PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
SKUPAJ	

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE - računski del

23.1.2006

Navodilo: Vse odgovore dobro utemelji. Naloge so enakovredne. Čas reševanja: 90 minut.

1. naloga: Vektorji $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ in $\overrightarrow{w}$ napenjajo paralelepiped P, tetraeder T pa je napet na vektorje:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}, \\ \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \\ \overrightarrow{c} &= 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}. \end{aligned}$$

(a) Kako se volumen tetraedra T izraža z volumnom paralelepipeda P?

(b) Dolžine vektorjev so: $|\overrightarrow{u}| = 1$, $|\overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{w}| = 2$, kot med vektorjema $\overrightarrow{v}$ in $\overrightarrow{w}$ ter kot med vektorjem $\overrightarrow{u}$ in ravnino, ki jo razpenjata vektorja $\overrightarrow{v}$ in $\overrightarrow{w}$, pa sta oba enaka $60°$. Izračunaj volumna paralelepipeda T in tetraedra P.

2. naloga: Poišči točko v presečišču ravnin

$$\Pi : 3x + y + 2z = 12 \quad \text{in} \quad \Sigma : x - y + 2z = 4,$$

ki je najbližja točki $T(4, 6, -3)$. Kolikšna je ta razdalja? Primerjaj jo z razdaljama točke T do ravnin Π in Σ.

3. naloga: Označimo: $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (-1, 1, -1)$ in $b_3 = (0, 1, 1)$.

(a) Dokaži, da so b_1, b_2 in b_3 baza prostora $\mathbb{R}^3$. Kako se $(1, 0, 0)$ izraža v tej bazi?

(b) Za linearno preslikavo $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ velja:

$$Lb_1 = (3, -3), \quad Lb_2 = (3, -6) \quad \text{in} \quad Lb_3 = (0, 3).$$

Koliko je $L(1, 0, 0)$? Zapiši matriko preslikave L v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$.

4. naloga: Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ali matriko A lahko diagonaliziramo? Če jo lahko, poišči tako obrnljivo matriko P, da bo matrika $P^{-1}AP$ diagonalna. S pomočjo tega izračunaj še A^{25}.

REŠITVE:

1. naloga:

(a) $V_T = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]| = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = \frac{1}{2} V_P$.

(b) $V_T = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}| \sin\measuredangle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 3$ *in* $V_P = \frac{3}{2}$.

2. naloga: *Presečišče ravnin* Π *in* Σ *je premica* $p : x = 4 - y = 4 - z$ *in točka na njej, ki je najbližje točki* T, *je* $T'(3, 1, 1)$. *Razdalja med njima je* $d(T, p) = |\overrightarrow{TT'}| = \sqrt{42}$ *in je večja od razdalij točke* T *do ravnin* Π *in* Σ: $(T, \Pi) = 0$ *(saj* $T \in \Pi$*) in* $d(T, \Sigma) < d(T, T')$, *ker* $T' \in \Sigma$ *in* $T \notin \Sigma$.

3. naloga:

(a) *Preveriti je treba le, da so* b_1, b_2 *in* b_3 *linearno neodvisni. Izražava:* $(1, 0, 0) = \frac{2}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2 - \frac{1}{3}b_3$.

(b) $L(1, 0, 0) = \frac{2}{3}(3, -3) - \frac{1}{3}(3, -6) - \frac{1}{3}(0, 3) = (1, -1)$. *Preslikamo še ostala dva standardna bazna vektorja prostora* $\mathbb{R}^3$ *in dobimo*

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. naloga: *Lastne vrednosti matrike* A *so* $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1$, *pripadajoči lastni vektorji pa so npr.*

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriko A *lahko diagonaliziramo, ker ima tri linearno neodvisne lastne vektorje.*

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathrm{A}^{25} = \mathrm{PD}^{25}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{A}.$$