2. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE (5.1.2007)

Navodilo: Vsako nalogo rešuj na stran, kjer je napisana, ali pa jasno označi mesto z rešitvami. Točkovanje: $30 + 35 + 35$. Čas reševanja: 60 minut. Srečno!

1. naloga: Reši t.i. Sylvestrovo matrično enačbo

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(Poiskati moraš tako 2×2 matriko X, da bo veljala zgornja enakost.)
Namig: Zapiši

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

zmnoži in seštej matrike na levi strani, nato pa reši ustrezen sistem enačb s štririmi neznankami.

REŠITEV*: Če upoštevamo namig, dobimo na levi strani enačbe naslednje*

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_3 & -2x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 - x_3 & 2x_2 - x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & -2x_1 + x_2 \\ x_3 & -2x_3 + x_4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_3 & -2x_1 - x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 & 2x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Enačimo levo in desno stran

$$\begin{bmatrix} -x_1 + 3x_3 & -2x_1 - x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 & 2x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matriki pa sta enaki tedaj in le tedaj, ko so vsi elementi na ustreznih mestih enaki. Imamo torej enostaven sistem

$$-x_1 \quad +3x_3 \quad = 8 \tag{1}$$
$$-2x_1 - x_2 \quad + 3x_4 = 8 \tag{2}$$
$$2x_1 \quad = 2 \tag{3}$$
$$+ 2x_2 - 2x_3 \quad = -2, \tag{4}$$

ki ga lahko rešimo direktno. Iz enačbe (3) dobimo $x_1 = 1$*, nato iz enačbe (1)* $x_3 = 3$ $\ldots x_2 = 2$ *in* $x_4 = 4$*. Matrika* X *je torej*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. naloga: Na prostoru $P_2(\mathbb{R})$ – polinomov stopnje kvečjemu 2 – sta preslikavi

$$\mathcal{R}, \mathcal{S} \colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$$

dani s predpisoma

$$\mathcal{R}(p)(x) = x^2\, p\left(\tfrac{1}{x}\right) ,$$
$$\mathcal{S}(p)(x) = p\,(x-1) .$$

(a) Prepričaj se, da sta preslikavi $\mathcal{R}$ in $\mathcal{S}$ linearni.

(b) Poišči matriki, ki ustrezata preslikavama $\mathcal{R}$ in $\mathcal{S}$ v standardni bazi prostora $P_2(\mathbb{R})$, tj. v (urejeni) bazi $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

(c) Zapiši še matriko preslikave $\mathcal{C} = \mathcal{R}\mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{R}$ v standardni bazi prostora $P_2(\mathbb{R})$.

REŠITEV*:*

(a) Preveriti moramo, da za poljubna polinoma $p,q \in P_2(\mathbb{R})$ *in vsak skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *veljata enakosti* $\mathcal{R}(p + \lambda q) = \mathcal{R}(p) + \lambda\mathcal{R}(q)$ *ter* $\mathcal{S}(p + \lambda q) = \mathcal{S}(p) + \lambda\mathcal{S}(q)$. *Začnimo z* $\mathcal{R}$*:*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(p+\lambda q)(x) &= x^2(p+\lambda q)(\tfrac{1}{x}) = x^2(p(\tfrac{1}{x}) + \lambda q(\tfrac{1}{x})) = \\ &= x^2 p(\tfrac{1}{x}) + \lambda x^2 q(\tfrac{1}{x}) = \mathcal{R}(p)(x) + \lambda\mathcal{R}(q)(x)\end{aligned}$$

in $\mathcal{R}$ *je linearna. Še* $\mathcal{S}$*:*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(p+\lambda q)(x) &= (p+\lambda q)(x-1) = (p(x-1) + \lambda q(x-1)) = \\ &= p(x-1) + \lambda q(x-1) = \mathcal{S}(p)(x) + \lambda\mathcal{S}(q)(x)\end{aligned}$$

