

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*



Katedra za metalne konstrukcije

JEKLENE KONSTRUKCIJE I

9.0 TLAČENE PALICE

prof. dr. Darko Beg
Sodelavec: Blaž Čermelj

9.1 Tlačene palice

Realne palice niso nikoli:

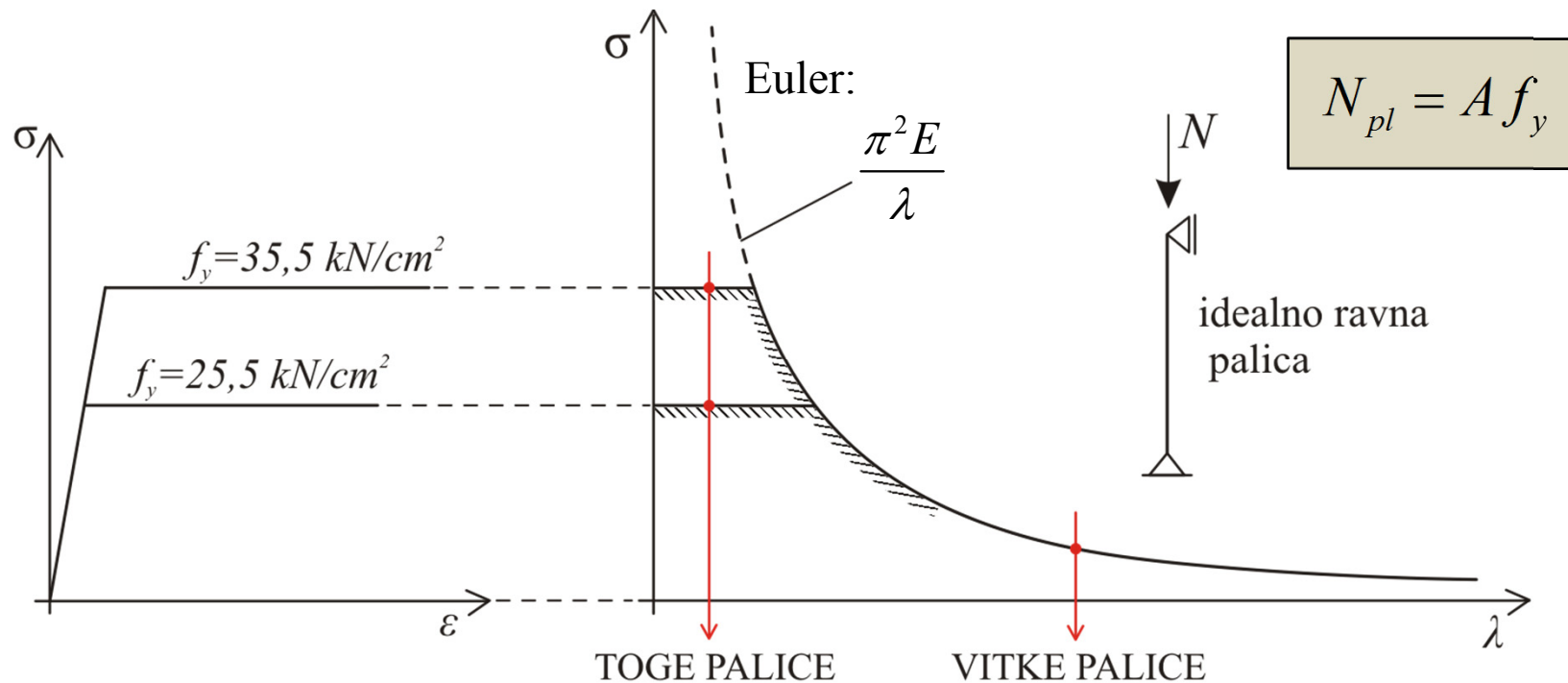
- ❑ Idealno ravne → so geometrijsko nepopolne.
- ❑ Idealno elastične → jeklene palice so elastoplastične.
- ❑ Prisotne so zaostale napetosti (posledica načina izdelave in obdelave).

**ZNIŽANA
MEJNA
NOSILNOST**

Zato Eulerjeva kritična sila $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_u^2}$ **ne predstavlja realne nosilnosti.**

□ VPLIV ELASTO-PLASTIČNEGA MATERIALA

Fizikalno je nosilnost tlačnih palic omejena s polnoplastično nosilnostjo.



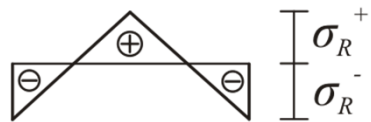
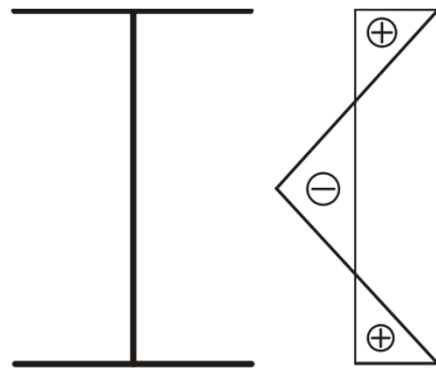
Napetost tečenja f_y vpliva na nosilnost le pri **togih palicah z majhno vitkostjo**, pri **vitkih** pa **ne**. Za te je merodajna elastična uklonska nosilnost.

□ VPLIV ZAOSTALIH NAPETOSTI

Zaostale napetosti so v notranjem ravnotežju:

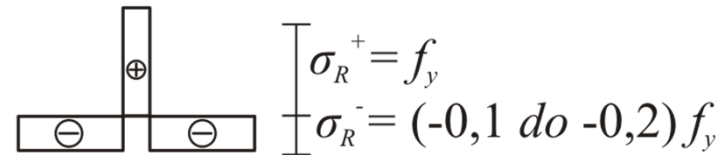
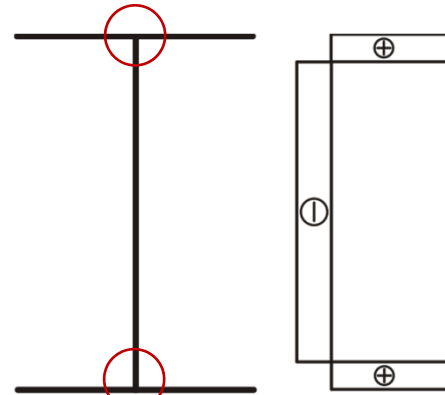
$$\int \sigma_R dA = 0.$$

