Domače vaje iz LINEARNE ALGEBRE - Evklidski prostori

1. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ definirajmo (nov) skalarni produkt s predpisom:

$$\langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle = a(x-z) + 2by + c(2z-x).$$

Preveri, da predpis res ustreza vsem lastnostim skalarnega produkta! V tem novem skalarnem produktu ortonormiraj standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

2. V prostoru polinomov $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ imamo skalaren produkt

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

Poišči ortonormirano bazo podprostora $\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p'(-1) = p'(1)\}$ glede na ta skalaren produkt.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ imamo vektorje $a_1 = (1,0,1,0)$, $a_2 = (0,-1,1,0)$, in $a_3 = (-1,0,0,1)$.

(a) Ortonormiraj množico $\{a_1, a_2, a_3\}$ glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^4$.

(b) Označimo z $\mathcal{A}$ podprostor v $\mathbb{R}^4$, napet na vektorje a_1, a_2 in a_3. Izračunaj razdaljo vektorja $b = (1,0,0,0)$ do prostora $\mathcal{A}$.

4. Naj bo $W = \{(x,y,z,w) \mid x+z=0 \quad \text{in} \quad 2x+w=y\}$. Pokaži, da je W linearen podprostor prostora $\mathbb{R}^4$ in poišči tisti element $w \in W$, ki je najmanj oddaljen od elementa $v = (-1,2,6,0)$. Kolikšna je ta razdalja?

5. V prostoru polinomov $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ imamo predpis

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\rangle = a_0b_0 + a_1b_2 + 2a_1b_1 + a_2b_1 + 2a_2b_2.$$

(a) Pokaži, da ta predpis predstavlja skalarni produkt na $P_2(\mathbb{R})$.

(b) Poišči tisti polinom v podprostoru $\mathcal{L}(x^2, x+1)$, ki je najbliže polinomu x^2+x+2.

6. Naj bo prostor $\mathbb{R}^4$ opremljen z običajnim skalarnim produktom. Vsakemu od naslednjih prostorov poišči kakšno ortonormirano bazo:

$$\mathcal{V}_1 = (1,2,3,4)^{\perp},$$
$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1^{\perp},$$
$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2^{\perp},$$
$$\mathcal{V}_4 = (\mathcal{L}\{(1,2,3,4)\})^{\perp}.$$

REŠITVE

1. *V novem skalarnem produktu ortonormirano standardno bazo sestavljajo vektorji:* $(1,0,0)$, $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ *in* $(1,0,1)$.

2. *Eno od baz prostora $\mathcal{U}$ sestavljajo polinomi $\{1, x, x^3\}$. Če to množico ortonormiramo glede na podan skalarni produkt dobimo bazo* $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{5\sqrt{14}}{4}x^3 - \frac{3\sqrt{14}}{4}x\right\}$.

3. *(a) Ortonormirana množica je* $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0), \frac{\sqrt{6}}{3}\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 0\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\right\}$. *(b) Razdalja vektorja b do prostora $\mathcal{A}$ je enaka* $d(b,\mathcal{A}) = \|b - proj_{\mathcal{A}} b\| = \frac{1}{2}$.

4. *W je linearen podprostor prostora* $\mathbb{R}^4$ *z bazo* $\mathcal{B}_W = \{(1,0,-1,-2),(0,1,0,1)\}$. *Za iskanje najbližjega elementa potrebujemo ortonormirano bazo:* $\mathcal{B}_W^o = \{\frac{\sqrt{6}}{6}(1,0,-1,-2), \frac{\sqrt{3}}{6}(1,3,-1,1)\}$. *Potem je iskani* $w \in W$, *ki je najmanj oddaljen od* v *enak* $w = proj_W v = \frac{1}{12}(-15,-3,15,27)$, *razdalja pa je* $\frac{\sqrt{131}}{2}$.

5. *(b)* $\frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{7}{5}$

6. *Ortonormirano baza prostora* $\mathcal{V}_1$ *je npr.* $\mathcal{B}_{\mathcal{V}_1} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{70}}(-3,-6,5,0), \frac{1}{\sqrt{105}}(-2,-4,-6,7)\right\}$, *za ostale prostore pa velja:* $\mathcal{V}_2 = \mathcal{L}\{(1,2,3,4)\}$ *in* $\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_1$.