RAČUNSKI DEL IZPITA IZ LINEARNE ALGEBRE
(13.6.2007)

Navodilo: Vsako nalogo rešuj na stran, kjer je napisana, ali pa jasno označi mesto z rešitvami. Točkovanje: $20 + 25 + 30 + 25$. Čas reševanja: 90 minut. Srečno!

1. naloga: Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja.

(a) Prepričaj se, da sta tudi vektorja $\vec{a}' = 2\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{b}' = \vec{a} + 2\vec{b}$ linearno neodvisna.

(b) V kakšnem razmerju sta ploščini paralelogramov P in P', če je P paralelogram razpet na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, P' pa paralelogram razpet na vektorja $\vec{a}'$ in $\vec{b}'$?

REŠITEV*:*

(a) Da dokažemo, da sta vektorja $\vec{a}'$ in $\vec{b}'$ linearno neodvisna, moramo iz enačbe $\lambda\vec{a}' + \mu\vec{b}' = \vec{0}$ izpeljati $\lambda = \mu = 0$. Enakost najprej preuredimo:

$$\lambda\vec{a}' + \mu\vec{b}' = \lambda\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) + \mu\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = (2\lambda + \mu)\vec{a} + (\lambda + 2\mu)\vec{b} = \vec{0}.$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, iz zadnje enakosti sledi:

$$\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= 0, \\ \lambda + 2\mu &= 0. \end{aligned}$$

Zgornji homogen sistem pa ima za edino rešitev $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, saj

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Sledi torej $\lambda = \mu = 0$ in vektorja $\vec{a}'$ in $\vec{b}'$ sta linearno neodvisna.

(b) Ploščino paralelogramov P in P' izrazimo z normo vektorskega produkta vektorjev, ki ju razpenjata:

$$\mathrm{pl}_P = \|\vec{a} \times \vec{b}\|, \quad \mathrm{pl}_{P'} = \|\vec{a}' \times \vec{b}'\|.$$

Iz

$$\begin{aligned} \vec{a}' \times \vec{b}' &= \left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = \\ &= 2\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=\vec{0}} + 4\vec{a} \times \vec{b} + \underbrace{\vec{b} \times \vec{a}}_{=-\vec{a}\times\vec{b}} + 2\underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{=\vec{0}} = \\ &= 3\vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

takoj sledi $\mathrm{pl}_{P'} = 3\mathrm{pl}_P$. Razmerje ploščin paralelogramov P in P' je enako $\frac{1}{3}$.

2. naloga: Točke $A(1,0,1)$, $B(4,-1,-1)$ in $C(0,-3,3)$ določajo ravnino Σ, premica p pa ima smerni vektor $\vec{s}=(2,1,-2)$ in gre skozi točko A. Ravnino Σ prezrcalimo čez premico p in dobimo ravnino Σ'. Poišči enačbo ravnine Σ'!

REŠITEV: *Vse kar moramo storiti, je poiskati zrcalni sliki B' in C' točk B in C čez premico p. Ravnina Σ' je potem določena s točkami A, B' in C'.*

Naj bo B_0 točka na premici p, ki je pravokotna projekcija točke B na p. Jasno je

$$\vec{r}_{B_0}=\vec{r}_A+\lambda_0\vec{s}$$

za nek $\lambda_0\in\mathbb{R}$. Ker je B_0 pravokotna projekcija B na p, mora veljati še $(\vec{r}_B-\vec{r}_{B_0})\perp\vec{s}$, tj.

$$(\vec{r}_B-\vec{r}_{B_0})\cdot\vec{s}=0.$$

V to enačbo vstavimo $\vec{r}_{B_0}=\vec{r}_A+\lambda_0\vec{s}$ pa dobimo

$$(\vec{r}_B-\vec{r}_A-\lambda_0\vec{s})\cdot\vec{s}=0 \quad\therefore\quad (\vec{r}_B-\vec{r}_A)\cdot\vec{s}=\lambda_0\|\vec{s}\|^2 \quad\therefore\quad \lambda_0=\frac{(\vec{r}_B-\vec{r}_A)\cdot\vec{s}}{\|\vec{s}\|^2}.$$

Krajevni vektor točke B' dobimo tako, da od $\vec{r}_B$ odštejemo dvakratnik razlike $\vec{r}_{B_0}-\vec{r}_B$. (Skica bi bila dobrodošla ...) Torej

$$\vec{r}_{B'}=\vec{r}_B-2(\vec{r}_{B_0}-\vec{r}_B)=2\vec{r}_{B_0}-\vec{r}_B=2\vec{r}_A+2\lambda_0\vec{s}-\vec{r}_B,$$

kjer je λ_0 tisti iz prejšnje enačbe. Prav taka formula pa velja tudi za C', tj.

$$\vec{r}_{C'}=2\vec{r}_A+2\lambda_1\vec{s}-\vec{r}_C\,,\quad \lambda_1=\frac{(\vec{r}_C-\vec{r}_A)\cdot\vec{s}}{\|\vec{s}\|^2}.$$