VALJANI



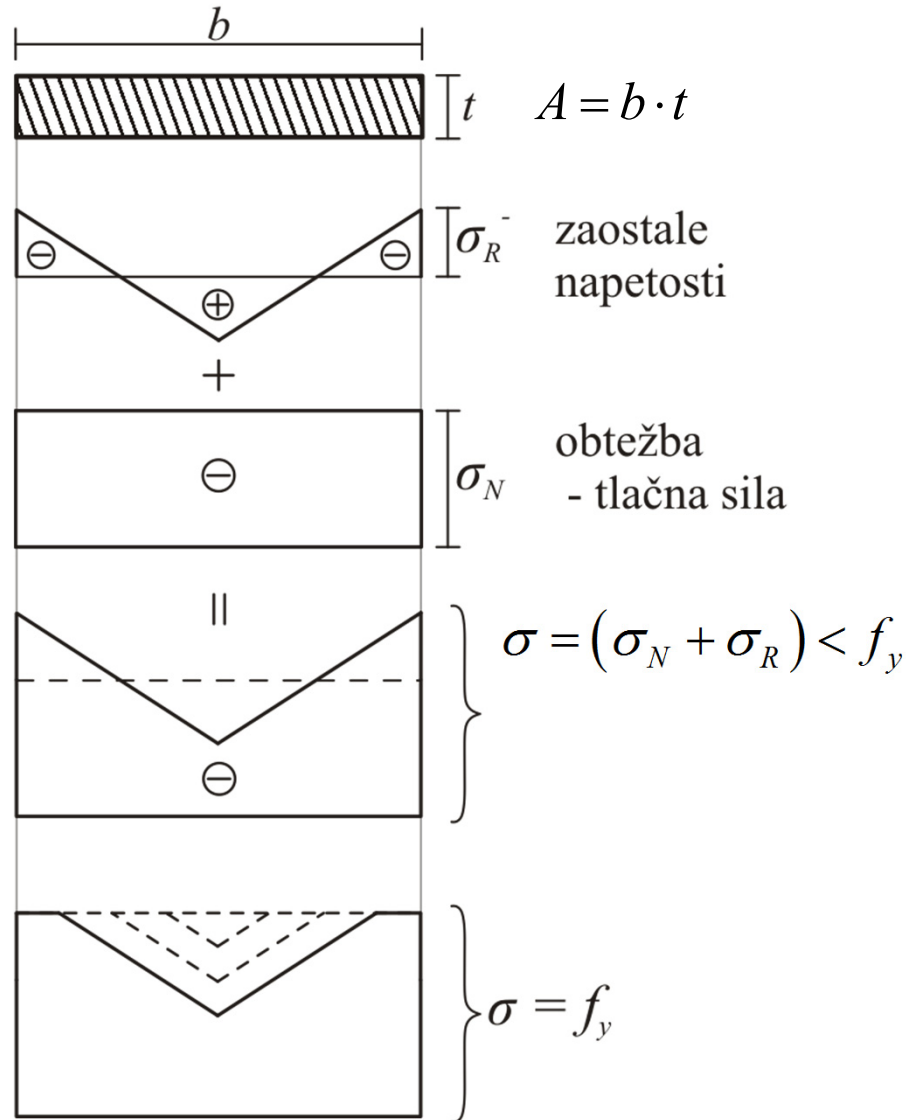
$$|\sigma_R^+| \approx |\sigma_R^-| \approx 0,3 f_y$$

VARJENI



Visok nivo nateznih zaostalih napetosti v okolici zvara.

Vpliv zaostalih napetosti na uklonsko nosilnost (pasnica vroče valjanega I profila).

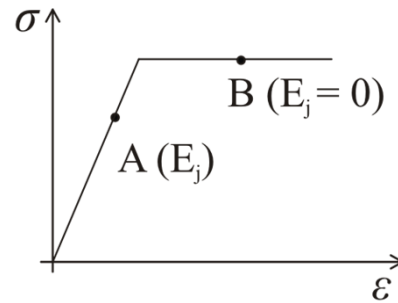
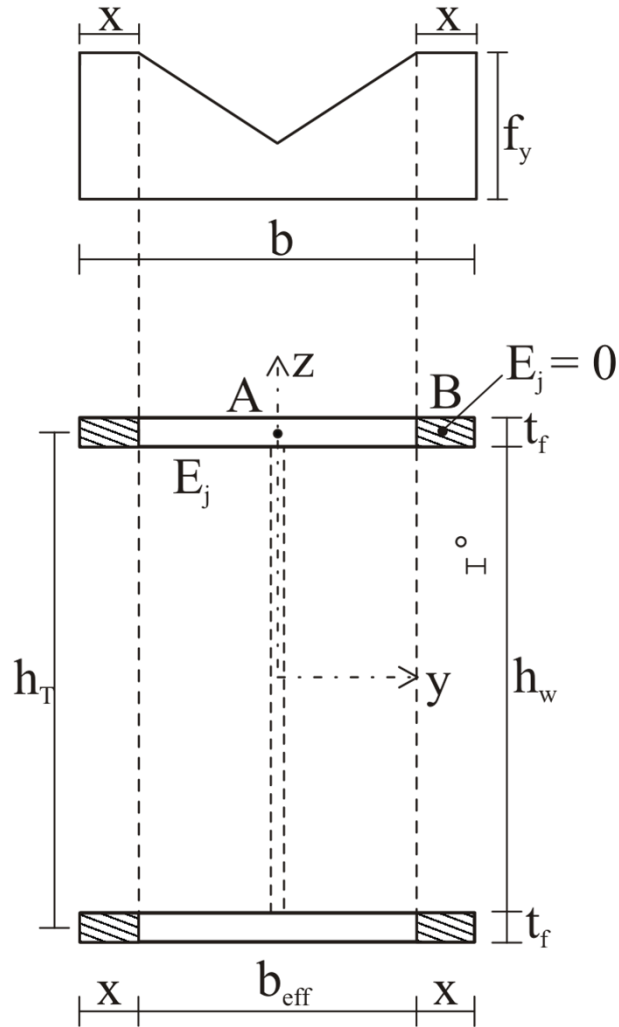


Pri $\sigma = f_y$ se prične zunanji rob plastificirati, in to pri obtežbi, ki je manjša od $N = A \cdot f_y$.

Neugodno: zunanji rob se plastificira najprej – vpliv razporeda zaostalih napetosti.

Pri povečevanju obtežbe se cona plastifikacije širi v notranjost prereza.

Vpliv zaostalih napetosti



$$N_{cr,eff} = \frac{\pi^2 (EI)_{eff}}{l_u^2}$$

MOČNA OS:

$$(EI)_y = E \frac{b t h_T^2}{2} \quad (EI)_{y,eff} = E \frac{(b - 2x) t h_T^2}{2}$$

$$\frac{(EI)_{y,eff}}{(EI)_y} = \frac{b - 2x}{b}$$

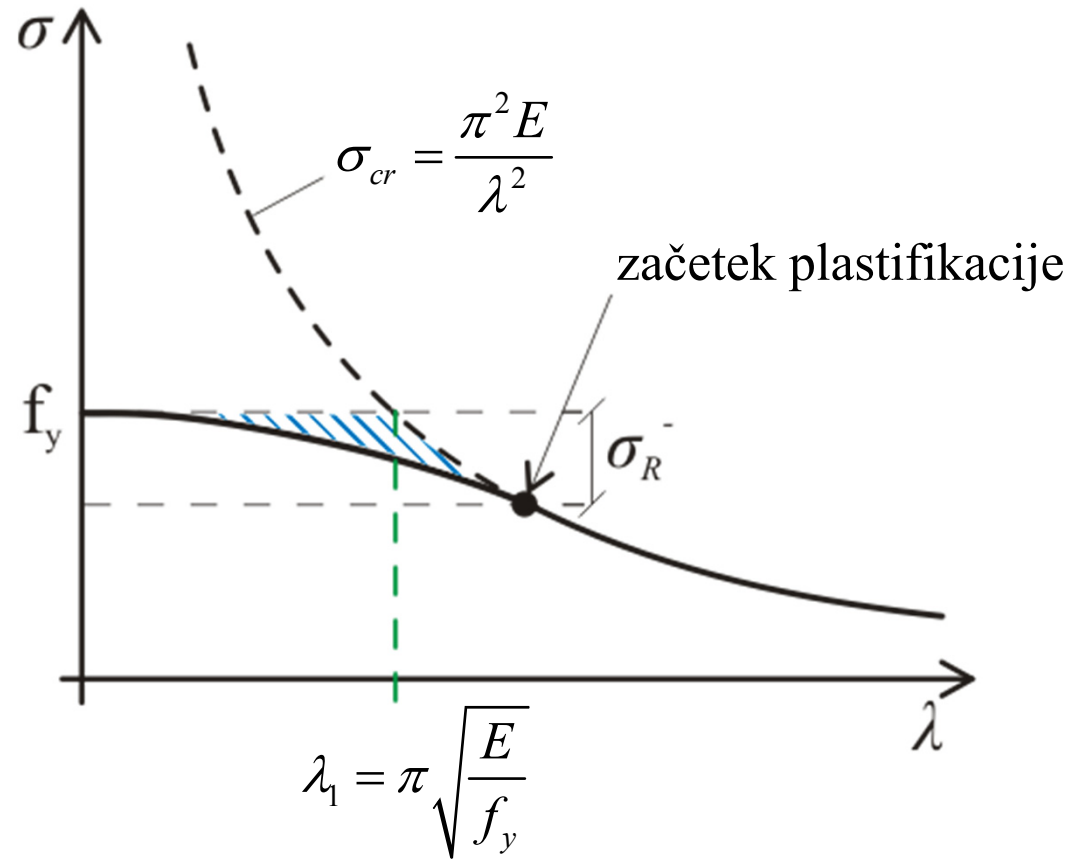
ŠIBKA OS:

