RAČUNSKI DEL IZPITA IZ LINEARNE ALGEBRE
(13.4.2007)

Navodilo: Vsako nalogo rešuj na stran, kjer je napisana, ali pa jasno označi mesto z rešitvami. Točkovanje: 25 + 25 + 25 + 25. Čas reševanja: 90 minut. Srečno!

1. naloga: Prepričaj se, da se premici

$$p : \vec{r}_p(\lambda) = (1,0,1) + \lambda(1,1,0) \qquad \text{ter} \qquad q : \vec{r}_q(\lambda) = (1,2,0) + \lambda(2,0,-1)$$

ne sekata. (Torej sta mimobežni.) Med premicami, ki sekajo premico q in so vzporedne premici p, poišči tisto, ki je premici p najbližja.

Rešitev: *Premici se p in q se bosta sekali, če ima enačba (zaenkrat zapisana v vektorski obliki)*

$$(1,0,1) + \lambda(1,1,0) = (1,2,0) + \mu(2,0,-1)$$

rešitev. Zgornja enačba pa v resnici določa sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= 1 + 2\mu, \\ \lambda &= 2, \\ 1 &= -\mu. \end{aligned}$$

Zadnji dve enačbi pravita $\lambda = 2$ in $\mu = -1$. Ko ti dve vrednosti vstavimo v prvo enačbo, dobimo $1 + 2 = 1 - 2$ oziroma $3 = -1$, kar je seveda neumnost. Sistem je torej protisloven—nima rešitev in premici p in q se ne sekata.

Drugi del naloge je težji. Naj bo p' tista premica, ki jo zahteva naloga. Jasno je njen smerni vektor enak smernemu vektorju premice p (saj sta vzporedni), torej $\vec{s}_p = \vec{s}_{p'} = (1,1,0)$. Ker sta p in p' različni vzporedni premici (p ne seka q, p' pa jo), določata neko ravnino Σ. Poiščimo najprej to ravnino!

Normalni vektor $\vec{n}_\Sigma$ ravnine Σ je pravokoten na smerni vektor premice p (in p'), poleg tega pa je tudi pravokoten na daljico, ki povezuje točki na premicah p in q, v katerih sta si premici p in q najbližji. Ta daljica je seveda pravokotna na oba smerna vektorja, tj. na $\vec{s}_p$ in $\vec{s}_q$, in zato vzporedna vektorskemu produktu $\vec{s}_p \times \vec{s}_q$. Iz vsega skupaj sledi, da lahko za $\vec{n}_\Sigma$ vzamemo

$$\begin{aligned} \vec{n}_\Sigma = \vec{s}_p \times \big(\vec{s}_p \times \vec{s}_q\big) &= (1,1,0) \times \big((1,1,0) \times (2,0,-1)\big) = \\ &= (1,1,0) \times (-1,1,2) = (-2,2,2). \end{aligned}$$

Ker Σ vsebuje premico p, torej tudi točko $(1,0,1)$, za enačbo ravnine dobimo

$$(-2,2,2) \cdot (x,y,z) = (-2,2,2) \cdot (1,0,1) = 0 \quad \therefore \quad -2x + 2y + 2z = 0$$

ali, po deljenju z -2,

$$\Sigma : x - y - z = 0.$$

Točka, v kateri premica q prebada ravnino Σ, je hkrati točka, v kateri premica p' seka premico q. Poiskati moramo le še prebodišče pa bo premica p' povsem določena. V enačbo ravnine Σ vstavimo parametrizacijo premice q:

$$(1 + 2\lambda) - 2 + \lambda = 0 \quad \therefore \quad 3\lambda = 1 \quad \therefore \quad \lambda = \tfrac{1}{3}.$$

Prebodišče je torej v točki s krajevnim vektorjem $\vec{r}_q(\frac{1}{3}) = (\frac{5}{3}, 2, -\frac{1}{3})$ in premica p' je

$$p' : \vec{r}_{p'}(\lambda) = (\tfrac{5}{3}, 2, -\tfrac{1}{3}) + \lambda(1,1,0).$$

2. naloga: Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ razpenjajo tetraeder T. Paralelepiped P pa je razpet na vektorje

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{v} = \vec{a} + \vec{c} \quad \text{ter} \quad \vec{w} = \vec{b} + \vec{c}.$$

Vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ sta pravokotna, vektor $\vec{w}$ pa oklepa z ravnino, ki jo določata $\vec{u}$ in $\vec{v}$, kot $30° = \frac{\pi}{6}$. Poišči volumna paralelepipeda P in tetraedra T, če je $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 2$.

REŠITEV: *Volumen tetraedra izrazimo z mešanim produktom*

$$\mathrm{Vol}_T = \tfrac{1}{6}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|.$$

Volumen paralelepipeda izražen z mešanim produktom pa je

$$\mathrm{Vol}_P = \left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|.$$

Vemo

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| \, \left\|\vec{w}\right\| \cos\alpha,$$

kjer je α kot med vektorjema $\vec{u} \times \vec{v}$ in $\vec{w}$. Vektorski produkt vektorjev $\vec{u}$ in $\vec{v}$ pa je pravokoten na ravnino, ki jo vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ določata, zato je $\alpha = 90° - 30° = 60° = \frac{\pi}{3}$. Poleg tega je $\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|$ ploščina paralelograma določenega z vektorjema $\vec{u}$ in $\vec{v}$, oziroma, ker sta $\vec{u}$ in $\vec{v}$ pravokotna in enako dolga, ploščina kvadrata s stranico dolžine 2. Pa dobimo

$$\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| \, \left\|\vec{w}\right\| \cos\tfrac{\pi}{3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 4.$$

Volumen paralelepipeda P je torej enak 4.

