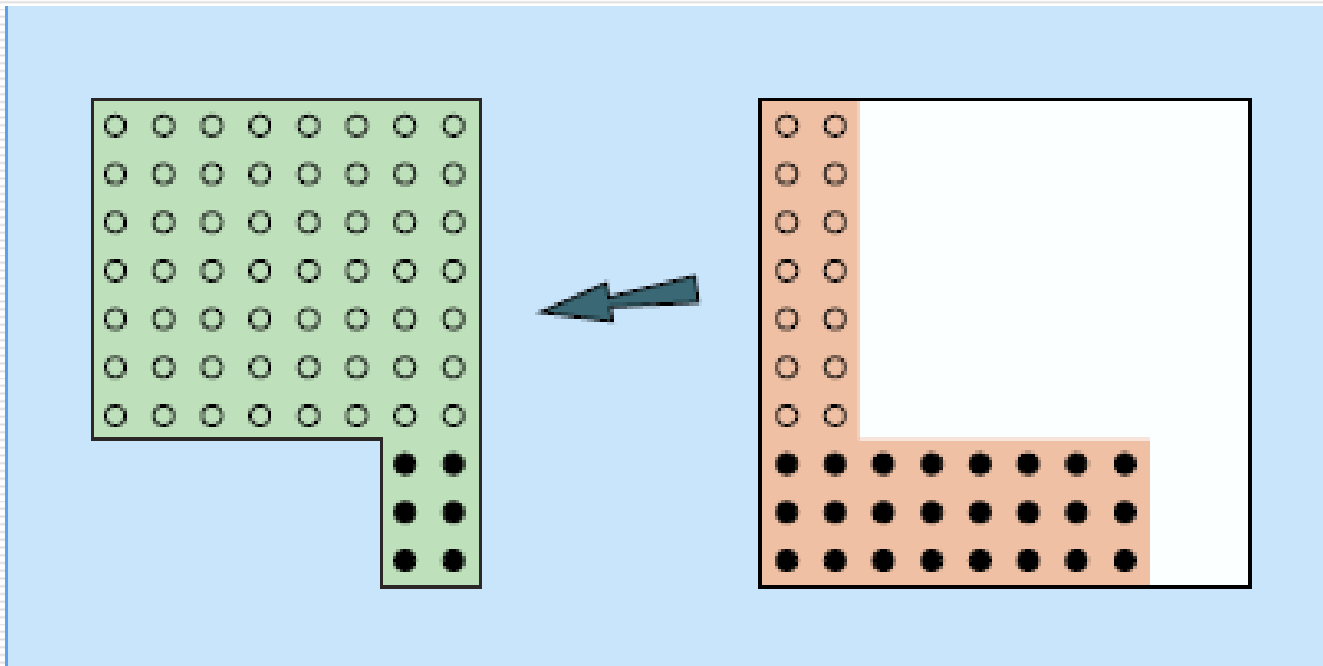
Fig 7 Perfect test

Pozitivna napovedna vrednost



$$24/38 = 63\%$$

Negativna napovedna vrednost



$$56/62 = 90\%$$

Serumska koncentracija feritina

- Diagnosticiranje anemije zaradi pomanjkanja železa temelji na serumski koncentraciji feritina. Rezultat je pozitiven, če je serumska koncentracija feritina manjša od 65 mmol/L.
- Občutljivost = $TP/(TP+FN) = 731/809 = 90,4\%$
- Specifičnost = $TN/(FP+TN) = 1500/1770 = 84,7\%$

Test	Disease		
	Positive D ⁺	Negative D ⁻	
Positive T ⁺	TP = 731	FP = 270	
Negative T ⁻	FN = 78	TN = 1500	
	809	1770	2579

Primer

57 letni pacient toži za močnimi bolečinami v križu. Bolečina se zadnjih 6 tednov stopnjuje, pojavlja se odrevenelost desne noge, nima apetita, v tem času je shujšal za 5 kg, vročine nima.

Sumimo na maligni spinalni tumor. Iz literature je znano, da je glede na opisane simptome ta verjetnost 20%.

Bolnika najprej napotite na test sedimentacije eritrocitov. Iz predhodne raziskave veste, da je občutljivost tega testa za to bolezen 78%, specifičnost pa 67%.

2×2 kontingenčna tabela

Test	Disease		Skupaj
	D ⁺	D ⁻	
T ⁺	(TP) 156	(FP) 264	420
T ⁻	(FN) 44	(TN) 536	580
Skupaj	200	800	1000

Dodaten diagnostični test magnetna resonanca

- Občutljivost 95%
 - Specifičnost 95%
-

Obet, razmerje obetov

Obet

$$O = p / (1 - p)$$

Razmerje med verjetnostjo, da se nek dogodek zgodi (p) in verjetnostjo, da se ne zgodi ($1 - p$).

Vrednost lahko interpretiramo kot **relativno verjetje**.

Razmerje obetov

$$OR = \frac{p_1 (1 - p_2)}{p_2 (1 - p_1)}$$

Razmerje med obetoma v eni in drugi skupini

Diagnostično razmerje obetov

□ DOR

Razmerje obetov pozitivnega izida testa v prisotnosti in odsotnosti bolezni.

$$\begin{aligned} DOR &= \frac{TP}{FN} / \frac{FP}{TN} = \frac{obč}{(1-obč)} / \frac{(1-spec)}{spec} = \\ &= \frac{PPV}{(1-PPV)} / \frac{(1-NPV)}{NPV} = LR(+)/LR(-) \end{aligned}$$

Diagnostični test

- LR(+) razmerje verjetja za pozitivni izid

$$\text{LR}(+) = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}} / \left(\frac{\text{FP}}{\text{FP} + \text{TN}} \right) = \frac{\text{občutljivost}}{1 - \text{specifičnost}}$$

- $\text{LR}(-) = (1 - \text{občutljivost}) / \text{specifičnost}$

Test	Disease		Skupaj
	D ⁺	D ⁻	
T ⁺	(TP) 156	(FP) 264	420
T ⁻	(FN) 44	(TN) 536	580
Skupaj	200	800	1000

Primer

Kri v blatu pri bolnikih z rakom debelega črevesja

Rezultat endoskopije

		+	-	
Kri v blatu	+	20	180	200
	-	10	1820	1830
		30	2000	2030

Občutljivost, specifičnost, PNV, NNV, LR+, LR-

Obeti

□ P pred testom

□ Obet pred testom

$$O_{\text{pred}} = p_{\text{pred}} / (1 - p_{\text{pred}})$$

□ Obet po testu

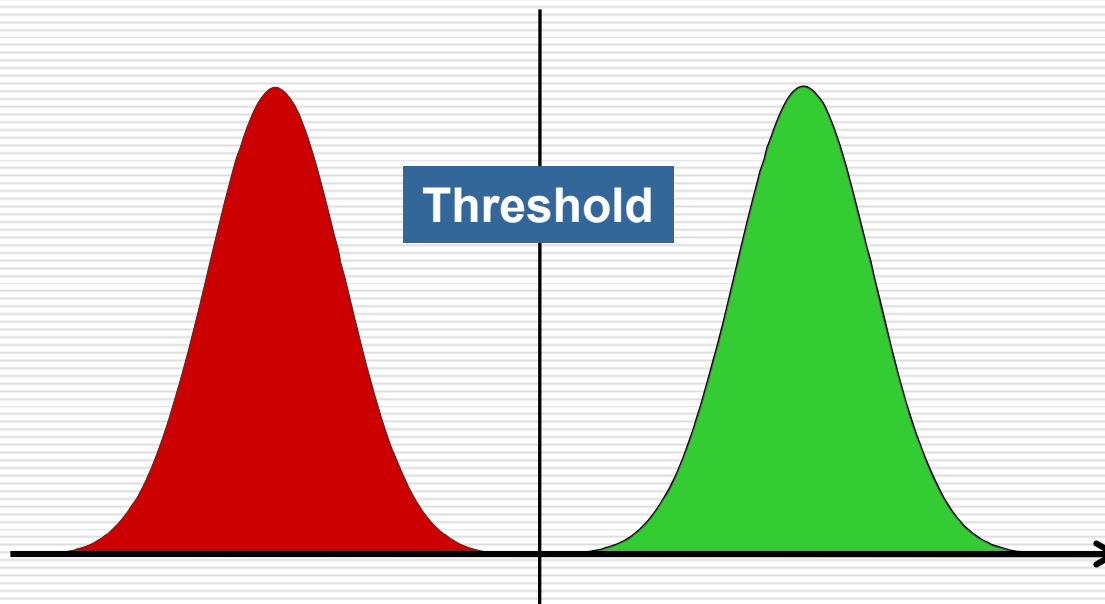
$$O_{\text{po}} = O_{\text{pred}} * LR(+)$$