$$(EI)_z = E \frac{2b^3 t}{12} \quad (EI)_{z,eff} = E \frac{2(b - 2x)^3 t}{12}$$

$$\frac{(EI)_{z,eff}}{(EI)_z} = \frac{(b - 2x)^3}{b^3}$$

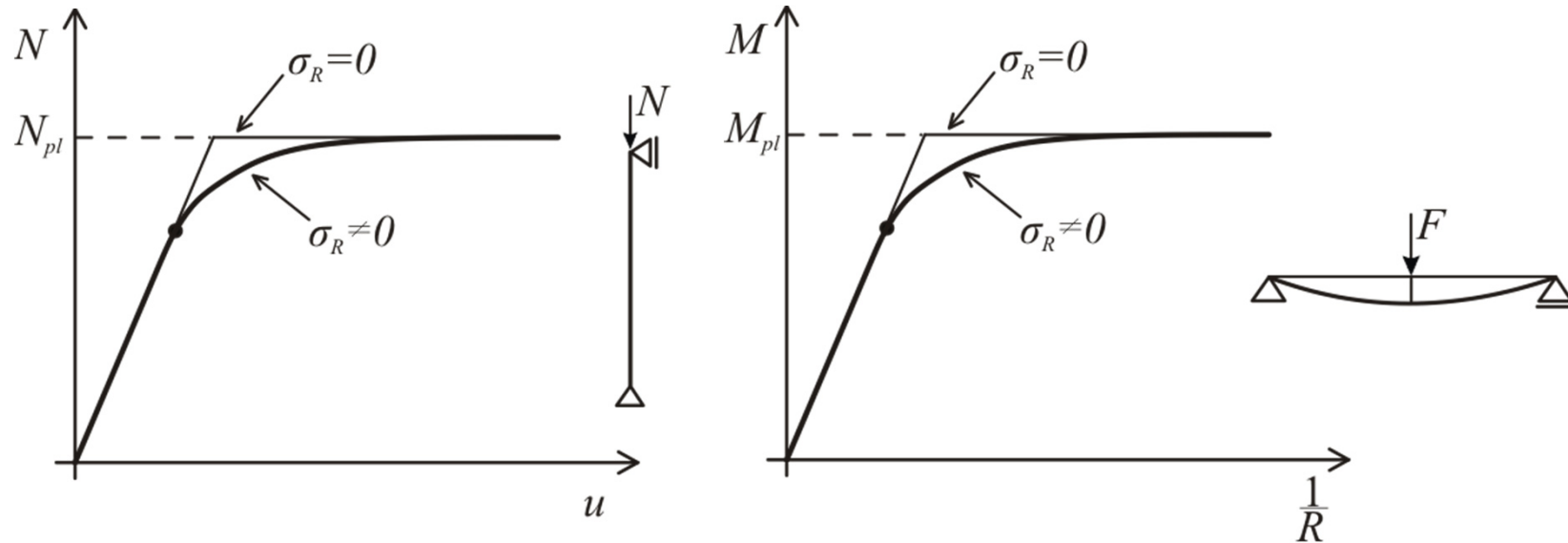
VEČJA RELATIVNA REDUKCIJA

Vpliv zaostalih napetosti

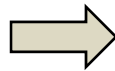


Vpliv zaostalih napetosti je največji v območju srednjih vitkosti ($\sigma_{cr} \approx f_y$, $\lambda \approx \lambda_1$)

Vpliv zaostalih napetosti: upogibno in tlačeno obremenjene palice



Zaostale napetosti



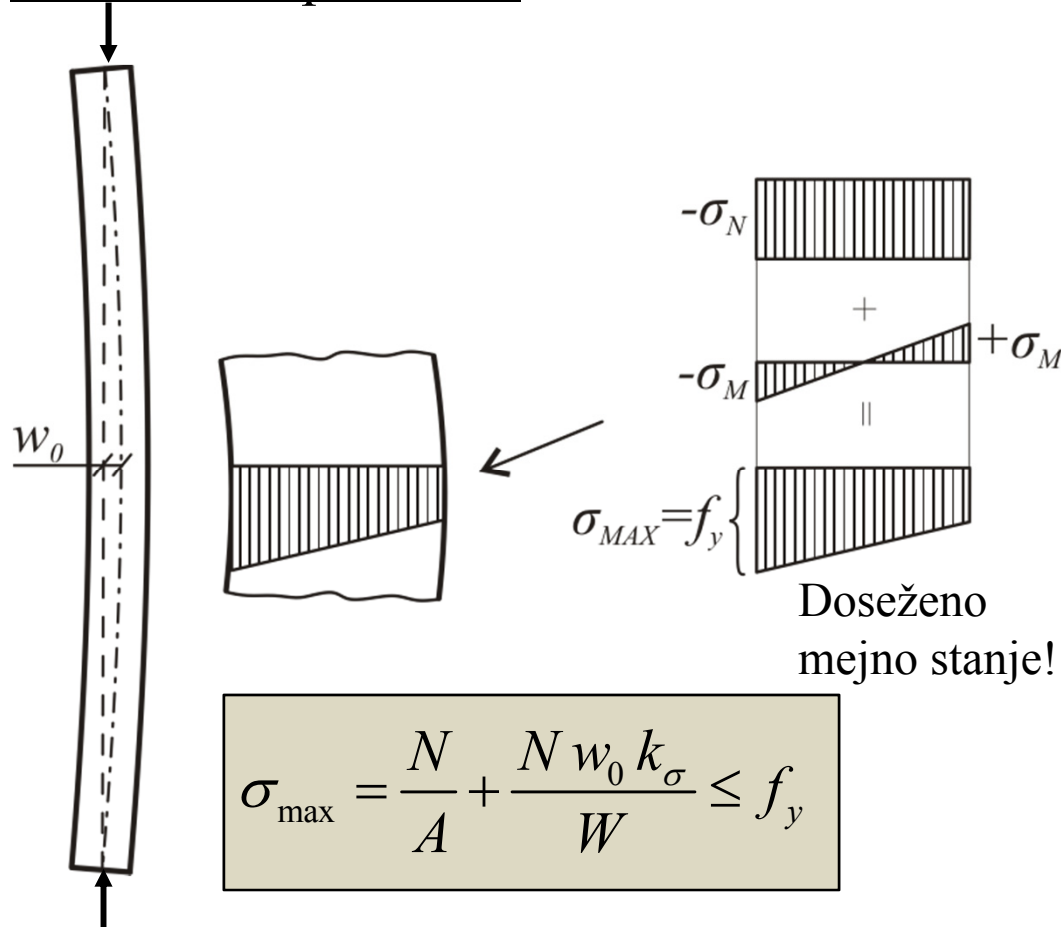
- ❑ Povečajo deformabilnost (zmanjšujejo togost – uklon!);
- ❑ ne vplivajo na mejno nosilnost, ki je dosežena pri nekoliko večjih pomikih.

