RAČUNSKI DEL IZPITA IZ LINEARNE ALGEBRE
(31.1.2007)

Navodilo: Vsako nalogo rešuj na stran, kjer je napisana, ali pa jasno označi mesto z rešitvami. Točkovanje: 25 + 25 + 25 + 25. Čas reševanja: 90 minut. Srečno!

1. naloga: Prezrcali premico

$$p: \ x = y - 2 = \frac{z-1}{2}$$

čez ravnino Ξ, ki jo določajo točke $A(2,0,-1)$, $B(1,4,1)$ ter $C(2,-3,-2)$.

REŠITEV*: Za začetek poiščimo enačbo ravnine* Ξ*. Za normalni vektor vzamemo kar*

$$\vec{n}_\Xi = (\vec{r}_B - \vec{R}_A) \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = (-1,4,2) \times (0,-3,-1) = (2,-1,3)\,.$$

Enačba ravnine bo torej oblike

$$\vec{n}_\Xi \cdot (x,y,z) = 2x - y + 3z = d\,,$$

vendar moramo d *še določiti. V zgornjo enačbo preprosto vstavimo koordinate ene izmed točk* A*,* B *oz.* C *pa imamo*

$$d = 2\cdot 2 - 1\cdot 0 + 3\cdot(-1) = 1$$

in iskana enačba ravnine je

$$\Xi : 2x - y + 3z = 1\,.$$

Enačbo prezrcaljene premice p' *pa poiščemo tako, da čez ravnino prezrcalimo dve (različni) točki na premici* p*. Delo si seveda olajšamo, če za eno od teh točk vzamemo kar točko iz preseka* $p \cap \Xi$ *(če taka točka seveda obstaja). Pa poglejmo: Enačbo premice* p *zapišemo v vektorski obliki*

$$p : \vec{r}(\lambda) = (0,2,1) + \lambda(1,1,2)$$

in komponente le-te vstavimo v enačbo ravnine Ξ

$$2(0+\lambda) - (2+\lambda) + 3(1+2\lambda) = 1 \quad \therefore \quad \lambda = 0\,.$$

Premica p *in ravnina* Ξ *se torej sekata v točki* T *s krajevnim vektorjem* $\vec{r}(0) = \vec{r}_T = (0,2,1)$*. Drugo točko na premici* p *dobimo tako, da izberemo poljuben* $\lambda \neq 0$ *(vzeli bomo kar* $\lambda = 1$*) in izračunamo* $\vec{r}(1) = (1,3,3) = \vec{r}_S$*. Točko* $S(1,3,3)$ *moramo sedaj prezrcaliti čez ravnino* Ξ*.*

Premica q*, ki gre skozi točko* S *in je pravokotna na ravnino* Ξ*, ima za smerni vektor kar normalni vektor ravnine* Ξ*;* $\vec{s}_q = \vec{n}_\Xi$*:*

$$q : \vec{r}(\mu) = (1,3,3) + \mu(2,-1,3)\,.$$

Le-ta seka ravnino Ξ *pri*

$$2(1+2\mu) - (3-\mu) + 3(3+3\mu) = 1 \quad \therefore \quad 14\mu = -7 \quad \therefore \quad \mu = -\tfrac{1}{2}\,.$$

Krajevni vektor prezrcaljene točke je torej $\vec{r}_{S'} = \vec{r}(2\cdot(-\frac{1}{2})) = \vec{r}(-1) = (-1,4,0)$*. Za smerni vektor premice* p' *sedaj vzamemo* $\overrightarrow{TS}' = \vec{r}_{S'} - \vec{r}_T = (-1,2,-1)$ *in enačba prezrcaljene premice je*

$$p' : \vec{r}(\lambda) = (0,2,1) + \lambda(1,-2,1)\,.$$

2. naloga: Točke A, B, C, D, E in F so oglišča pravilnega enakostraničnega šestkotnika. Naj bo FM daljica, ki povezuje oglišče F z razpoloviščem M stranice CD. Točko v preseku daljic FM in AD označimo z N.

(a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AN}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

(b) Primerjaj ploščini trikotnikov ANF ter MND.

REŠITEV:

(a) Vektor $\overrightarrow{AN}$ *zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev* $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$ *na dva načina:*

$$\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AD} = 2\lambda\vec{b},$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \mu\overrightarrow{FM} = \vec{b} - \vec{a} + \mu(\tfrac{3}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}) = (\tfrac{3}{2}\mu - 1)\vec{a} + (1 + \tfrac{1}{2}\mu)\vec{b}.$$

