1. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE (1.12.2006)

Navodilo: Vsako nalogo rešuj na stran, kjer je napisana, ali pa jasno označi mesto z rešitvami. Točkovanje: $35 + 30 + 35$. Čas reševanja: 60 minut. Srečno!

1. naloga: Premica p je dana z enačbo

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = 1 - z\,,$$

Točke $A(1, 0, 1)$, $B(3, 5, 5)$ in $C(5, 2, 1)$ pa določajo ravnino Σ. Poišči enačbo premice q, ki leži v ravnini Σ in seka premico p pod pravim kotom.

REŠITEV*: Najprej poiščimo enačbo ravnine* Σ*. Če so* $\vec{r}_A$*,* $\vec{r}_B$ *in* $\vec{r}_C$ *krajevni vektorji točk* A*,* B *in* C*, je normalni vektor* $\vec{n}$ *ravnine* Σ *vzporeden vektorskemu produktu*

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = (2, 5, 4) \times (4, 2, 0) = (-8, 16, -16)\,.$$

Vzeli bomo kar $\vec{n} = (1, -2, 2)$*. Upoštevamo še* $d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A = (1, -2, 2) \cdot (1, 0, 1) = 3$ *in dobimo enačbo ravnine*

$$\Sigma : x - 2y + 2z = 3\,.$$

Poiskati moramo še smerni vektor premice q *in eno točko na* q*. Ker je* q *pravokotna na* p *in leži v ravnini* Σ*, sledi, da mora biti smerni vektor premice* q *hkrati pravokoten na* $\vec{s}_p$ *(smerni vektor premice* p*) in* $\vec{n}$*. Vzamemo kar vektorski produkt*

$$\vec{s}_p \times \vec{n} = (2, 1, -1) \times (1, -2, 2) = (0, -5, -5)$$

in smerni vektor premice q *je* $\vec{s}_q = (0, 1, 1)$ *(vektor vzporeden* $(0, -5, -5)$*). Točko na* q *bomo dobili, če poiščemo presečišče premice* p *in ravnine* Σ*. Premico* p *opišemo parametrično*

$$p : \vec{r}(\lambda) = (1, 2, 1) + \lambda(2, 1, -1)\,,$$

to parametrizacijo pa vstavimo v enačbo ravnine Σ

$$(1 + 2\lambda) - 2(2 + \lambda) + 2(1 - \lambda) = 3\,.$$

Rešitev te enačbe je $\lambda = -2$*, v preseku* $p \cap \Sigma$ *je torej le točka* $T(-3, 0, 3)$*. Parametrizacija premice* q *je potem*

$$q : \vec{r}(\lambda) = (-3, 0, 3) + \lambda(0, 1, 1)\,.$$

2. naloga: V paralelogramu $ABCD$ deli točka P stranico BC v razmerju $2 : 1$, točka R pa stranico CD v razmerju $1 : 2$. Presečišče daljic DP in BR označimo s Q.

(a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AQ}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

(b) Kaj lahko poveš o ploščinah trikotnikov ABQ in AQD?

REŠITEV*:*

(a) Ko si narišemo skico, vidimo, da lahko vektor $\overrightarrow{AQ}$ *izrazimo na dva načina:*

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \vec{a} + \lambda\overrightarrow{BR} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \tfrac{1}{3}\vec{a})\,,$$
$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \vec{b} + \mu\overrightarrow{DP} = \vec{b} + \mu(\vec{a} - \tfrac{1}{3}\vec{b})\,.$$

Tu sta λ *in* μ *dve realni števili, ki ju moramo še določiti. Vendar*

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \tfrac{1}{3}\vec{a}) &= \vec{b} + \mu(\vec{a} - \tfrac{1}{3}\vec{b}) \quad \therefore \\
\vec{a} - \frac{\lambda}{3}\vec{a} - \mu\vec{a} + \lambda\vec{b} - \vec{b} + \frac{\mu}{3}\vec{b} &= \vec{0} \quad \therefore \\
\Big(1 - \frac{\lambda}{3} - \mu\Big)\vec{a} + \Big(\lambda - 1 + \frac{\mu}{3}\Big)\vec{b} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

in iz linearne neodvisnosti vektorjev $\vec{a}$ *in* $\vec{b}$ *sledi, da mora veljati*

$$1 - \frac{\lambda}{3} - \mu = 0 \quad \textit{ter} \quad \lambda - 1 + \frac{\mu}{3} = 0\,.$$

Drugo enačbo pomnožimo s 3 *in jo prištejemo prvi, pa dobimo*

$$-2 + \tfrac{8}{3}\lambda = 0$$

ali $\lambda = \frac{3}{4}$. *Sledi* $\overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{3}{4}\big(\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}\big) = \frac{3}{4}\big(\vec{a} + \vec{b}\big)$.