□ VPLIV GEOMETRIJSKIH NEPOPOLNOSTI

- geometrijske tolerance pri izdelavi (neravnost):
- slučajna ekscentričnost osne sile:

$$w_{0,G} \approx \frac{L}{1000} \div \frac{L}{700}$$

Mehanizem porušitve



$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{N w_0 k_\sigma}{W} \leq f_y$$

Realne palice se nikoli ne porušijo zaradi hipnega uklona ampak zaradi postopnega povečevanja prečnih pomikov in napetosti (tlak + upogib - vpliv TDR)



Plastifikacija prereza

□ GEOMETRIJSKE NEPOPOLNOSTI

Vpliv geometrijskih nepopolnosti se lahko na poenostavljen način upošteva posredno z ustreznim dodatnim povečanjem geometrijskih nepopolnosti – nadomestne (ekvivalentne) geometrijske nepopolnosti:

□ začetne geometrijske nepopolnosti:

$$w_{0,G} \approx \frac{L}{1000} \div \frac{L}{750}$$

□ nadomestne geometrijske nepopolnosti:

$$w_0(w_{0,G}, \sigma_R) \approx \frac{L}{350} \div \frac{L}{150}$$

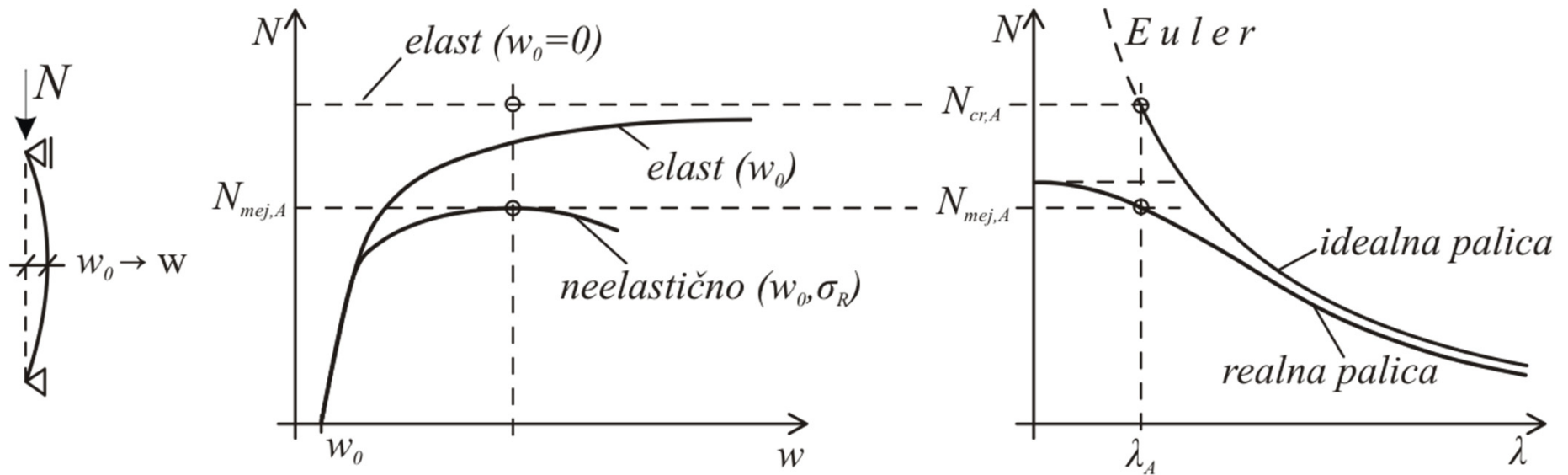
Velikost nepopolnosti je odvisna od:

□ **razporeda in velikosti zaostalih napetosti**

to dvoje je odvisno od

□ **geometrije in načina izdelave profila** (npr. varjen, vroče valjan)

□ GEOMETRIJSKE NEPOPOLNOSTI



□ NOSILNOST JEKLENIH TLAČENIH PALIC

$$\eta = \frac{w_0 A}{W} \quad \text{brezdimenzionalna začetna nepopolnost palice}$$

$$\eta \leq \left(\frac{1}{\bar{N}} - 1 \right) (1 - \bar{N} \bar{\lambda}^2) \quad \text{zveza med nepopolnostjo in osno silo}$$

Glej
uvod v
stabilnost

Mejna nosilnost realnih palic:

$$\bar{N} = \frac{N}{N_{pl}} \quad \rightarrow \text{v mejnem stanju: } N \rightarrow N_{mej}, \quad \bar{N}_{mej} = \frac{N_{mej}}{N_{pl,Rd}} = \chi$$

$$N_{pl,Rd} = A f_y / \gamma_{M1}$$

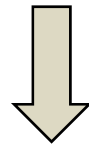
$$\Rightarrow \eta \leq \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right) (1 - \chi \bar{\lambda}^2)$$

Na podlagi preizkusov je znana ocena za velikost η :

$$\eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0,2)$$
$$\eta = 0 \quad \text{pri } \bar{\lambda} \leq 0,2$$

$\bar{\lambda}$ = vitkost palice

α = faktor nepopolnosti



Pet skupin prerezov po EC3: a_0 , a, b, c, d

Uklonska krivulja	a_0	a	b	c	d
Faktor nepopolnosti α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Brezdimenzionalna mejna nosilnost palice: $\chi = \frac{N_{mej}}{N_{pl,Rd}}$

$$\eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) = \left(\frac{1}{\chi} - 1\right)(1 - \chi \bar{\lambda}^2) \rightarrow f(\chi) = 0$$

$$\alpha(\bar{\lambda} - 0,2) = \frac{1}{\chi} - 1 + \chi \bar{\lambda}^2 - \bar{\lambda}^2 \quad / : \chi$$

$$\frac{1}{\chi^2} - \underbrace{\left(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2\right)}_{= 2\phi} \frac{1}{\chi} + \bar{\lambda}^2 = 0 \quad \phi = 0,5 \left[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]$$