Iz prvega zapisa pa je jasno, da $\overrightarrow{AN}$ *nima komponente v smeri vektorja* $\vec{a}$, *zato mora veljati*

$$\tfrac{3}{2}\mu - 1 = 0 \quad \therefore \quad \mu = \tfrac{2}{3},$$

od koder sledi

$$\overrightarrow{AN} = \tfrac{4}{3}\vec{b}.$$

(b) Ploščini trikotnikov ANF *ter* MND *izrazimo s polovico norme vektorskega produkta ustreznih vektorjev:*

$$S_{ANF} = \tfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{AN}\right\| = \tfrac{1}{2}\left\|(\vec{b} - \vec{a}) \times \tfrac{4}{3}\vec{b}\right\| = \tfrac{2}{3}\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|,$$
$$S_{MND} = \tfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{DM} \times \overrightarrow{DN}\right\| = \tfrac{1}{2}\left\|\tfrac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \times \tfrac{2}{3}\vec{b}\right\| = \tfrac{1}{6}\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|$$

in takoj vidimo, da velja $S_{ANF} = 4S_{MND}$. *Trikotnik* ANF *ima torej* 4*-krat večjo ploščino kot trikotnik* MND.

3. naloga: Preslikava $\mathcal{C}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima predpis $\mathcal{C}(x, y, z) = (4x, y + z - 4x, 4z)$.

(a) Prepričaj se, da je preslikava $\mathcal{C}$ linearna in poišči matriko $C = [\mathcal{C}]$, ki ji pripada v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Poišči vse lastne vrednosti matrike C.

(c) Poišči *neničeln* vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, da bo veljalo $\|\mathcal{C}\vec{v}\| \geq 3\|\vec{v}\|$, tj. vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, da bo $\mathcal{C}\vec{v}$ vsaj trikrat daljši vektor.

Namig: Če je $\mathcal{C}\vec{v} = \lambda\vec{v}$, potem $\|\mathcal{C}\vec{v}\| = |\lambda|\,\|\vec{v}\|$.

REŠITEV*:*

(a) Naj bosta $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ter $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dva poljubna vektorja iz $\mathbb{R}^3$. Velja:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2) &= \mathcal{C}((x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) = \\
&= \mathcal{C}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) = \\
&= (4(x_1 + \lambda x_2), (y_1 + \lambda y_2) + (z_1 + \lambda z_2) - 4(x_1 + \lambda x_2), 4(z_1 + \lambda z_2)) = \\
&= (4x_1, y_1 + z_1 - 4x_1, 4z_1) + \lambda(4x_2, y_2 + z_2 - 4x_2, 4z_2) = \\
&= \mathcal{C}(x_1, y_1, z_1) + \lambda\mathcal{C}(x_2, y_2, z_2) = \mathcal{C}(\vec{v}_1) + \lambda\mathcal{C}(\vec{v}_2)
\end{aligned}$$

in sledi, da je $\mathcal{C}$ linearna. Matriko $C = [\mathcal{C}]$ dobimo tako, da $\mathcal{C}$ izračunamo na vektorjih standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C}(1, 0, 0) = (4, -4, 0), \quad \mathcal{C}(0, 1, 0) = (0, 1, 0), \quad \mathcal{C}(0, 0, 1) = (0, 1, 4).$$

Te vektorje pa sedaj prepišemo v stolpce matrike C:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Lastne vrednosti matrike C so ničle njenega karakterističnega polinoma:

$$\begin{aligned}
p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)(4-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_1 = 1$ ter $\lambda_{2,3} = 4$.

(c) Če je $\vec{v}$ lastni vektor za lastno vrednost 4, potem

$$\mathcal{C}\vec{v} = 4\vec{v} \quad \text{in zato} \quad \|\mathcal{C}\vec{v}\| = 4\|\vec{v}\| > 3\|\vec{v}\|.$$

Tak neničeln vektor torej obstaja—ena možnost je kar lastni vektor $\vec{v}$ k lastni vrednosti 4. Poiščimo ga! Sistem, ki določa lastni vektor $\vec{v} = (x, y, z)$ je

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Druga vrstica pravi:

$$-4x - 3y + z = 0 \quad \therefore \quad z = 4x + 3y,$$

preostali dve enačbi pa pravita le $0 = 0$. Imamo torej dva lastna vektorja

$$\vec{v}_2 = (1, 0, 4) \quad \text{ter} \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 3).$$

Katerakoli netrivialna linearna kombinacija zgornjih dveh vektorjev ima lastnost iz točke (c).

4. naloga: Reši matrično enačbo

$$AXB = A + B\,,$$

če sta matriki A in B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Namig: Izrazi X z inverzoma matrik A in B...

REŠITEV*: Enačbo $AXB = A + B$ z leve pomnožimo z A^{-1} in dobimo*

$$A^{-1}AXB = A^{-1}(A + B) \quad \therefore \quad XB = I + A^{-1}B\,.$$

Zadnjo enačbo pa še z desne pomnožimo z B^{-1}:

$$XBB^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} \quad \therefore \quad X = B^{-1} + A^{-1}\,.$$

Izračunati moramo torej le inverza matrik A in B ter ju sešteti. Poiščimo oba inverza z Gauss–Jordanovo eliminacijo, najprej A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -6 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

in inverz k A je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Še B^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

in inverz k B je

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pa smo že skoraj končali:

$$X = B^{-1} + A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$