

PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
SKUPAJ	

IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE - računski del

14.6.2006

Navodilo: Vse odgovore dobro utemelji. Naloge so enakovredne. Čas reševanja: 90 minut.

1. naloga: Kot med vektorjema \vec{x} in \vec{y} je enak $\frac{\pi}{4}$ in velja: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 2$. Izračunaj ploščino paralelograma z diagonalama

$$\vec{e} = \vec{x} - \vec{y} \quad \text{in} \quad \vec{f} = 3\vec{x} - 4\vec{y}$$

ter jo primejaj s ploščino paralelograma, ki ga napenjata \vec{x} in \vec{y} .

2. naloga: Poišči premico, ki gre skozi točko $A(0, -1, 1)$ in seka premici

$$p: \frac{x+3}{2} = 2-y=z \quad \text{in} \quad q: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = z-1.$$

3. naloga: Obravnavaj naslednji sistem enačb glede na različne vrednosti parametra a in zapiši vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & & & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & (a^2 - 4)z & = & a + 3 \end{array}$$

4. naloga: Linearni preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sta podani s predpisoma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z) &= (y - x, z - y, x - z), \\ \mathcal{B}(x, y, z) &= (z + 2x, x + 2y, y + 2z). \end{aligned}$$

Naj bo $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{B}$.

- (a) Poišči predpis za preslikavo \mathcal{C} ter kakšni bazi njenega jedra in zaloge vrednosti. Ali je \mathcal{C} injektivna/surjektivna/bijektivna preslikava?
- (b) Poišči matrike, ki ustrezajo linearnim preslikavam \mathcal{A}, \mathcal{B} in \mathcal{C} v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .

REŠITVE:

1. naloga: Najprej izračunamo: $|\vec{x}||\vec{y}| = 2\sqrt{2}$ in $|\vec{x} \times \vec{y}| = 2 = pl_{(\vec{x}, \vec{y})}$. Ploščina paralelograma z diagonalama \vec{e} in \vec{f} je potem enaka

$$pl = \frac{1}{2}|\vec{e} \times \vec{f}| = \frac{1}{2}|\vec{x} \times \vec{y}| = 1 = \frac{1}{2}pl_{(\vec{x}, \vec{y})}.$$

2. naloga: Enačba iskane premice v vektorski obliki: $\vec{r} = (0, -1, 1) + \lambda(1, -2, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. naloga: Za $a = -2$ sistem ni rešljiv, pri $a = 2$ ima neskončno rešitev:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

če pa je $a \neq \pm 2$ je rešitev ena sama:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{a+2} \begin{bmatrix} a+5 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. naloga:

(a) $\mathcal{AB}(x, y, z) = (-x + 2y - z, -x - y + 2z, 2x - y - z)$ in $\mathcal{C}(x, y, z) = (3y, 3z, 3x)$. Jedro preslikave \mathcal{C} vsebuje le ničelni vektor, njena zaloga vrednosti pa je \mathbb{R}^3 . Preslikava \mathcal{C} je zato bijektivna.

(b)

$$[\mathcal{A}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$