Še volumen tetraedra moramo izračunati. Mešani produkt je linearen v vsakem od argumentov posebej, poleg tega pa je enak 0, če so vektorji linearno odvisni. Posebej je mešani produkt enak 0, če v njem nastopata dva enaka vektorja. S pomočjo teh lastnosti izpeljemo

$$\begin{aligned}
\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] &= \left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \\
&= \left[\vec{a}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \\
&= \underbrace{\left[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right]}_{=0} + \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \\
&= \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right] + \underbrace{\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\right]}_{=0} + \left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right] + \underbrace{\left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}\right]}_{=0} = \\
&= \left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right] = \\
&= -\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] - \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = -2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right],
\end{aligned}$$

kjer smo pri predzadnjem enačaju upoštevali, da zamenjava dveh vektorjev v mešanem produktu spremeni predznak le–tega. Od tod sledi

$$\mathrm{Vol}_P = \left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right| = 2\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|$$

ali

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right| = \tfrac{1}{2}\mathrm{Vol}_P$$

in zato

$$\mathrm{Vol}_T = \tfrac{1}{6}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right| = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{2}\mathrm{Vol}_P = \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}.$$

3. naloga: V standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ zapišemo vektorje

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 0, 1) \quad \text{ter} \quad \vec{a}_3 = (0, 1, 1).$$

(a) Ali je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$? Ali lahko vektor $\vec{b} = (1, 1, 1)$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$?

(b) Za linearno preslikavo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ velja

$$T\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 0), \quad T\vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0) \quad \text{in} \quad T\vec{a}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Koliko je $T\vec{b}$? Ali je T injektivna?

Rešitev:

(a) *Vektorji $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$ bodo tvorili bazo prostora $\mathbb{R}^3$, če bodo linearno neodvisni, saj $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Enakost*

$$\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2 + \nu\vec{a}_3 = \lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1) + \nu(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

določa sistem treh linearnih enačb

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + 0 &= 0, \\ \lambda + 0 + \nu &= 0, \\ 0 + \mu + \nu &= 0. \end{aligned}$$

V matrični obliki

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Ena od rešitev homogenega sistema je gotovo $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. Ker pa ima zadnja matrika na diagonali le neničelne elemente (pod diagonalo pa ničle), sledi, da je to edina rešitev. Vektorji $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$ so torej linearno neodvisni in $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ je baza za $\mathbb{R}^3$.

Ker je $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ baza za $\mathbb{R}^3$, se $\vec{b}$ zagotovo dá izraziti z linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$. Konkretna izrazitev je

$$\vec{b} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3\right).$$

Poiščemo jo pa tako, da na enak način kot zgoraj rešimo sistem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

(b) *Ker je T linearna, velja*

$$\begin{aligned} T\vec{b} &= T\left(\tfrac{1}{2}\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(T\vec{a}_1 + T\vec{a}_2 + T\vec{a}_3\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big((1, 0, 1, 0) + (0, 1, 1, 0) + (1, 1, 0, 0)\big) = (1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

Za injektivnost bo dovolj opaziti, da so vektorji $T\vec{a}_1$, $T\vec{a}_2$ in $T\vec{a}_3$ linearno neodvisni (kar preverimo na enak način kot zgoraj). Vektorji $T\vec{a}_1$, $T\vec{a}_2$ in $T\vec{a}_3$ torej tvorijo bazo za podprostor $\operatorname{im} T \subset \mathbb{R}^4$. Dimenzijska enačba pravi

$$\dim\ker T + \dim\operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^3 \quad \therefore \quad \dim\ker T + 3 = 3.$$

Takoj sledi $\dim\ker T = 0$ ali $\ker T = \{\vec{0}\}$ in T je injektivna.

4. naloga: Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči še matriko P, da bo $P^{-1}AP$ diagonalna, in izračunaj A^4.

REŠITEV: *Najprej poiščemo karakteristični polinom $p_A(\lambda)$ matrike A:*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

(pred zadnjim enačajem smo zamenjali 2. in 3. vrstico, sedaj bomo pa zamenjali še 2. in 3. stolpec)

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} (2-\lambda) = (\lambda^2 - 1)(2-\lambda) =$$
$$= (1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).$$

Lastne vrednosti so seveda ničle polinoma $p_A(\lambda)$, te so $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 2$.

Da poiščemo lastne vektorje, moramo poiskati netrivialne rešitve sistemov

$$(A - \lambda_i I)\vec{v} = \vec{0}.$$

(Za natančen postopek glej rešitve prejšnjih izpitov ali kolokvijev.) Kar dobimo so vektorji (po vrsti, za lastne vrednosti -1, 1 in 2)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \text{in} \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Prehodna matrika je torej

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

njen inverz pa je

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

je diagonalna in zato

$$A^4 = \left(PDP^{-1}\right)^4 = PD^4P^{-1} =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 15 & 1 \end{bmatrix}.$$