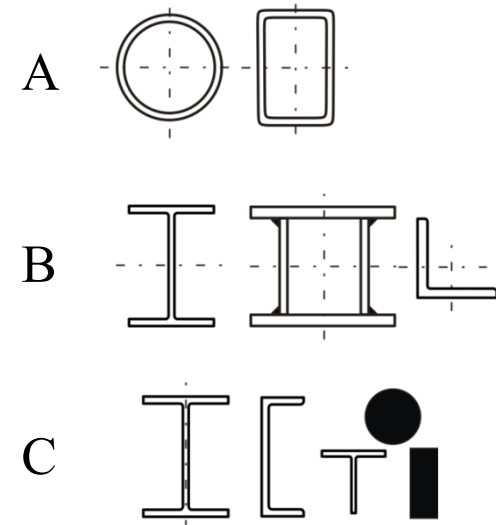
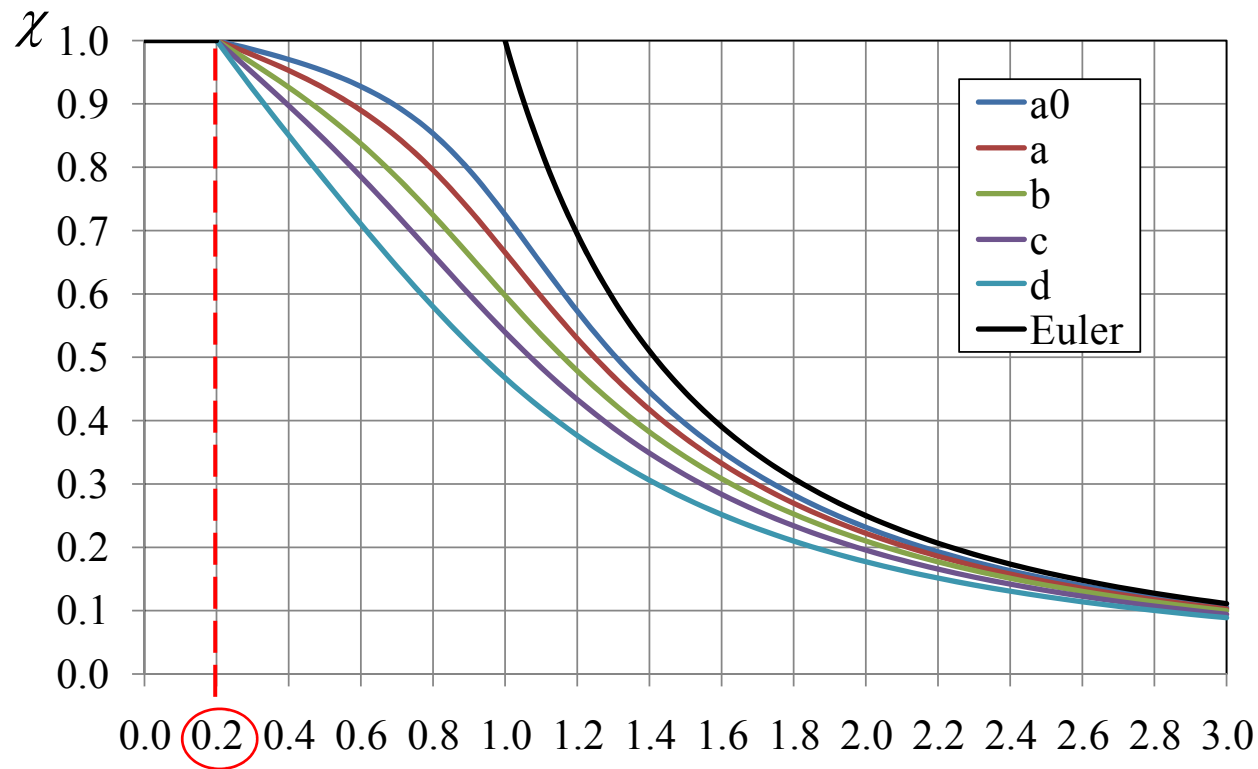
$$\frac{1}{\chi_{1,2}} = \frac{2\phi \pm \sqrt{4\phi^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2}$$



$$\chi_{\min} = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1,0 \quad ; \bar{\lambda} > 0,2$$

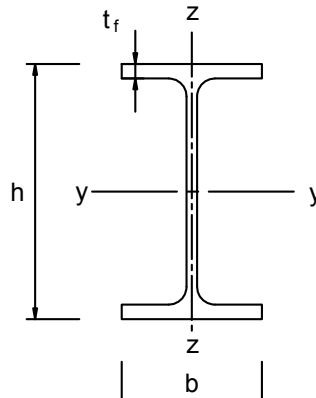
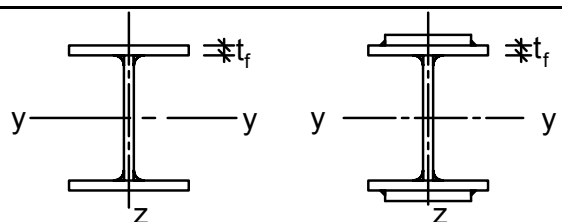
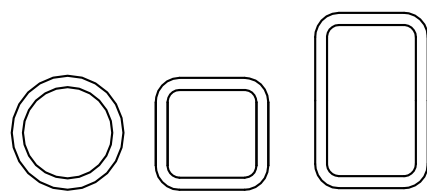
$$\chi = 1,0 \quad ; \bar{\lambda} \leq 0,2$$

$\chi = \chi(\bar{\lambda}, \alpha) \Rightarrow$ Pet evropskih krivulj: oblika prerezov, σ_R

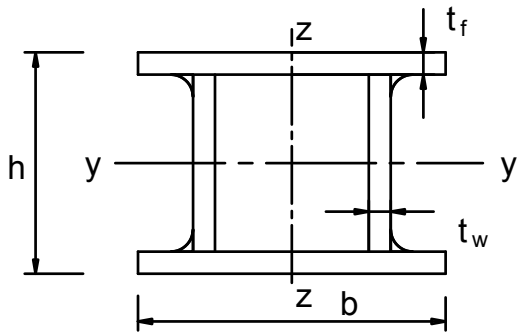
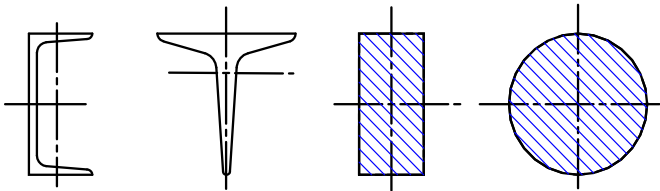
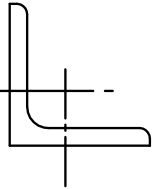


$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}}$$

Izbira uklonske krivulje glede na prečni prerez (SIST EN 1993-1-1)

Prečni prerez		Omejitve		Uklon okoli osi	Uklonska krivulja	
					S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
Vroče valjani prerezi		$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y - y z - z	a b	a_0 a_0
			$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$	y - y z - z	b c	a a
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y - y z - z	b c	a a
			$t_f > 100 \text{ mm}$	y - y z - z	d d	c c
Varjeni I- prerezi		$t_f \leq 40 \text{ mm}$		y - y z - z	b c	b c
		$t_f > 40 \text{ mm}$		y - y z - z	c d	c d
Votli prerezi		vroče izdelani		katera-koli	a	a_0
		hladno oblikovani		katera-koli	c	c

Izbira uklonske krivulje glede na prečni prerez (SIST EN 1993-1-1) (nadaljevanje)

Prečni prerez	Omejitve	Uklon okoli osi	Uklonska krivulja		
			S 235 S 275 S 355 S 420	S 460	
Varjeni škatlasti prezezi		splošno (razen kot spodaj)	katera- koli	b	b
	debeli zvari: $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	katera- koli	c	c	
U-, T- in polni prezezi		katera- koli	c	c	
L-prezezi		katera- koli	b	b	

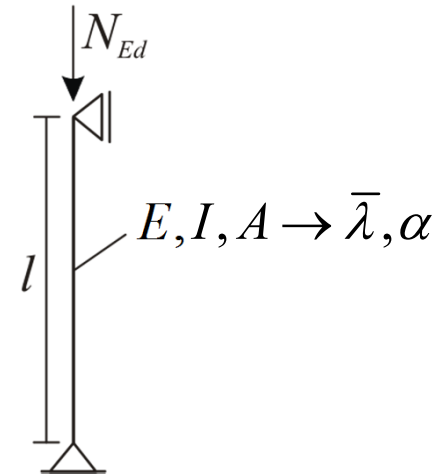
□ Postopek dimenzioniranja pri tlačnih palicah (EC3)