in tudi $\mathcal{S}$ *je linearna.*

(b) Vse kar moramo storiti je 'izračunati' $\mathcal{R}$ *in* $\mathcal{S}$ *na baznih elementih. Za* $\mathcal{R}$ *velja:*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{1})(x) &= x^2 \cdot \mathbf{1}(\tfrac{1}{x}) &&= x^2 \cdot 1 = x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 ,\\ \mathcal{R}(\mathbf{x})(x) &= x^2 \cdot \mathbf{x}(\tfrac{1}{x}) &&= x^2 \cdot \tfrac{1}{x} = x \;\; = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 ,\\ \mathcal{R}(\mathbf{x^2})(x) &= x^2 \cdot \mathbf{x^2}(\tfrac{1}{x}) &&= x^2 \cdot \tfrac{1}{x^2} = 1 \;\; = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 .\end{aligned}$$

Števila, ki smo jih dobili poleg baznih elementov na koncu vsake vrstice sedaj 'zložimo' v stolpce matrike

$$R = [\mathcal{R}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Enako stvar ponovimo še s preslikavo $\mathcal{S}$*:*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbf{1})(x) &= \mathbf{1}(x-1) &&= \quad 1 &&= \;\; 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 ,\\ \mathcal{S}(\mathbf{x})(x) &= \mathbf{x}(x-1) &&= \; x-1 &&= -1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 ,\\ \mathcal{S}(\mathbf{x^2})(x) &= \mathbf{x^2}(x-1) &&= (x-1)^2 &&= \;\; 1\cdot 1 - 2\cdot x + 1\cdot x^2 ,\end{aligned}$$

pa dobimo matriko

$$S = [\mathcal{S}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(c) *Množenju (kompozitumu) linearnih preslikav ustreza množenje matrik, to pomeni*

$$C = [\mathcal{C}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [\mathcal{R}\mathcal{S} - \mathcal{S}\mathcal{R}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [\mathcal{R}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}[\mathcal{S}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} - [\mathcal{S}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}[\mathcal{R}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = RS - SR\,.$$

Izračunati moramo torej le produkta matrik RS *in* SR *ter ju odšteti:*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. naloga: Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Če obstaja, poišči še matriko P in njen inverz P^{-1}, da bo $P^{-1}AP$ diagonalna.

REŠITEV*: Lastne vektorji $\vec{v}$ so netrivialne rešitve enačbe $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, lastne vrednosti pa seveda tisti skalarji λ, pri katerih take (netrivialne) rešitve obstajajo. Enačbo lahko zapišemo tudi v obliki*

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}\,.$$

Ta sistem pa ima netrivialne rešitve le, ko velja

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Izračunamo

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

in ničle karakterističnega polinoma so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ter $\lambda_3 = 3$. Za vsako od lastnih vrednosti sedaj rešimo še ustrezen homogen sistem, da dobimo pripadajoči lastni vektor.

Pri $\lambda_1 = 1$ rešujemo sistem $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = (A - I)\vec{v}_1 = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Torej je $x_1 = 0$, $z_1 = 0$, y_1 pa je lahko poljuben. Prvi lastni vektor je

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Za y_1 lahko izberemo katerokoli neničelno število.)

Pri $\lambda_2 = 2$ dobimo sistem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Tu je $y_2 = 0$ *in* $x_2 + z_2 = 0$ *ali* $x_2 = -z_2$, z_2 *(ali* x_2*) pa lahko še poljubno izberemo. Lastni vektor je*

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Še lastna vrednost $\lambda_3 = 3$ *ostane:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

zato $z_3 = 0$, $x_3 = 2y_3$ *in lastni vektor je*

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ker smo dobili tri linearno neodvisne lastne vektorje $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, *je* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ *baza za* $\mathbb{R}^3$. *Prehodna matrika* P *torej obstaja, njeni stolpci so kar lastni vektorji:*

$$P = [\, \vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njen inverz; P^{-1} *poiščemo z Gaussovim postopkom (*$[P \mid I] \sim [I \mid P^{-1}]$*):*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

in

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika A *je seveda podobna diagonalni, tj. velja*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$