# Domače vaje iz LINEARNE ALGEBRE - Linearne preslikave

1. Podana je preslikava: $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $A(x, y, z, w) = (x - y, y + z, z, x + w)$. Pokaži, da je preslikava $A$ linearna, nato pa poišči kakšno bazo jedra in zaloge vrednosti te preslikave ter ugotovi, ali je injektivna/surjektivna/bijektivna.

2. Podana je preslikava: $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A\vec{x} = (\vec{b}\,\vec{x})\vec{a} + (\vec{a}\,\vec{x})\,\vec{b}$. Pokaži, da je preslikava $A$ linearna, nato pa poišči kakšno bazo jedra in zaloge vrednosti te preslikave ter ugotovi, ali je injektivna/surjektivna/bijektivna.

3. Podana je preslikava: $A : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $(Ap)(x) = p(x - 1) - p(x + 2) + p(x + 1)$. Pokaži, da je preslikava $A$ linearna, nato pa poišči kakšno bazo jedra in zaloge vrednosti te preslikave ter ugotovi, ali je injektivna/surjektivna/bijektivna.

4. Podana je preslikava $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\quad A(x, y, z) = (x + 2y, 2x + 2z, 2x + y + 2z, 3x + y - z)$.
   (a) Pokaži, da je $A$ linearna preslikava.
   (b) Določi število $b$ tako, da bo vektor $y = (1, 0, b, 2b) \in Im(A)$ in poišči vse vektorje, ki jih preslikava $A$ preslika v $y$.
   (c) Preslikavi $A$ priredi matriko glede na standardne baze podanih prostorov.

5. Podana je preslikava $A : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $\quad (Ap)(x) = (x^2 + 1)p''(x) - (x + 1)p'(x) + 3p(x)$.
   (a) Pokaži, da je $A$ linearna preslikava.
   (b) Poišči inverz preslikave $A$, če obstaja.
   (c) Preslikavi $A$ priredi matriko glede na standardne baze podanih prostorov.

6. Podana je preslikava $A : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad A(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b, b + 2c, c + 3d)$.
   (a) Pokaži, da je preslikava $A$ linearna.
   (b) Poišči kakšno bazo jedra in zaloge vrednosti preslikave ter ugotovi, ali je injektivna/surjektivna/bijektivna.
   (c) Preslikavi $A$ priredi matriko glede na standardne baze podanih prostorov.

7. Linearna preslikava $L : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ je definirana s predpisoma: $L(t - 1) = t + 2$ in $L(t + 1) = 2t + 1$.
   (a) Izračunaj $L(5t + 1)$.
   (b) Določi $L(at + b)$ za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$.
   (c) Zapiši matriko preslikave $L$ glede na bazo $\mathcal{B} = \{t - 1, t + 1\}$.

8. Določi parametre $a$, $b$ in $c$ tako, da bo vektor $(1, 1, 1)$ v jedru linearne preslikave $C$, ki ji v standardni bazi pripada matrika:
$$[C] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & 2b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}.$$
   Za tako določene $a$, $b$ in $c$ poišči kakšno bazo zaloge vrednosti preslikave $C$.

9. Preslikava $A : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ je podana s predpisom: $(Ap)(x) = (x^2 + 1)p''(x) - (x + 1)p'(x) + 3p(x)$. Ugotovi, ali je preslikava $A$ obrnljiva in poišči njen obrat (če obstaja).

**10.** Linearni preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sta podani s predpisoma:

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x),$$
$$\mathcal{B}(x, y, z) = (x - 2y, y - 2z, z - 2x).$$

Naj bo $\mathcal{C} = (\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathcal{A}$.

(a) Poišči predpis za preslikavo $\mathcal{C}$ ter kakšni bazi njenega jedra in zaloge vrednosti. Ali je $\mathcal{C}$ bijektivna preslikava?

(b) Zapiši matrike preslikav $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$!

