

## POTENČNE VRSTE

Vprašanja:

1. Zapiši formulo za  $n$ -ti Taylorjev polinom funkcije  $f$  v točki  $p$ .
2. Razloži formulo:  $|f(x) - T_1(x)| \leq (b - a) \int_a^b |f''(t)| dt$ .
3. Zapiši formulo za binomsko vrsto  $(1 + x)^\alpha$  pri poljubnem  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
4. Kako lahko s Taylorjevo neenakostjo ocenimo  $|f(x) - T_1(x)|$ , če je  $f^{(n+1)}$  zvezna funkcija na  $[a, b]$  ?
5. Kako se glasi kvocientni kriterij za konvergenco potenčnih vrt? Kaj pa korenski kriterij?
6. Kaj je konvergenčni polmer potenčne vrste in kako ga izračunamo? Kaj je konvergenčni interval potenčne vrste?
7. Kaj je to analitična funkcija?
8. Opiši postopek množenja dveh potenčnih vrst.
9. Kakšne so relacije med pojmi: potenčna vrsta, Taylorjeva vrsta, MacLaurinova vrsta?
10. Kaj velja glede odvajanja in integriranja potenčnih vrst?

Naloge:

1. Poišči  $n$ -ti Taylorjev polinom funkcij
  - a)  $f(x) = \sin x$ ,
  - b)  $f(x) = e^{2x}$ ,
  - c)  $f(x) = \ln x$ .
2. Poišči napako pri aproksimaciji funkcije  $f(x) = \sin x$  na intervalu  $[-0.2, 0.2]$  s Taylorjevim polinomom 2. stopnje v točki  $p = 0$ .
3. Poišči MacLaurinovo vrsto za  $f(x) = e^{-x^3}$ .
4. Poišči konvergenčni polmer vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} n2^n(x - 3)^n$ .
5. Poišči Taylorjevo vrsto za  $f(x) = \ln x$  v točki  $p = 2$ .
6. Z odvajanjem funkcije  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  in njene potenčne vrste poišči Maclaurinovo vrsto za funkcijo  $(1 - x)^{-2}$ .
7. Izračunaj  $(\int_0^{1/3} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}) dx$  tako da členoma integriraš vrsto pod integralnim znakom!
8. Poišči Taylorjev razvoj funkcije  $f(x) = \cos x$  v točki  $p = \pi$  ter konvergenčni interval.

## FOURIEROVE VRSTE

Vprašanja:

1. Zapiši Fourierove koeficiente in Fourierovo vrsto  $F(x)$  funkcije  $f(x)$ , integrabilne na intervalu  $[-\pi, \pi]$ .
2. Kaj velja glede zveze med funkcijo  $f(x)$  in njeno Fourierovo vrsto  $F(x)$  na intervalu  $(a, b)$ , če je  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva? Zapiši ustrezni formuli za  $F(x)$  v točkah  $x \in (-\pi, \pi)$  in v robnih točkah  $F(\pi)$  in  $F(-\pi)$ .
3. Kaj velja za Fourierove koeficiente  $a_n$  in  $b_n$  funkcije  $f(x)$ , ki je na intervalu  $[d, -d]$  soda, in kaj velja za te koeficiente, če je funkcija  $f(x)$  liha?
4. Vzemimo, da je  $f(x)$  zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva na intervalu  $[0, \pi]$ . Zapiši Fourierovo funkcijo za to funkcijo na intervalu  $[0, \pi]$ . Kako pa dobimo razvrstitev iste funkcije po samih kosinusih? In kako dobimo razvrstitev po samih sinusih?
5. Kaj je soda in kaj liha razširitev funkcije  $f(x)$ , definirane na intervalu  $[0, \pi]$ ?

Naloge:

1. a) Razvij v Fourierovo vrsto funkcijo  $f(x) = x$  na intervalu  $(-\pi, \pi)$ .  
b) Za katere  $x$  je funkcija enaka vsoti vrste?  
c) Izrazi  $\pi/2$  v obliki konvergentne številske vrste.
- d) Poišči vsoto vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ .
2. Razvij na intervalu  $[-\pi, \pi]$  v Fourierovo vrsto funkcijo  $f(x) = x^2$ .
3. Razvij na intervalu  $[-\pi, \pi]$  v Fourierovo vrsto funkcijo  $f(x) = \cos x$ .
4. Razvij v Fourierovo vrsto funkcijo  $f(x)$ , definirano takole:

$$f(x) = x, \pi < x \leq 0,$$

$$f(x) = 2x, 0 \leq x \leq \pi.$$

5. Na tri načine razvij funkcijo  $f : [0, -\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \pi - x$ , v Fourierovo vrsto: najprej kot funkcijo s periodo  $\pi$ , nato poišči razvrstitev po samih kosinusih in nazadnje še razvrstitev po samih sinusih!