PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
SKUPAJ	

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE - računski del

1.2.2006

Navodilo: Vse odgovore dobro utemelji. Naloge so enakovredne. Čas reševanja: 90 minut.

1. naloga: Prezrcali premico

$$\frac{x-1}{2} = y-1 = -z$$

čez ravnino, ki jo določajo točke $A(1,0,1)$, $B(1,1,3)$ in $C(5,1,1)$.

2. naloga: Točke A, B, C, D, E in F so zaporedna oglišča pravilnega šestkotnika. Z M označimo razpolovišče daljice DE, točka N pa deli daljico CD v razmerju $1:2$. Naj bo S presečišče daljic AN in BM. Označimo še: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$.

(a) Izrazi vektorje $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$ in $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

(b) Določi razmerje med ploščinama trikotnika ABS in šestkotnika $ABCDEF$.

3. naloga: Reši matrično enačbo: $B - XA = X$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. naloga: Ali lahko skozi točke (x_i, y_i) iz spodnje tabele potegnemo premico?

x_i	0	1	2	3
y_i	-1	0	3	2

Poišči linearno funkcijo $f(x) = kx + n$, za katero bo $\sum_{i=1}^{4} (f(x_i) - y_i)^2$ najmanjša. Kako to premico imenujemo?

REŠITVE:

1. naloga: *Ravnina, ki jo določajo točke A, B in C ima enačbo $\Sigma : x - 4y + 2z = 3$. Dana premica seka to ravnino v točki $S(-2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Izberemo si še eno točko na premici, jo prezrcalimo čez ravnino Σ in dobimo enačbo prezrcaljeen premice: $\overrightarrow{r} = (-2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + \lambda(50, -11, -5)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

2. naloga:

(a) $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{4}{3}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{b} - \frac{3}{2}\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{a} + \frac{4}{5}\overrightarrow{b}$.

(b) $p_{ABCDEF} = 3|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$, $p_{ABS} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{AS}| = \frac{2}{5}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$, *torej ploščina trikotnika ABS predstavlja $\frac{2}{15}$ ploščine šestkotnika $ABCDEF$.*

3. naloga:

$$X = B(A+I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Lahko si pomagamo tudi s transponiranjem in rešitev dobimo direktno z Gaussovim postopkom.)

4. naloga: *Skozi dane točke ne moremo potegniti premice. Če si nastavimo enačbe dobimo predoločen sistem $Ax = b$, kjer so*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad x = \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema po metodi najmanjših kvadratov dobimo s pomočjo normalne enačbe $A^\top Ax = A^\top b$. Iskana premica ima enačbo $y = \frac{6}{5}x - \frac{4}{5}$ in se imenuje regresijska premica.