1. Določimo vitkost (elastični uklon)

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl}}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}} \equiv \frac{\lambda}{\lambda_1} \quad 1., 2., 3. \text{ razred kompaktnosti}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_o}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{A_{eff} f_y}{N_{cr}}} \equiv \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\frac{A_{eff}}{A}} \quad 4. \text{ razred kompaktnosti}$$

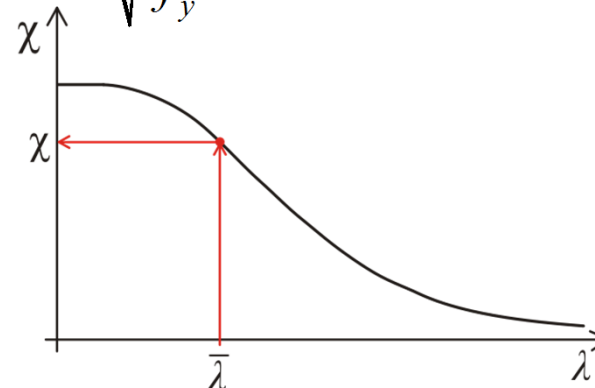
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_u^2} \quad \lambda = \frac{l_u}{i} \quad \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93,9 \varepsilon$$



2. Izberemo uklonsko krivuljo (α)

3. Določimo χ

$$\chi = \chi(\bar{\lambda}, \alpha)$$



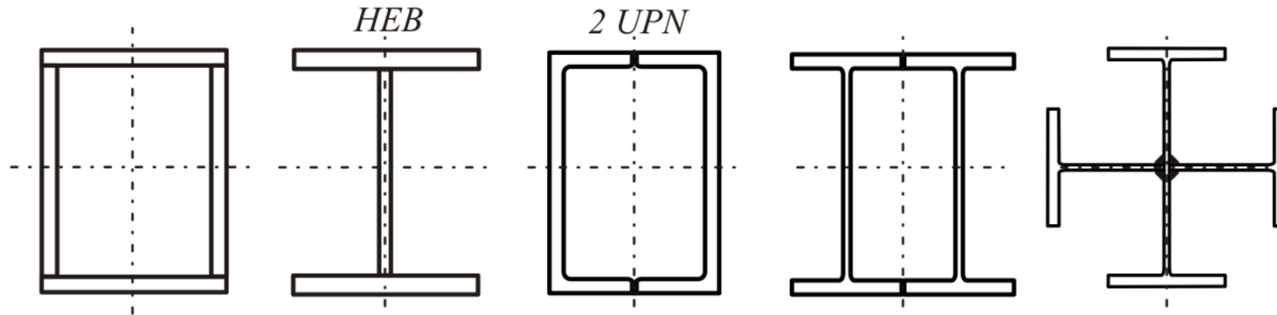
4. Določimo projektno nosilnost

$$N_{Ed} \leq N_{b,Rd} = \chi A f_y / \gamma_{M1} \quad 1., 2., 3. \text{ razred kompaktnosti}$$

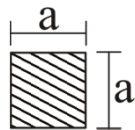
$$N_{Ed} \leq N_{b,Rd} = \chi A_{eff} f_y / \gamma_{M1} \quad 4. \text{ razred kompaktnosti}$$

□ Izbira pravega prereza pri tlačnih palicah

□ prerezi s približno enakim vztrajnostnim momentom okrog obeh osi

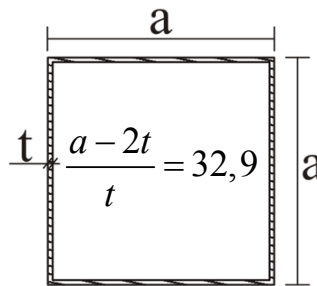


□ prerezi, pri katerih je material razporejen čim dlje od težišča – povečanje vztrajnostnega momenta pri enaki površini prečnega prereza (**omejitev je kompaktnost**)



$$A = 10\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 100\text{cm}^2$$

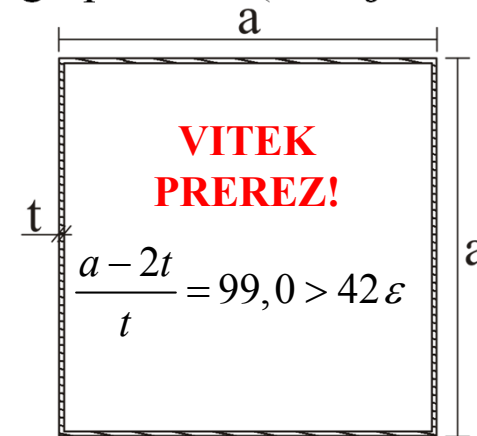
$$I = \frac{10^4\text{cm}^4}{12} = 833\text{cm}^4$$



$$a = 30\text{cm}, t = 0,86\text{cm}$$

$$A = 100\text{cm}^2$$

$$I = 14162\text{cm}^2$$



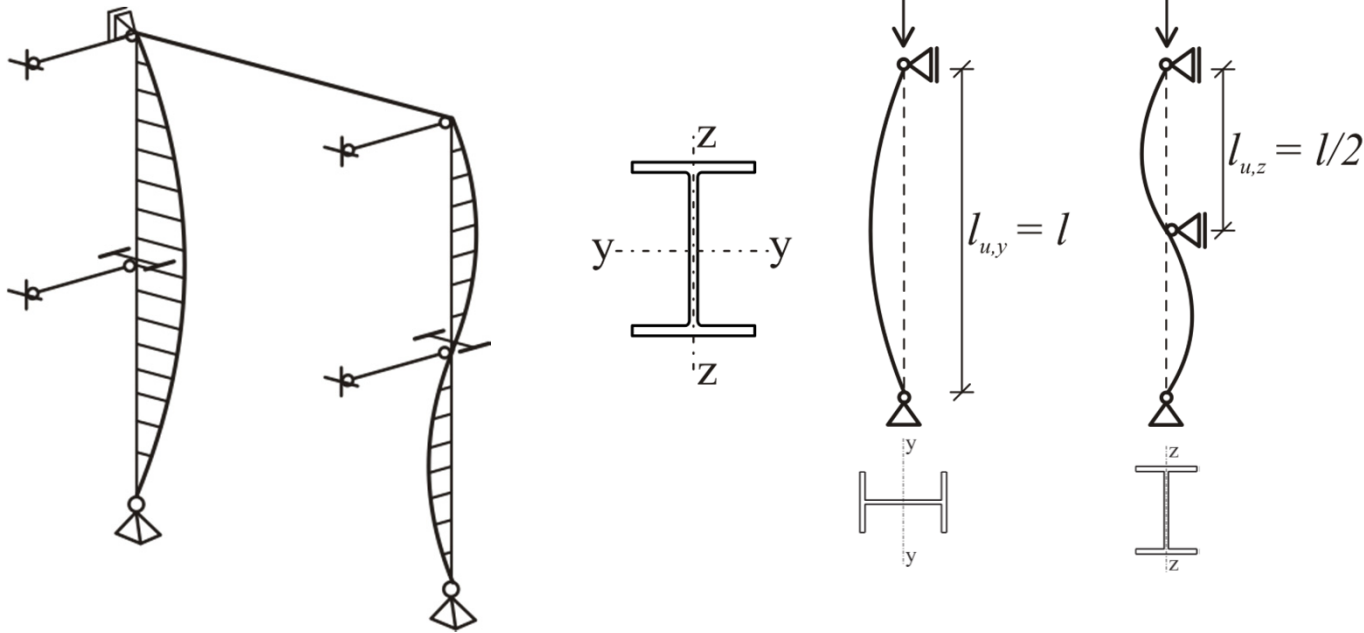
$$a = 50,5\text{cm}, t = 0,5\text{cm}$$

$$A = 100\text{cm}^2$$

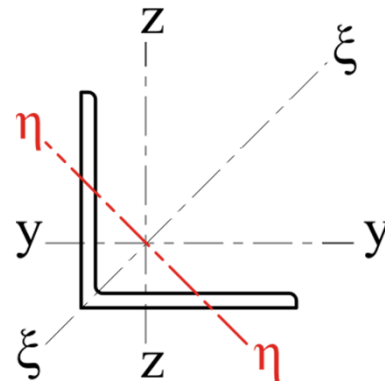
$$I = 41671\text{cm}^2$$

Uklonske dolžine

- vedno kontrola nosilnosti glede na obe uklonski osi** (bočno podpiranje je v dveh smereh lahko različno)



