PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
SKUPAJ	

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE - računski del

14.4.2006

Navodilo: Vse odgovore dobro utemelji. Naloge so enakovredne. Čas reševanja: 90 minut.

1. naloga: Ravnino Σ določajo točke $A(-1,1,1)$, $B(-2,-1,-2)$ in $C(-4,-1,0)$. Na ravnini $\Pi: 3x-4y-z=2$ poišči takšno točko T, da bo točka A njena pravokotna projekcija na ravnino Σ.

2. naloga: Točke A, B, C, D, E, F, G in H so zaporedna oglišča kocke. Točka M razpolavlja daljico AB, točka N pa daljico GH.

(a) Utemelji, zakaj se daljici AN in MH sekata, ter označi njuno presečišče s S. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorji $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{AE}$.

(b) Ali so vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{AS}$ linearno neodvisni? Odgovor utemelji!

(c) Kolikšen del prostornine kocke zavzame tetraeder $ABCS$?

3. naloga: Pokaži, da je množica

$$\mathcal{Y}=\{(a+3b,2a,-2a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

linearen podprostor prostora $\mathbb{R}^4$. Poišči kakšno bazo podprostora $\mathcal{Y}$ in jo ortonormiraj glede na standardni skalarni produkt v $\mathbb{R}^4$. S pomočjo tega poišči element v $\mathcal{Y}$, ki je najbližji elementu $x=(1,4,0,9)$. Kolikšna je ta razdalja?

4. naloga: Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Če obstaja, določi tako matriko P, da bo matrika $P^{-1}AP$ diagonalna.

REŠITVE:

1. naloga: *Enačba ravnine* $\Sigma : x - 2y + z = -2$, *iskana točka na ravnini* Π *pa je* $T(0, -1, 2)$ *(dobimo jo iz pogojev* $\overrightarrow{AT} \perp \Sigma$ *in* $T \in \Pi$*).*

2. naloga:

(a) *Daljici* AN *in* MH *se sekata, ker obe ležita na prerezni ravnini kocke in sta diagonali paralelograma* $AMNH$. $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$.

(b) *Vektorji* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{AS}$ *so linearno neodvisni, ker ne ležijo na isti ravnini.*

(c) $V_{ABCS} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{AS}]| = \frac{1}{12}|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]|$, *torej tetraeder zavzame eno dvanajstino prostornine kocke.*

3. naloga: *Najprej preverimo, da je množica* $\mathcal{Y}$ *zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem (torej je res linearen podprostor). Baza prostora* $\mathcal{Y}$ *je npr.* $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \{(1, 2, -2, 0), (3, 0, 0, 1)\}$. *Z Gramm-Schmidtovim postopkom dobimo ortonormirano bazo* $\mathcal{Y}$:

$$e_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2, 0) \quad \text{in} \quad \mathrm{e}_2 = \frac{1}{9}(8, -2, 2, 3).$$

Element v $\mathcal{Y}$, *ki je najbližji elementu* x *je*

$$pr_{\mathcal{Y}} x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 = \frac{1}{3}(11, 4, -4, 3) \quad \text{ter} \quad \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathcal{Y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{pr}_{\mathcal{Y}}\mathrm{x}\| = 4\sqrt{5}.$$

4. naloga: *Lastne vrednosti so* $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 0$ *in* $\lambda_3 = 1$, *pripadajoči lastni vektorji pa npr.*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathrm{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ustrezna prehodna matrika P *obstaja, ker so vsi trije vektorji med seboj neodvisni:*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$