Poračunamo

$$\lambda_0=\frac{(\vec{r}_B-\vec{r}_A)\cdot\vec{s}}{\|\vec{s}\|^2}=\frac{(3,-1,-2)\cdot(2,1,-2)}{2^2+1^2+(-2)^2}=\frac{6-1+4}{9}=1,$$

zato

$$\vec{r}_{B'}=2\,(1,0,1)+2\cdot 1\,(2,1,-2)-(4,-1,-1)=(2,3,-1).$$

Podobno

$$\lambda_1=\frac{(\vec{r}_C-\vec{r}_A)\cdot\vec{s}}{\|\vec{s}\|^2}=\frac{(-1,-3,2)\cdot(2,1,-2)}{2^2+1^2+(-2)^2}=\frac{-2-3-4}{9}=-1$$

in

$$\vec{r}_{C'}=2\,(1,0,1)+2\cdot(-1)\,(2,1,-2)-(0,-3,3)=(-2,1,3).$$

Imamo torej prezrcaljeni točki $B'(2,3,-1)$ in $C'(-2,1,3)$. Od tod lahko dobimo normalni vektor ravnine Σ', le-ta je vzporeden vektorskemu produktu

$$(\vec{r}_{B'}-\vec{r}_A)\times(\vec{r}_{C'}-\vec{r}_A)=(1,3,-2)\times(-3,1,2)=(8,4,10).$$

Vzamemo lahko kar $\vec{n}_{\Sigma'}=(4,2,5)$. Iz

$$\vec{n}_{\Sigma'}\cdot\vec{r}_A=(4,2,5)\cdot(1,0,1)=4+5=9$$

sledi, da je enačba iskane ravnine

$$\Sigma':4x+2y+5z=9.$$

3. naloga: Linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pripada v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Naj bo $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\}$ podprostor v $\mathbb{R}^3$. Ali za vsak $\vec{u} \in \mathcal{U}$ velja $\mathcal{A}(\vec{u}) \in \mathcal{U}$? (Pravimo, da je $\mathcal{U}$ *invarianten* podprostor za $\mathcal{A}$.)

(b) Poišči vse lastne vrednosti preslikave $\mathcal{A}$, tj. lastne vrednosti matrike A.

(c) Poišči tiste lastne vektorje preslikave $\mathcal{A}$, ki ležijo v podprostoru $\mathcal{U}$!

REŠITEV:

(a) Vsak vektor $\vec{u} \in \mathcal{U}$ je oblike $\vec{u} = (x, y, x + y)$, v standardni bazi $\mathbb{R}^3$ pa mu pripada stolpec

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Vektorju $\mathcal{A}(\vec{u})$ pa v standardni bazi $\mathbb{R}^3$ pripada

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ 3y \\ -2x + 3y \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi $\mathcal{A}(x, y, x + y) = (-2x, 3y, -2x + 3y)$, v tem vektorju pa je tretja komponenta očitno vsota prvih dveh. Sledi $\mathcal{A}(\vec{u}) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ je torej invarianten podprostor za $\mathcal{A}$.

(b) Lastne vrednosti matrike so ničle karakterističnega polinoma

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -2 & 2 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ -6 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (3 - \lambda)(-(4 + \lambda)(4 - \lambda) + 12) = (3 - \lambda)(2 + \lambda)(2 - \lambda).$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ ter $\lambda_3 = 3$.

(c) V točki (a) smo izračunali $\mathcal{A}(x, y, x + y) = (-2x, 3y, -2x + 3y)$. Če v to enakost vstavimo $x = 1$ in $y = 0$, dobimo

$$\mathcal{A}(1, 0, 1) = (-2, 0, -2) = -2\,(1, 0, 1).$$

Vektor $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$ je torej lastni vektor (k lastni vrednosti -2) za $\mathcal{A}$, ki leži v $\mathcal{U}$. Če v prejšnjo enakost vstavimo še $x = 0$ in $y = 1$, dobimo še lastni vektor $(0, 1, 1)$, saj

$$\mathcal{A}(0, 1, 1) = (0, 3, 3) = 3\,(0, 1, 1).$$

Dobili smo torej še lastni vektor $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$ (k lastni vrednosti 3) za $\mathcal{A}$, ki leži v $\mathcal{U}$. To pa so že vsi lastni vektorji za $\mathcal{A}$, ki ležijo v $\mathcal{U}$, saj je množica $\{\vec{u}_1, \vec{u}_3\}$ baza za $\mathcal{U}$.

OPOMBA: *Nič ne bi bilo narobe, če bi lastne vektorje poiskali na 'običajen' način, vendar končamo precej hitreje, če lastne vektorje kar 'uganemo'.*

4. naloga: Reši matrično enačbo

$$A(X + A) = 2X + A,$$

če je A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

REŠITEV: *Najprej izpeljemo*

$$A(X + A) = 2X + A \quad \therefore \quad AX + A^2 = 2X + A \quad \therefore \quad AX - 2X = A - A^2$$
$$\therefore \quad (A - 2I)X = A(I - A) \quad \therefore \quad X = (A - 2I)^{-1}A(I - A).$$

Poračunamo še:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

in

$$A(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Matriko X lahko sedaj poiščemo z Gauss—Jordanovo eliminacijo

$$[(A - 2I) \mid A(I - A)] \sim \cdots \sim [I \mid (A - 2I)^{-1}A(I - A)] = [I \mid X].$$

Konkretno:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 3 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -9 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 4 & -7 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Od tod preberemo

$$X = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -3 & -6 & 9 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$