POZOR: nesimetrični prerezi!



$$I_{\min} = I_{\eta\eta}$$

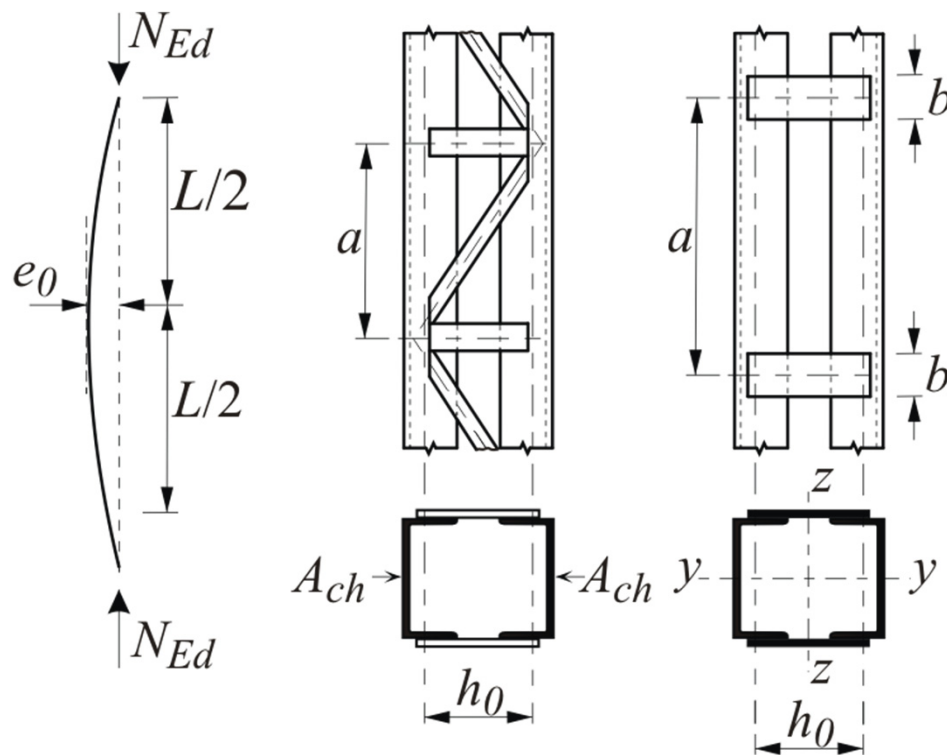
$$i_{\min} = i_{\eta}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{l_u}{i_{\eta}}$$

❑ UKLON TLAČENIH SESTAVLJENIH PALIC

Značilna polnila sestavljenega prereza v obliki:

- ❑ diagonal
- ❑ prečk

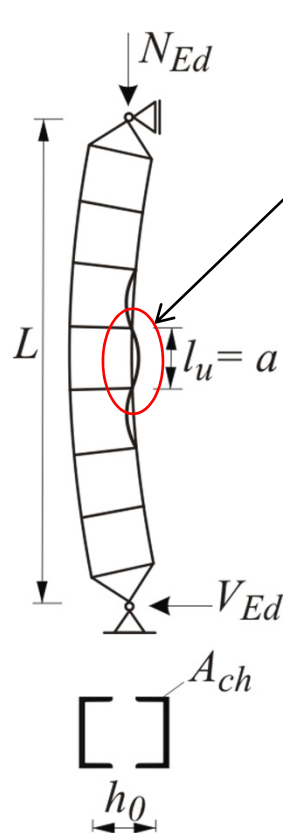


□ Izračun največje osne sile $N_{ch,Ed,MAX}$ v posameznem segmentu pasov

Tlačna osna sila $N_{ch,Ed,max}$ je vsota:

□ globalne **osne sile** $N_{Ed}/2$

□ **osnih sil** od upogibnih momentov (dvojica sil na razdalji težišč pasov h_0) zaradi vplivov **TDR**



$$N_{ch,Ed,max} \approx 0,5 N_{Ed} + \frac{M_{Ed}}{h_0}$$

$$M_{Ed} = N_{Ed} \cdot e_0 k_\delta = \frac{N_{Ed} e_0}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}} ; S_v \text{ strižna togost}$$

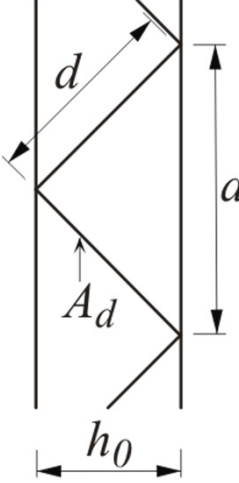
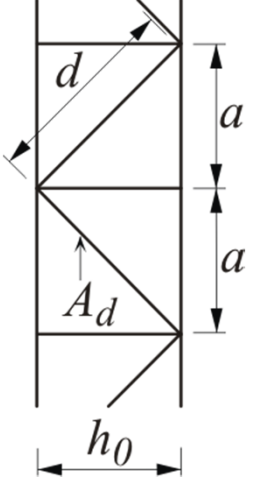
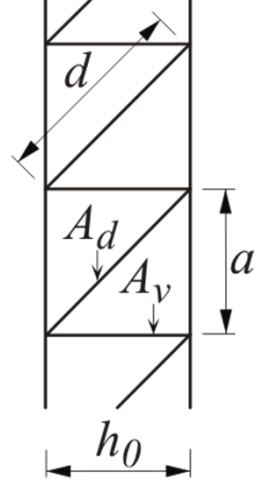
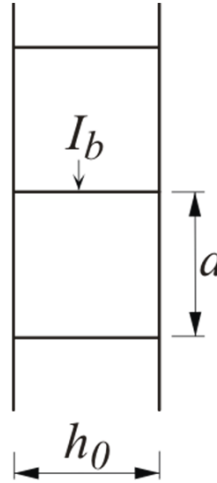
$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{eff}}{L^2}$$

$$I_{eff} = 0,5 h_0^2 A_{ch}$$

$$V_{Ed} = \frac{\pi M_{Ed}}{L}$$

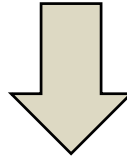
VPLIV STRIGA
POMEMBEN

Strižna togost elementov s sestavljenim prečnim prerezom:

Sistem polnilnih palic				
S_v	$\frac{nEA_d ah_0^2}{2d^3}$	$\frac{nEA_d ah_0^2}{d^3}$	$\frac{nEA_d ah_0^2}{d^3 \left[1 + \frac{A_d h_0^3}{A_v d^3} \right]}$	$\frac{24EI_{ch}}{a^2 \left[1 + \frac{2I_{ch} h_0}{nI_b a} \right]} \leq \frac{2\pi^2 EI_{ch}}{a^2}$
<p>n število ravnin s polnili (vzporedne ravnine pravokotne na os upogiba) A_d in A_v označujeta prečne prereze polnilnih palic A_{ch} površina prečnega prereza posameznega pasu I_b vztrajnostni moment prečke v ravnini upogiba I_{ch} vztrajnostni moment posameznega pasu v ravnini upogiba</p>				