(b) *Ploščini trikotnikov lahko izrazimo s pomočjo vektorskega produkta dveh stranic. Velja*

$$\begin{aligned}
\mathrm{pl}_{ABQ} &= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AQ}\| = \tfrac{1}{2}\|\vec{a} \times \tfrac{3}{4}\big(\vec{a} + \vec{b}\big)\| = \\
&= \tfrac{3}{8}\|\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=\vec{0}} + \vec{a} \times \vec{b}\| = \tfrac{3}{8}\|\vec{a} \times \vec{b}\|
\end{aligned}$$

in podobno

$$\begin{aligned}
\mathrm{pl}_{AQD} &= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AQ} \times \overrightarrow{AD}\| = \tfrac{1}{2}\|\tfrac{3}{4}\big(\vec{a} + \vec{b}\big) \times \vec{b}\| = \\
&= \tfrac{3}{8}\|\vec{a} \times \vec{b} + \underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{=\vec{0}}\| = \tfrac{3}{8}\|\vec{a} \times \vec{b}\|\,.
\end{aligned}$$

Ploščini trikotnikov ABQ *in* AQD *sta torej enaki.*

3. naloga: Ugotovi, pri katerih vrednostih parametrov a in $b \in \mathbb{R}$ je množica

$$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - ay = b, x - az = b\}$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. V teh primerih poišči še bazo za $\mathcal{U}$ in določi njegovo dimenzijo. Ali je dimenzija prostora $\mathcal{U}$ odvisna od parametrov a in b?

REŠITEV: *Nujno mora veljati* $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \mathcal{U}$, *torej* $0 - a \cdot 0 = b$ *ali* $b = 0$. *Prepričajmo se, da je tedaj* $\mathcal{U}$ *res vektorski podprostor v* $\mathbb{R}^3$; *neodvisno od* $a \in \mathbb{R}$. *Vzemimo vektorja* (x_1, y_1, z_1) *ter* $(x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{U}$, *tj. taki trojici realnih števil, da velja*

$$x_1 - ay_1 = 0, x_1 - az_1 = 0 \quad \textit{ter} \quad x_2 - ay_2 = 0, x_2 - az_2 = 0\,.$$

Tedaj je

$$(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)\,.$$

Ugotoviti moramo le še, da za to trojico veljata oba pogoja iz definicije $\mathcal{U}$. *Velja:*

$$\begin{aligned}
x_1 + \lambda x_2 - a(y_1 + \lambda y_2) &= \underbrace{x_1 - ay_1}_{=0} + \lambda\underbrace{(x_2 - ay_2)}_{=0} = 0 \\
\textit{ter} \quad x_1 + \lambda x_2 - a(z_1 + \lambda z_2) &= \underbrace{x_1 - az_1}_{=0} + \lambda\underbrace{(x_2 - az_2)}_{=0} = 0\,,
\end{aligned}$$

torej je $\mathcal{U}$ res podprostor v $\mathbb{R}^3$.

Ko $a \neq 0$ lahko enačbi $x - ay = 0$ in $x - az = 0$ delimo z a in preuredimo, da dobimo $y = \frac{x}{a}$ ter $z = \frac{x}{a}$. Prostor $\mathcal{U}$ je potem $\mathcal{U} = \{(x, \frac{x}{a}, \frac{x}{a}) \mid x \in \mathbb{R}\}$, baza za $\mathcal{U}$ pa je $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{(a, 1, 1)\}$ (vstavimo $x = a$) in $\dim \mathcal{U} = 1$.

V primeru $a = 0$ pa obe enačbi iz definicije prostora $\mathcal{U}$ pravita isto; $x = 0$. Tedaj je $\mathcal{U} = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ in $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Torej je $\dim \mathcal{U} = 2$, ko $a = 0$.

Nalogo se je dalo rešiti tudi s povsem geometrijskim premislekom. Enačbi

$$x - ay = b \quad \textit{ter} \quad x - az = b$$

namreč določata dve ravnini v prostoru $\mathbb{R}^3$, množica $\mathcal{U}$ pa je presek teh dveh ravnin. Ravnina pa je vektorski podprostor le, ko $b = 0$. Podprostor $\mathcal{U}$ je torej presek dveh podprostorov in je zato vektorski podprostor. Dimenzija pa je seveda odvisna od tega, kako se ti dve ravnini sekata. Če se sekata v premici (ko $a \neq 0$), je $\dim \mathcal{U} = 1$. Če pa obe ravnini sovpadata (ko $a = 0$), je presek seveda taista ravnina in zato $\dim \mathcal{U} = 2$.