□ P po testu

$$p_{\text{po}} = O_{\text{po}} / (O_{\text{po}} + 1)$$

Zdravi

Bolni

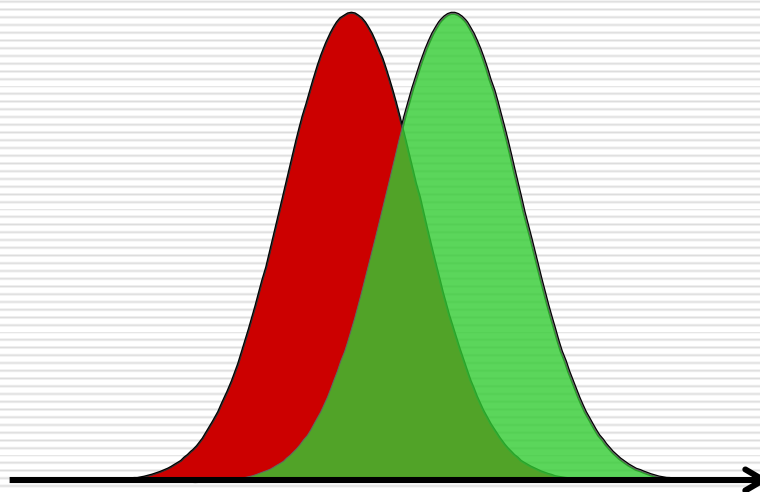


Vrednost diagnostičnega parametra
ali
Subjektivna ocena verjetja bolezn

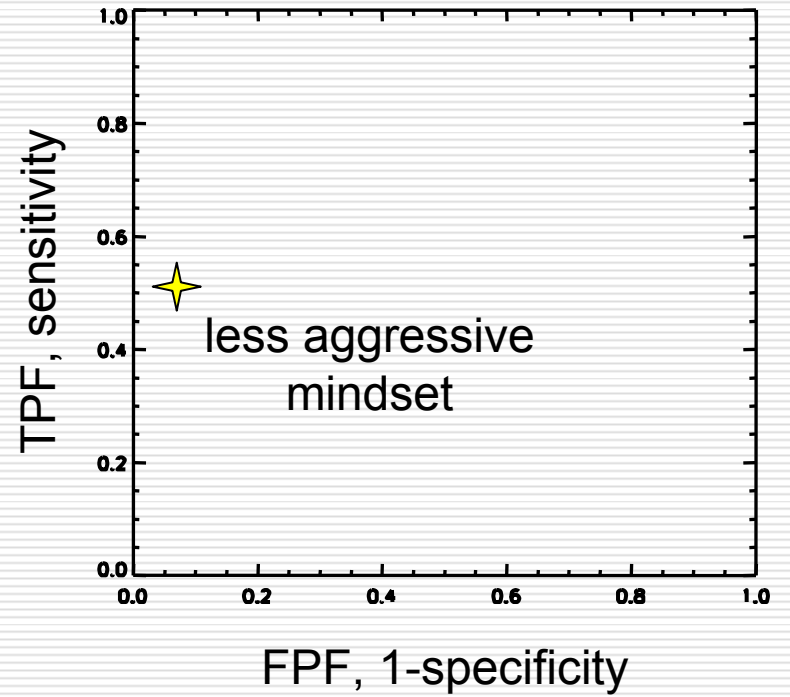
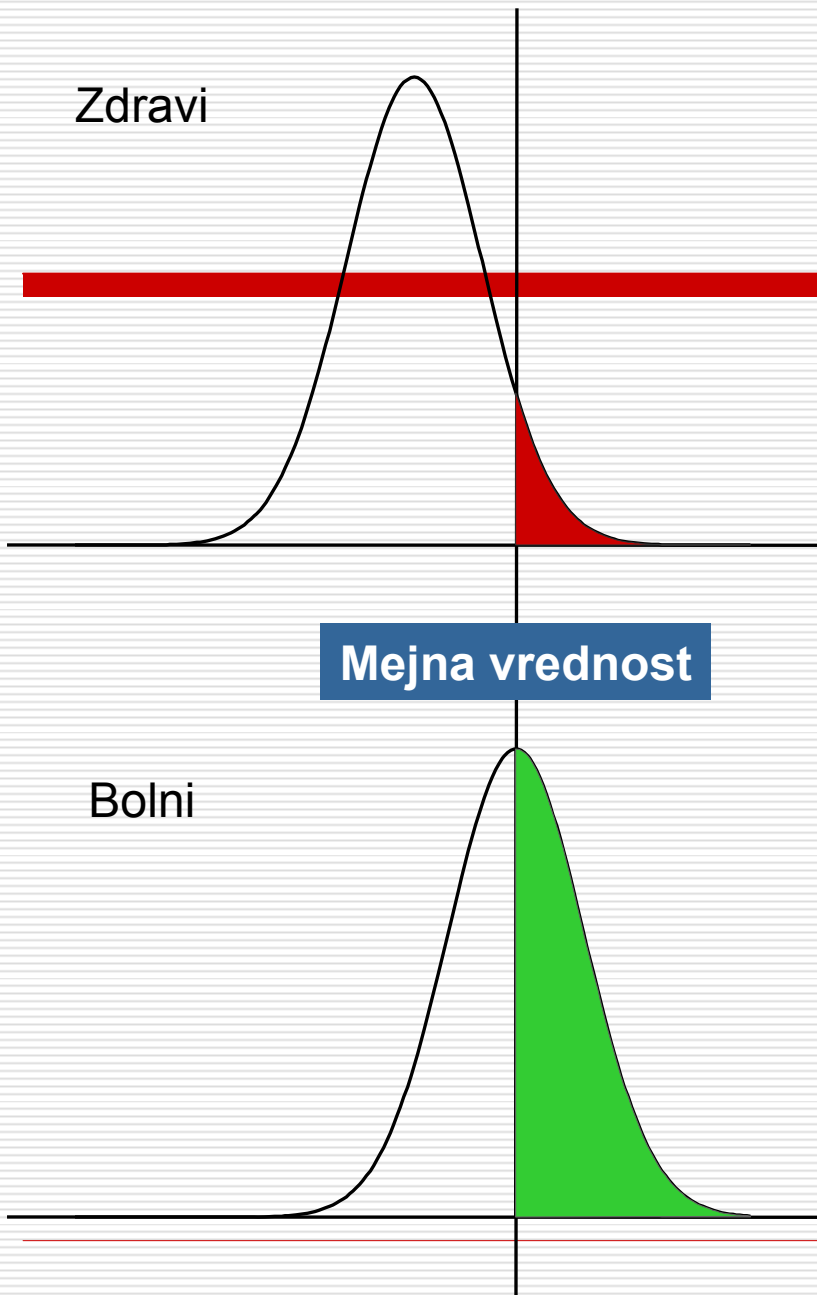
Zdravi