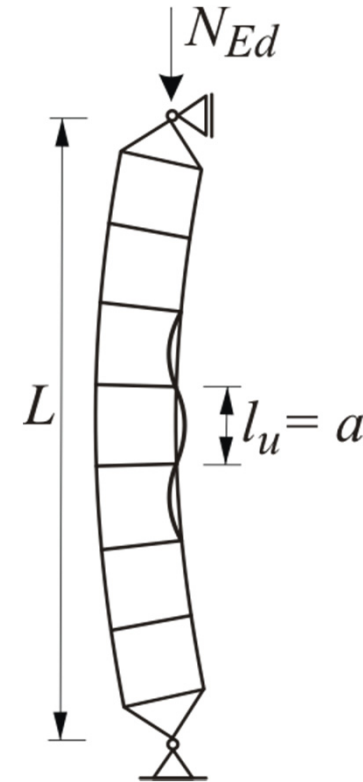
□ Kontrola stabilnosti

Kontrola stabilnosti palice s sestavljenim prečnim prerezom



Kontrola lokalnega uklona segmenta pasu z največjo osno silo in z uklonsko dolžino $l_u = a$.

$$N_{ch,Ed,max} \leq N_{b,Rd} = \chi(l_u = a) A_{ch} f_y / \gamma_{M1}$$



□ TORZIJSKI IN UPOGIBNO TORZIJSKI UKLON

Oblike prečnih prerezov in torzijski ter upogibno-torzijski uklon

<p>1. ali 2. RK</p>	<p>3. ali 4. RK</p>	
<p>Ni nevarnosti</p>	<p>Nevarnost upogibno-torzijskega uklona</p>	<p>Nevarnost torzijskega uklona</p>

□ Elastične kritične uklonske sile

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2} \quad (\text{upogibni uklon okoli močne osi})$$

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (\text{upogibni uklon okoli šibke osi})$$

Dvojno simetrični
prerezi

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_s^2} \left[GI_t + \frac{\pi^2 EI_\omega}{l^2} \right] \quad (\text{torzijski uklon})$$

Enojno simetrični
prerezi

$$N_{cr,1} = N_{cr,y} \quad (1. \text{ (največja) uklonska sila pri upogibno-torzijskem uklonu})$$

$$N_{cr,2,3} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{z_s^2}{i_s^2} \right)} \left[\left(N_{cr,z} + N_{cr,T} \right) \pm \sqrt{\left(N_{cr,z} + N_{cr,T} \right)^2 - 4 N_{cr,z} N_{cr,T} \left(1 - \frac{z_s^2}{i_s^2} \right)} \right]$$

(2., 3. uklonska sila pri upogibno-torzijskem uklonu)

$$i_s = \frac{I_y + I_z}{A} + z_s^2$$

z_s koordinata strižnega središča glede na težišče prečnega prereza

□ RAČUNSKI PRIMER: uklonska nosilnost stebra iz dveh HEA 800 profilov

➤ Izračun **dolžine** stebra, pri kateri postane **kritičen torzijski uklon**

S 235

HEA 800

$$A = 286 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 303400 \text{ cm}^4$$

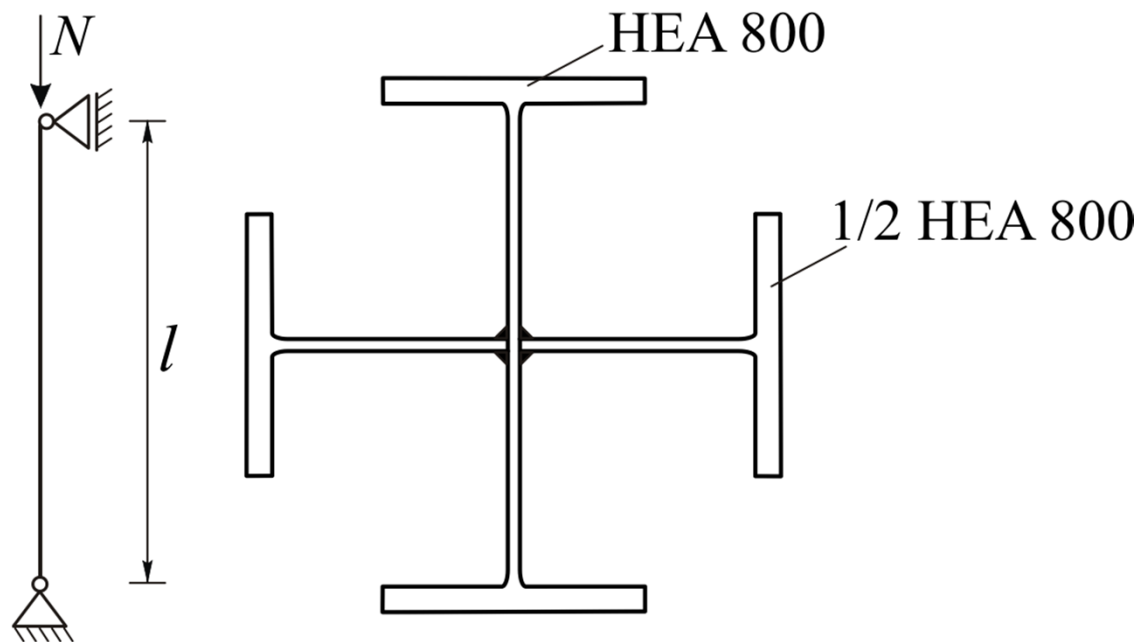
$$I_z = 12640 \text{ cm}^4$$

$$I_t = 597 \text{ cm}^4$$

$$I_\omega = 18290000 \text{ cm}^6$$

$$i_y = 32,6 \text{ cm}$$

$$i_z = 6,65 \text{ cm}$$



$$N_{cr,y} \cong N_{cr,z} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \text{ kN / cm}^2 (303400 \text{ cm}^2 + 12640 \text{ cm}^2)}{l^2} = \frac{6,55 \cdot 10^{10}}{l^2} \text{ kNcm}^2$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{2(303400 + 12640) \text{ cm}^4} \left[\frac{8100 \text{ kN / cm}^2 \cdot 2 \cdot 597 \text{ cm}^4 + \pi^2 21000 \text{ kN / cm}^2 \cdot 2 \cdot 18290000 \text{ cm}^6}{l^2} \right]$$

$$= 8736 \text{ kN} + \frac{0,685 \cdot 10^{10}}{l^2} \text{ kNcm}^2$$

Iz pogoja

$$N_{cr,T} < N_{cr,y}$$

Sledi

$$l \leq \sqrt{\frac{(6,55 - 0,685) 10^{10} \text{ kNcm}^2}{8736 \text{ kN}}} = 2591 \text{ cm}$$

$$N_{cr}(l_u = 2591\text{cm}) = \frac{6,55 \cdot \text{kNcm}^2}{2591^2 \text{cm}^2} = 9757 \text{kN}$$

$$\bar{\lambda}_T(l_u = 2591\text{cm}) = \bar{\lambda}_y(l_u = 2591\text{cm}) = \sqrt{\frac{2 \cdot 286 \text{cm}^2 \cdot 23,5 \text{kN/cm}^2}{9757 \text{kN}}} = 1,17$$

Torzijski uklon merodajen za:

vse dolžine krajše od **25,9 m**

oz.

vse vitkosti pod **1,17**.

VELIKO IN
RELEVANTNO
OBMOČJE!