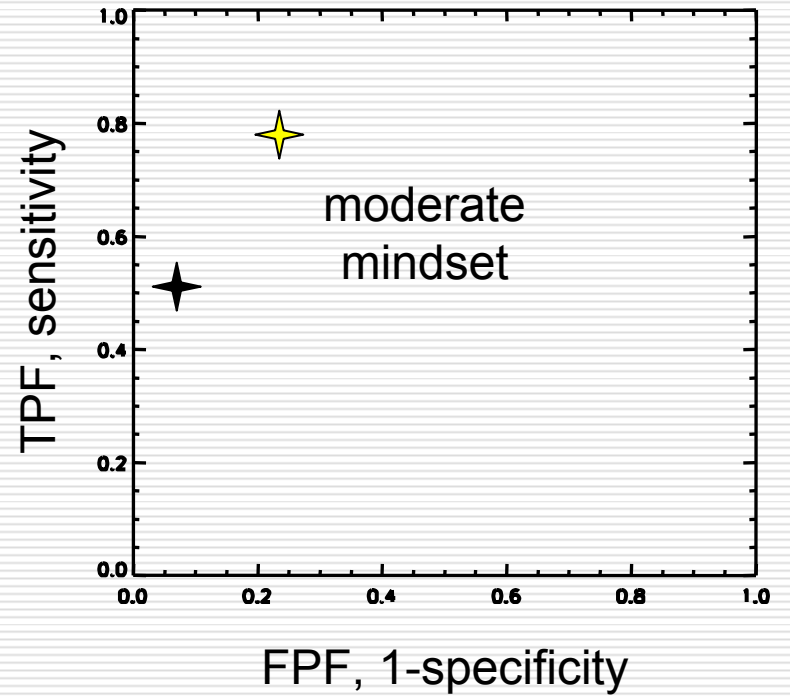
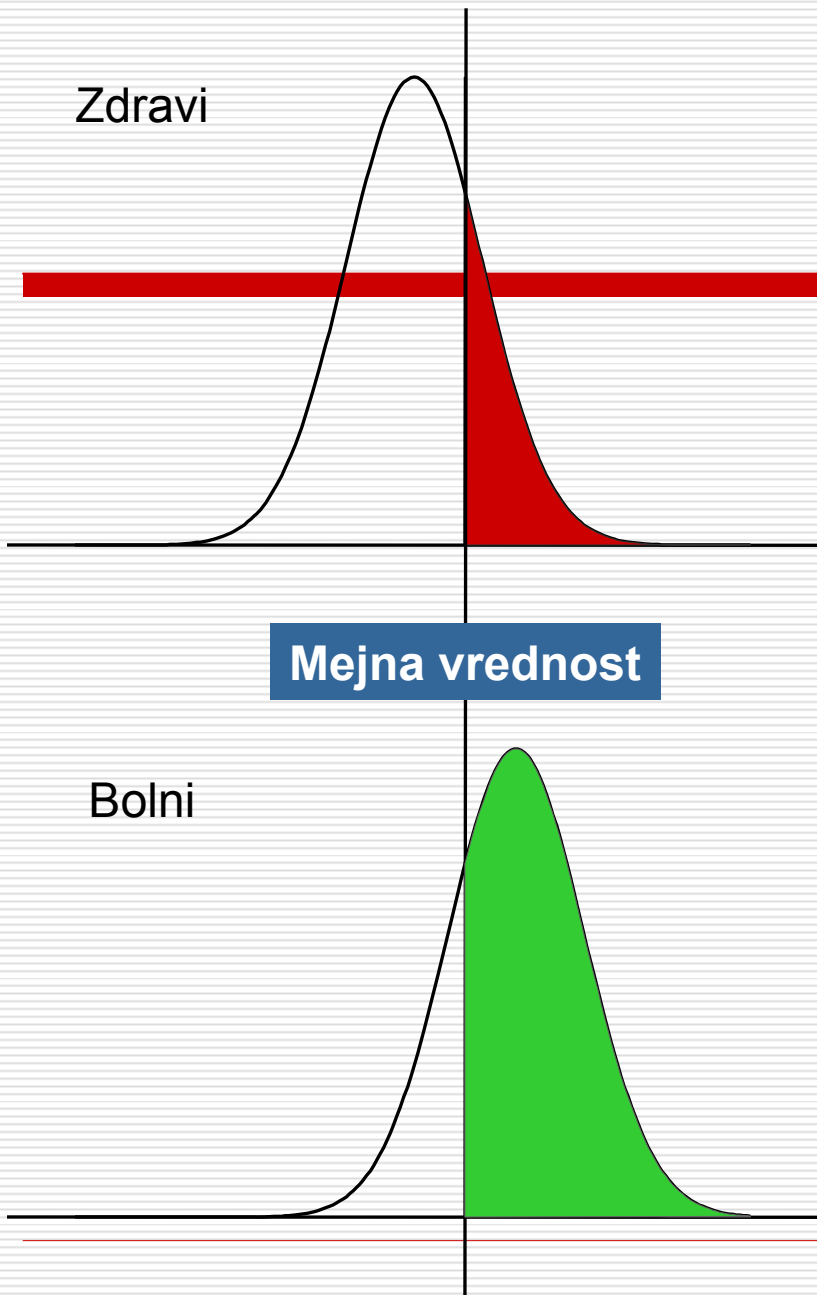
Bolni

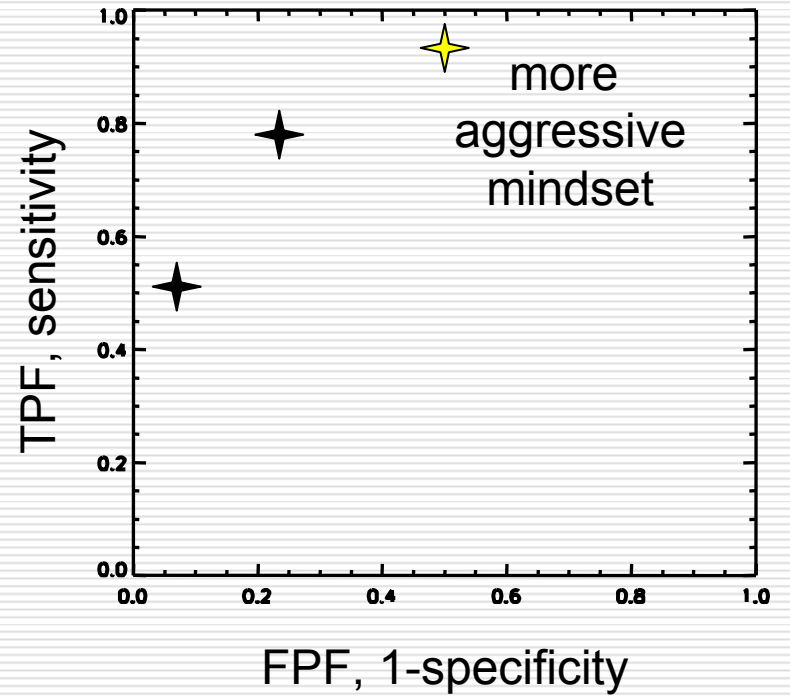
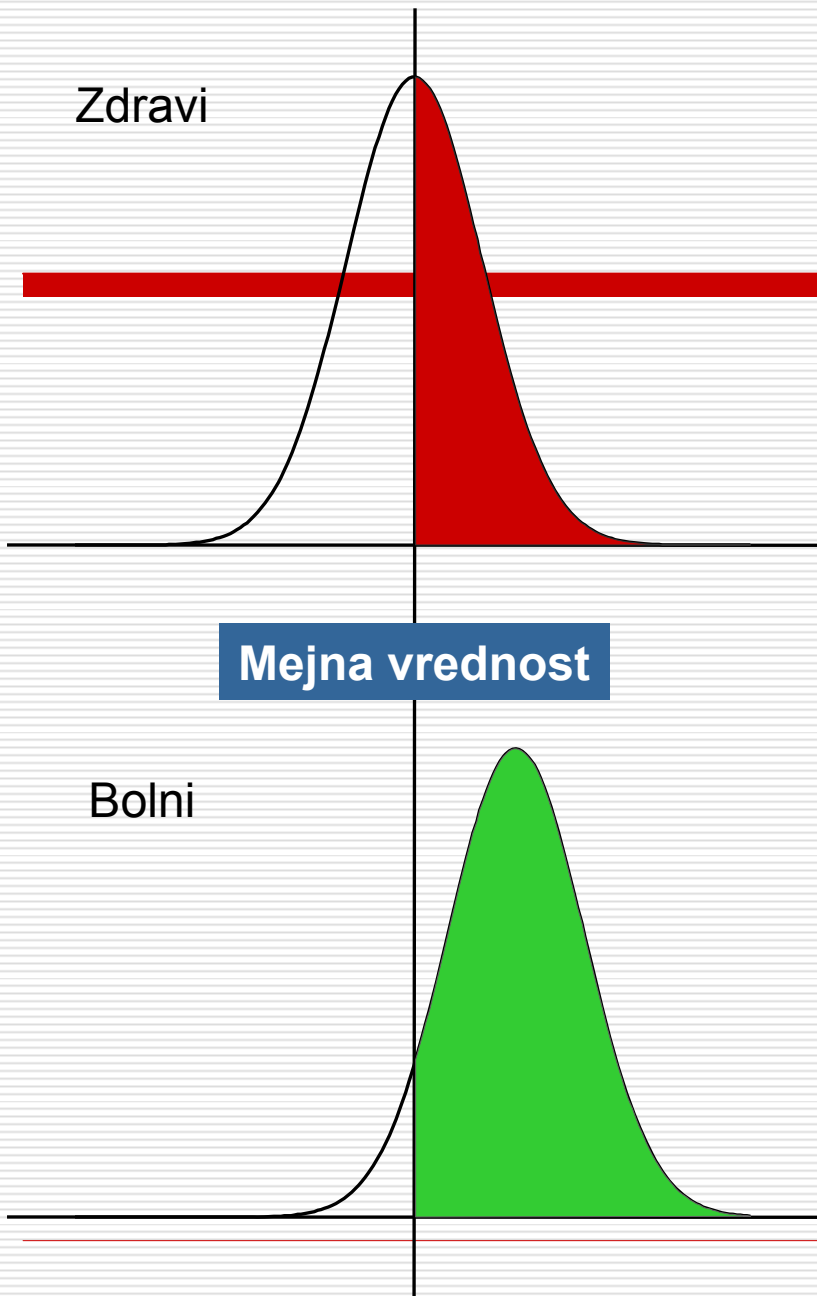
Običajneje:

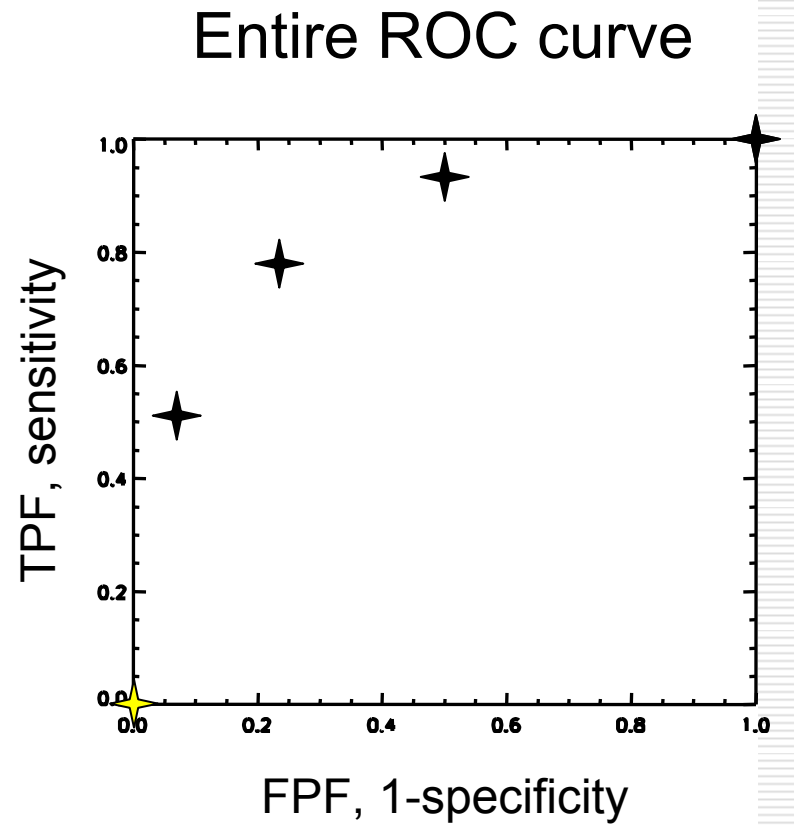
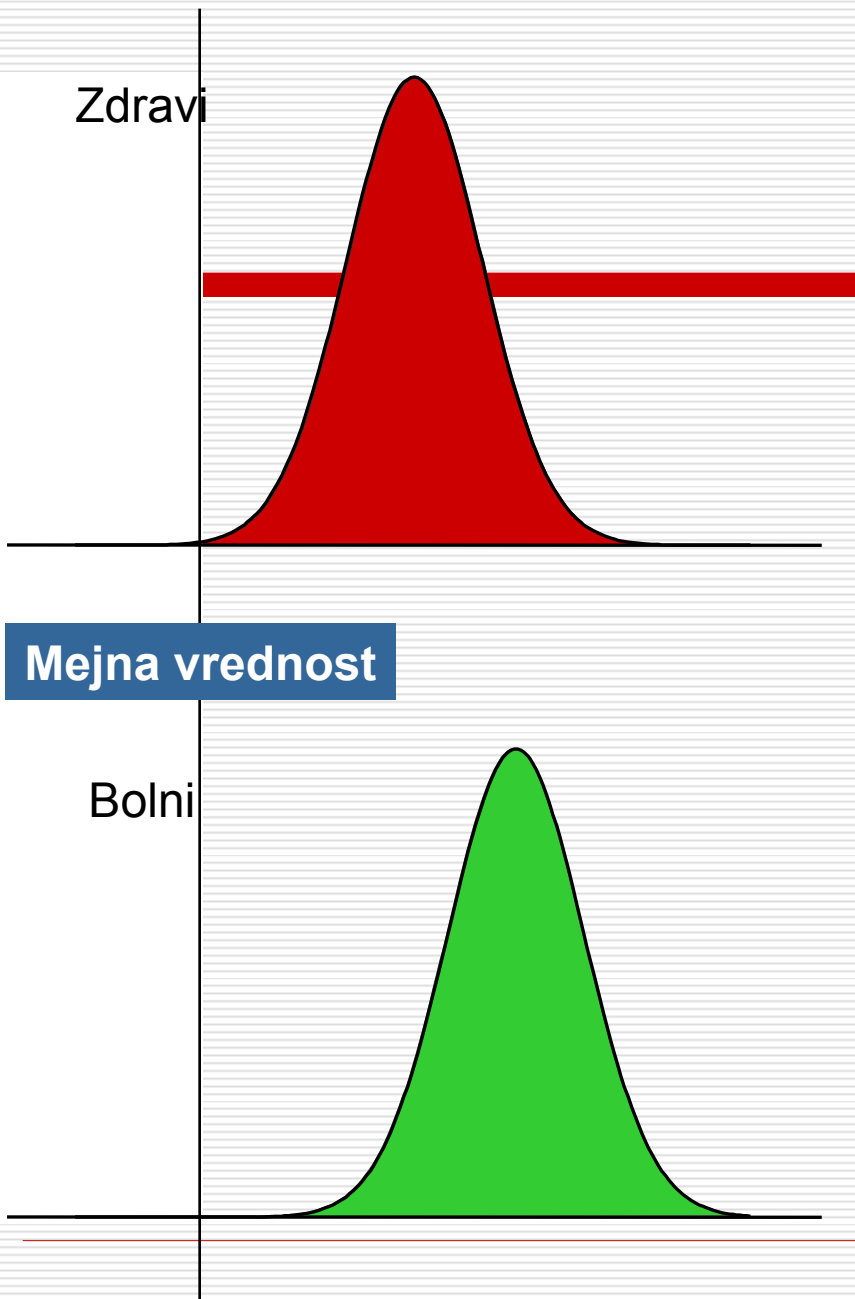


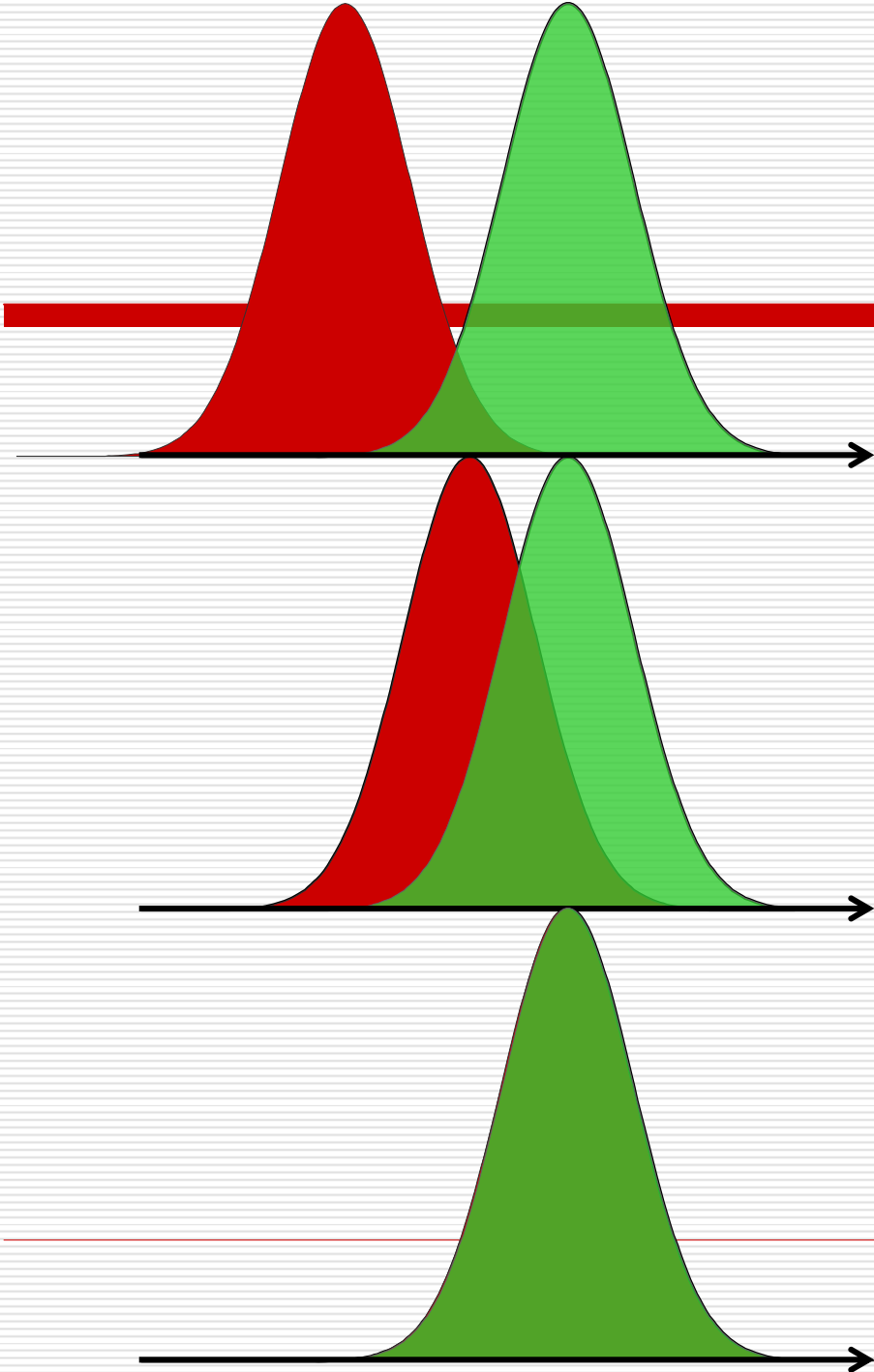
Vrednost diagnostičnega parametra
ali
Subjektivna ocena verjetja bolezn



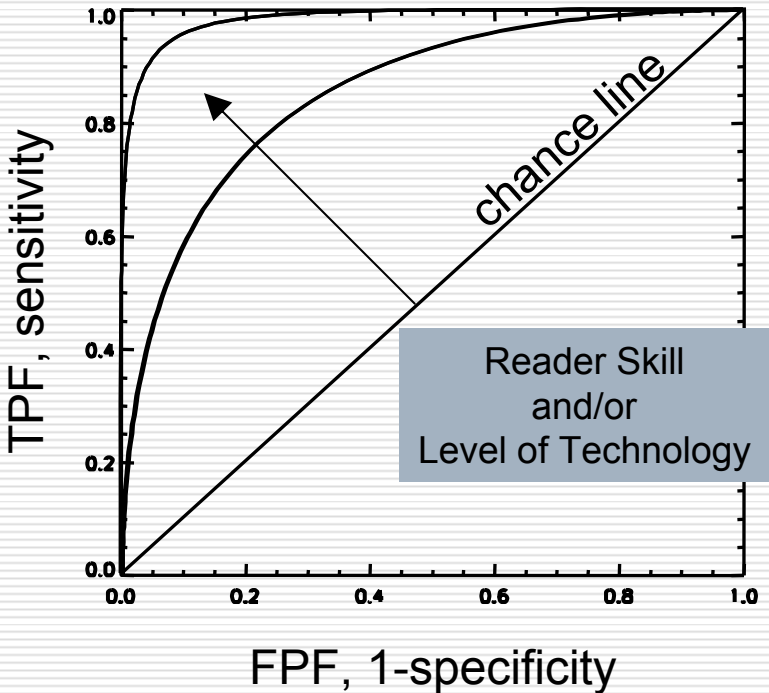








Entire ROC curve



ROC

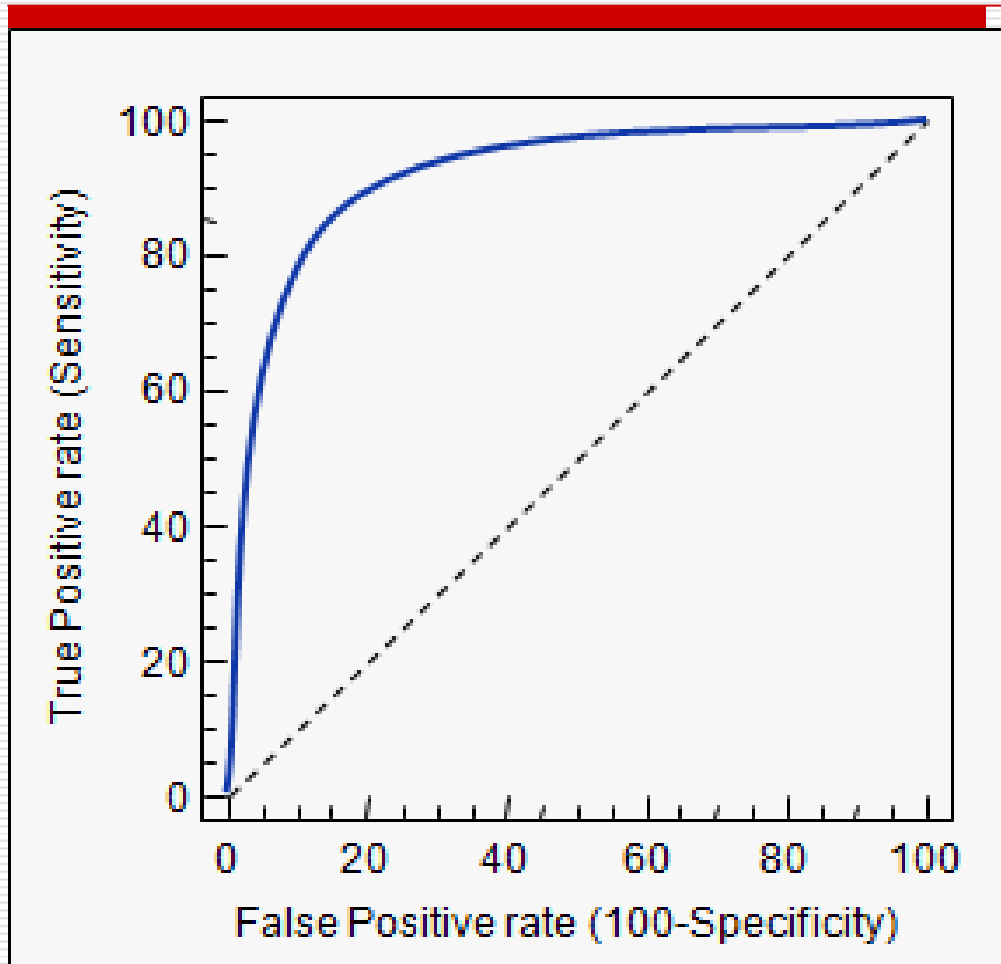
Receiver Operating Characteristic
(historično ime iz raziskav z radarjem)

Relative Operating Characteristic

Operating Characteristic

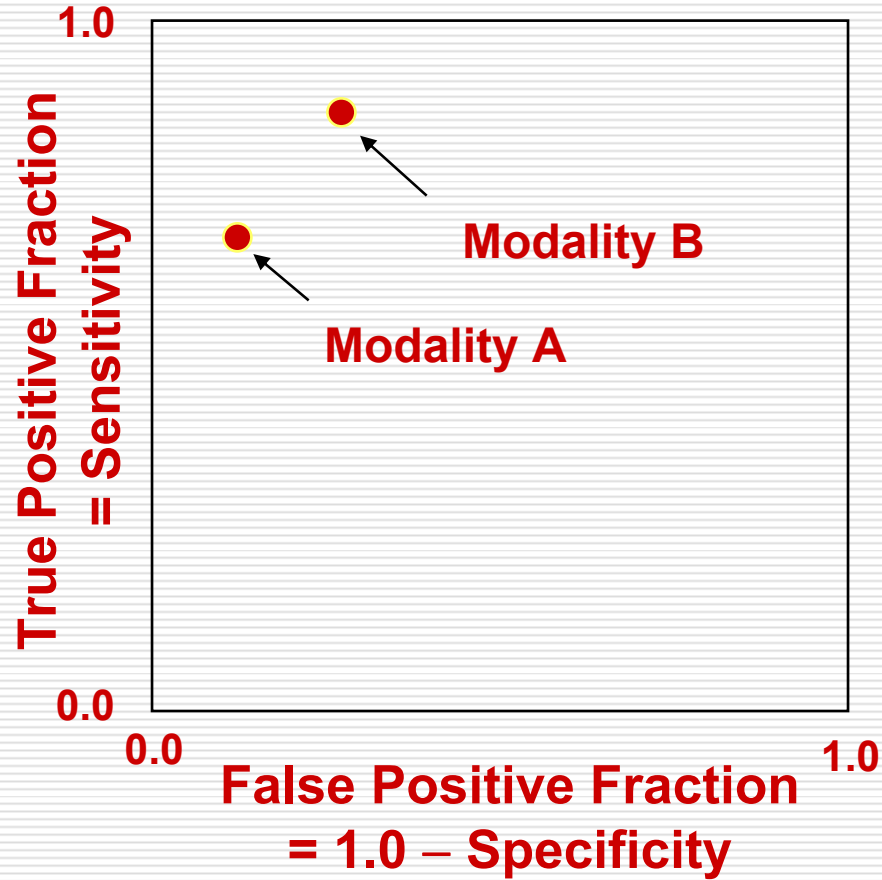
ROC

(Relative operating characteristics)

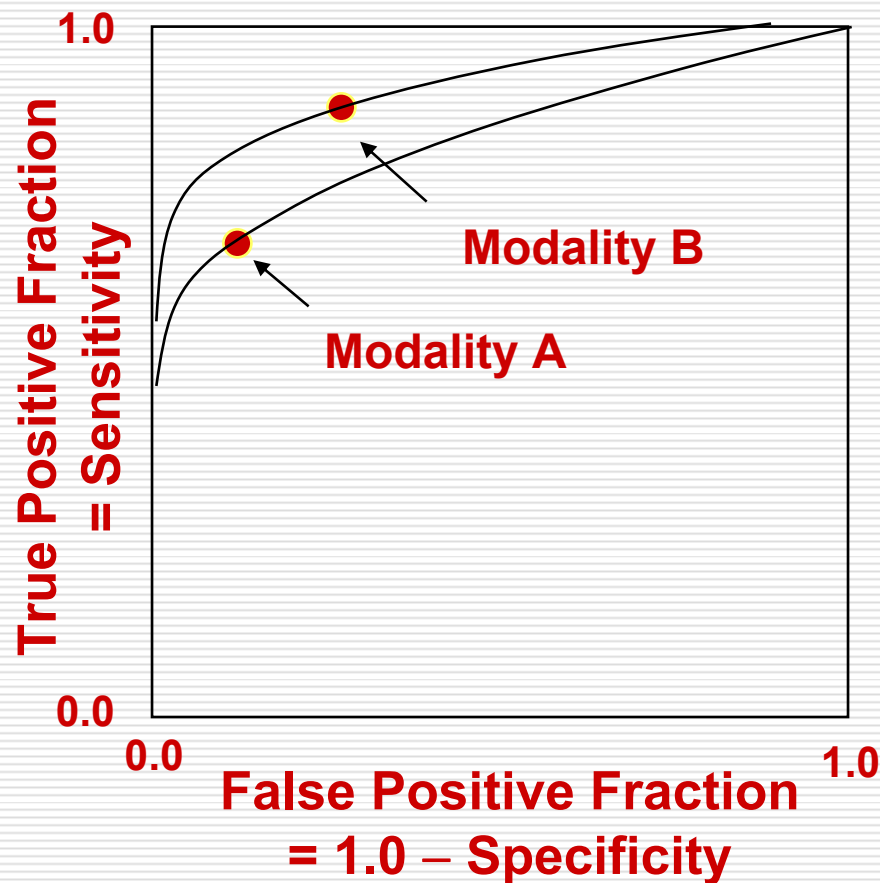


Nekaj ROC krivulj . . .

Kateri diagnostični test je boljši?



Za odgovor moramo poznati ROC krivulji (prva možnost):

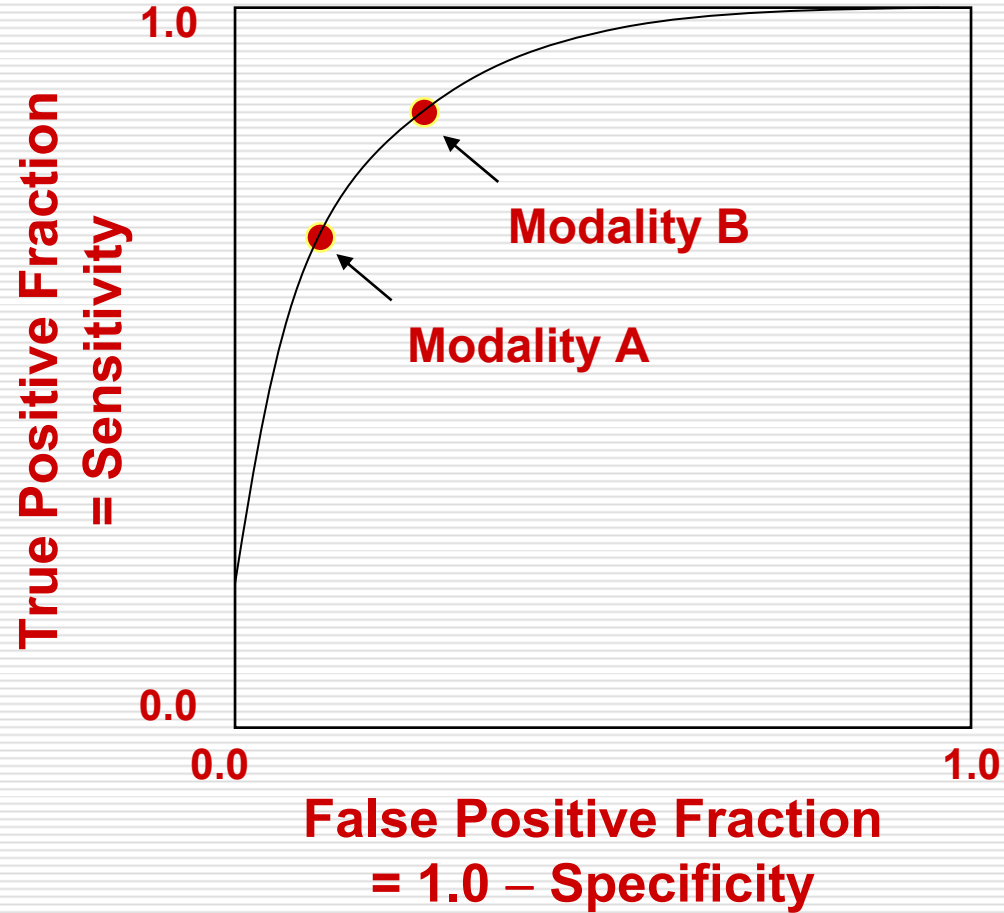


B je boljši:

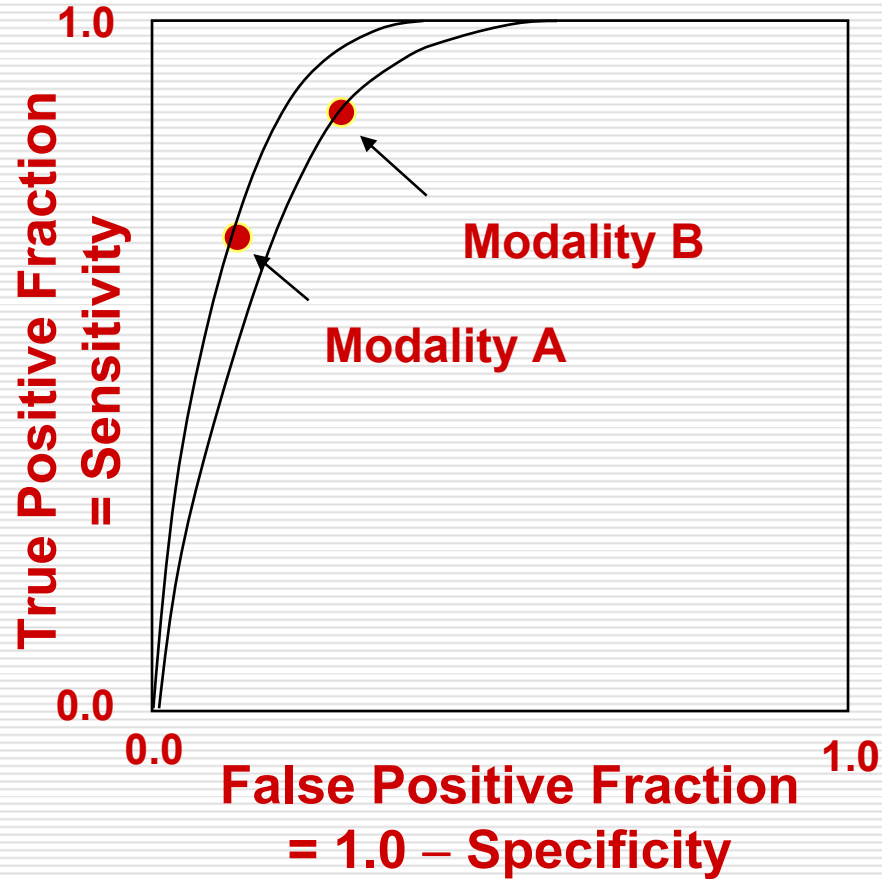
večji TPF pri
istem FPF, ali

manjši FPF pri
istem TPF

Druga možnost: Ista ROC



... In še tretja:

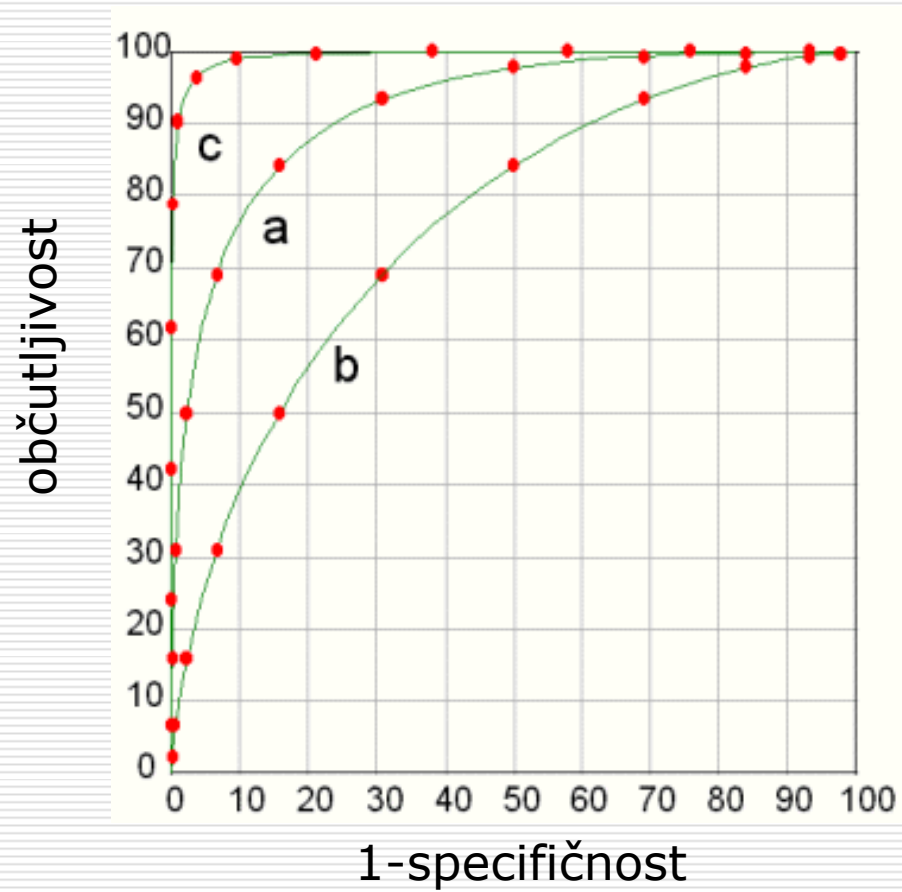


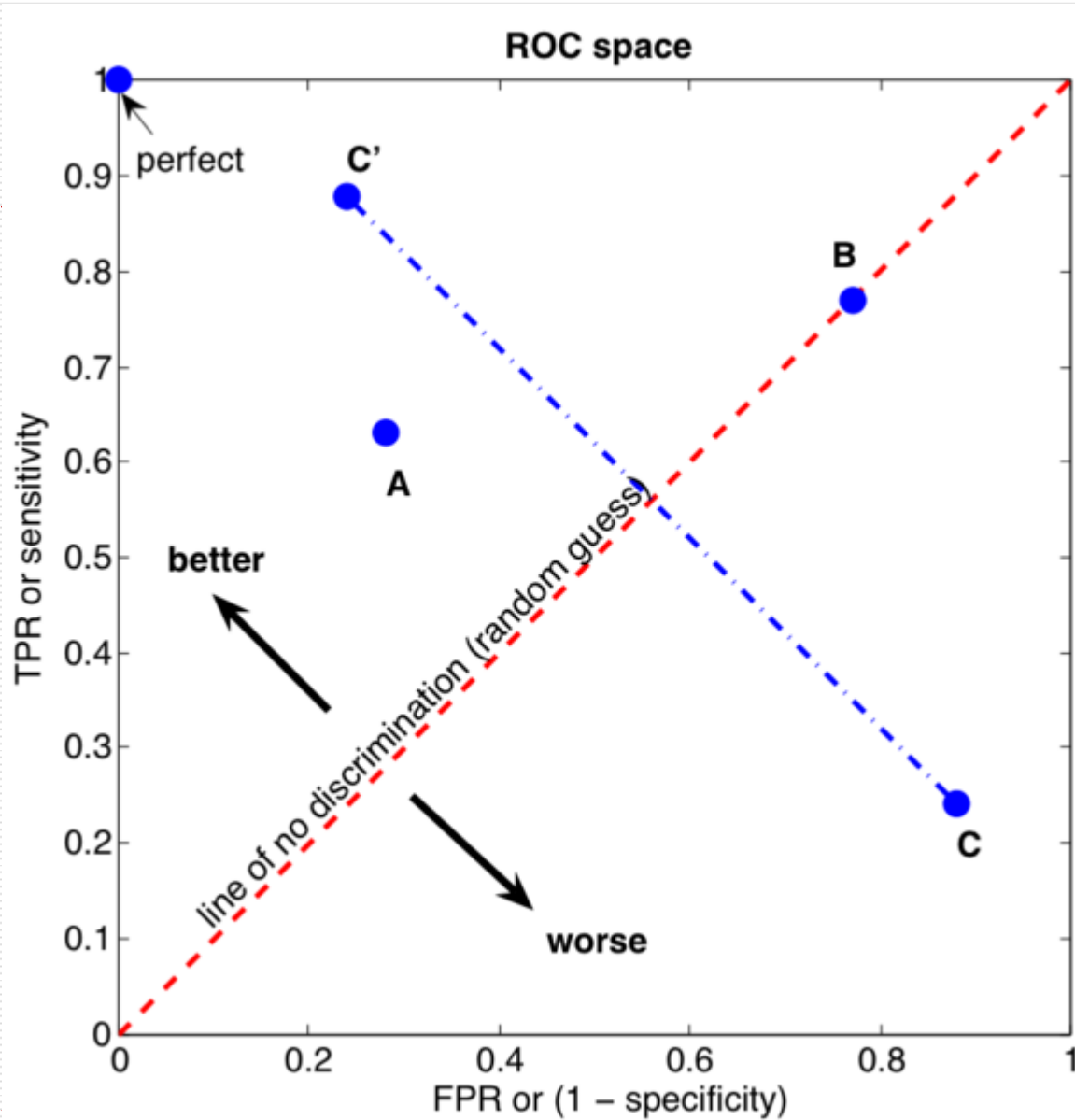
A je boljši:

večji TPF pri istem FPF, ali

manjši FPF pri istem TPF

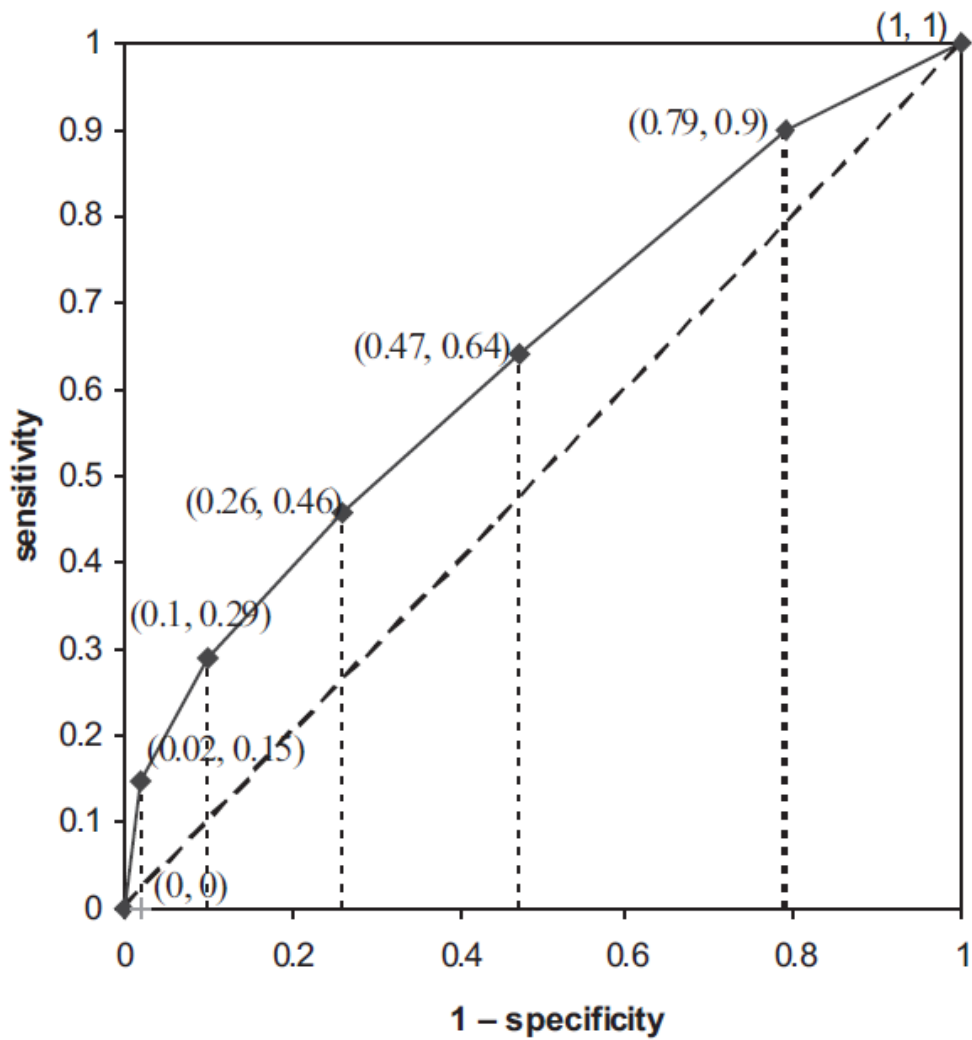
ROC





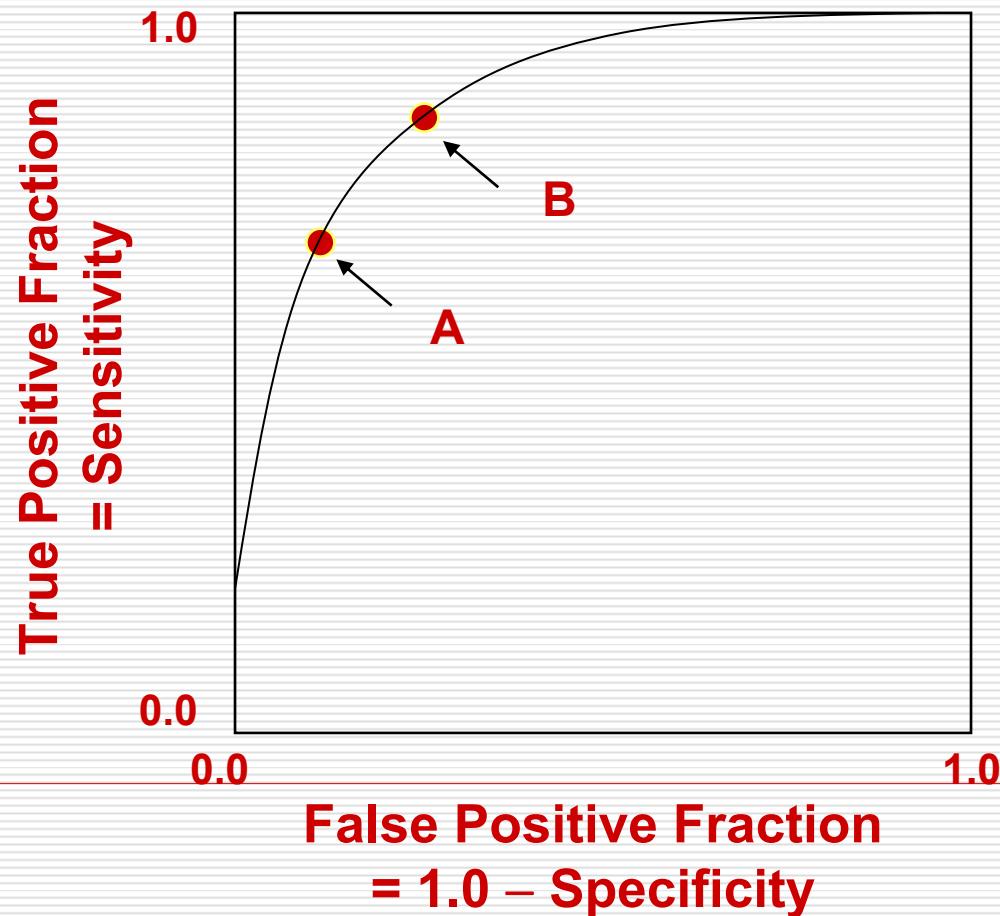
AUROC
Površina pod ROC

AUROC



Youdenov indeks

□ $J = \text{občutljivost} + \text{specifičnost} - 1$



Tiroksin in hipotiroidizem

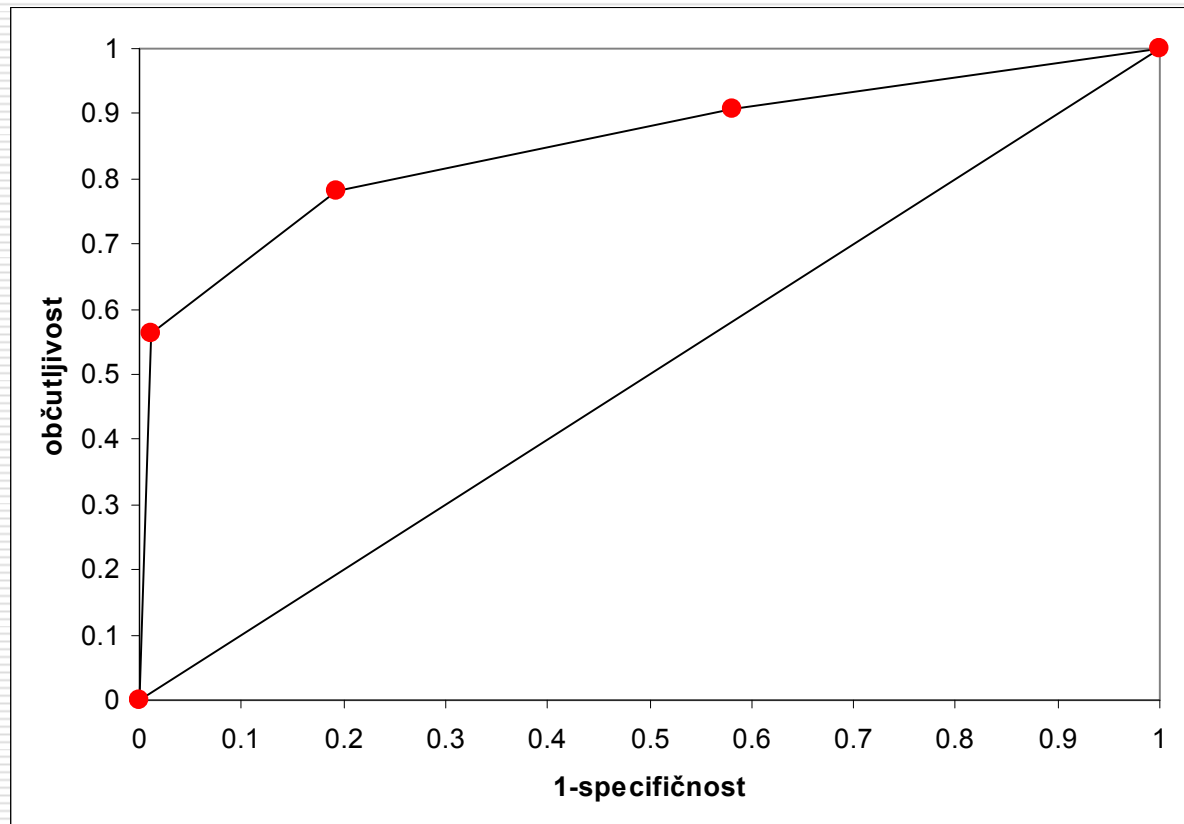
V preglednici so podani rezultati klinične diagnostike in laboratorijske analize tiroksina pri 125 bolnikih s sumom na hipotiroidizem.

Koncentracija T4 (ng/mL)	Hipotiroidizem	
	DA	NE
≤ 5	18	1
5,1 do 7,0	7	17
7,1 do 9,0	4	36
> 9	3	39

Kakšni sta specifičnost in občutljivost laboratorijskega testa za hipotiroidizem pri mejnih koncentracijah T4 5.0, 7.0 in 9.0 ng/mL?

Skiciraj ROC diagram!

ROC



Tiroksin in hipotiroidizem

Z uporabo Bayesove formule izračunaj kakšna je pri naključno izbranem pacientu verjetnost hipotiroidizma, če je izid testa pozitiven in kot mejno vrednost izberemo 5.0, 7.0 in 9.0 ng/mL. Pri tem upoštevaj epidemiološke podatke, ki kažejo, da ima hipotiroidizem 0.25% prebivalcev?

-
- PNV se s povečevanjem prevalence povečuje.
 - PNV je odvisna od občutljivosti in specifičnosti diagnostičnega testa.
-