**11.** Naj bo $\mathcal{D} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ operator odvajanja (tj. $\mathcal{D}(p) = p'$).

(a) Pokaži, da je $\mathcal{D}$ linearna preslikava.

(b) Zapiši matriko, ki pripada $\mathcal{D}$ v bazi $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + 2x, x + x^2\}$.

(c) Ugotovi, ali je $\mathcal{D}$ bijekcija.

**12.** Naj bo linearna preslikava $F : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom $F(ax^2 + bx + c) = (a + 2b + c, 2b + 2c, a - c)$. $\mathcal{S}$ naj bo standardna baza prostora $P_2$, za bazo $\mathbb{R}^3$ pa vzemimo $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

(a) Pokaži, da je $F$ linearna preslikava.

(b) Poišči matriko, ki ustreza preslikavi $F$ v bazah $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$: $[F]_{\mathcal{S},\mathcal{B}}$.

(c) Poišči še kakšno bazo za $ImF$ in ugotovi, ali je preslikava $F$ bijektivna.

**13.** Naj bo preslikava $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3).$$

(a) Pokaži, da je preslikava $L$ linearna.

(b) Poišči bazi jedra in zaloge vrednosti preslikave $L$.

(c) Naj bo $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$. Pokaži, da je to urejena baza prostora $\mathbb{R}^4$.

(d) Naj $\mathcal{S}$ označuje standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$. Določi matriko $[L]_{\mathcal{BS}}$, ki pripada dani linearni preslikavi $L$ v bazah $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$.

**14.** Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bazi $\mathcal{U} = \{e_1, e_2, e_3\}$ pripada matrika

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}^2$ v bazi $\mathcal{U}' = \{f_1, f_2, f_3\}$, kjer so $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Kolikšen je rang preslikave $\mathcal{A}^2$?

**15.** V prostoru $\mathbb{R}^2$ imamo bazi $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ in $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$, v prostoru $\mathbb{R}^3$ pa bazi $\mathcal{C}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ in $\mathcal{C}_2 = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\}$. Preslikavi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ glede na bazi $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{C}_1$ pripada matrika

$$[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $[f]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}$, ki ustreza preslikavi $f$ glede na bazi $\mathcal{B}_2$ in $\mathcal{C}_2$. Kolikšen je rang preslikave $f$?

**16.** Linearni preslikavi $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$ ustreza matrika

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $[\mathcal{L}]_{\mathcal{B}}$, ki ustreza tej preslikavi v bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)\}$. Kolikšen je rang preslikave $\mathcal{L}$?

**REŠITVE**

*(Objavljene so le rešitve dokončno oddanih nalog. Za pravilnost rešitev odgovarjata demonstratorja.)*

**1.** *Preslikava $A$ je linearna,* $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ *in ena od baz zaloge vrednosti je*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(A)} = \{(1,0,0,1),(-1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\},$$

*torej je $A$ injektivna in surjektivna ter zato tudi bijektivna preslikava.*

**2.** *Preslikava $A$ je linearna, bazi jedra in slike preslikave $A$ sta na primer:*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(A)} = \{\vec{a} \times \vec{b}\} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(A)} = \{\vec{a}, \vec{b}\},$$

*torej $A$ ni ne injektivna, ne surjektivna in tudi ne bijektivna preslikava.*

**3.** *Preslikava $A$ je linearna,* $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ *in ena od baz zaloge vrednosti je*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(A)} = \{x^3 - 6x^2 - 6x - 8, x^2 - 4x - 2, x - 2, 1\},$$

*torej je $A$ injektivna in surjektivna ter zato tudi bijektivna preslikava.*

**4.** *(b) $b = \frac{4}{9}$, iskani vektor pa ima koordinate $(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{1}{9})$. (c) Matrika preslikave $A$ glede na standardne baze podanih prostorov je:*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**5.** *(b) Inverz preslikave $A$ je: $A^{-1}(ax^2 + bx + c) = \frac{a}{3}x^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{3}\right)x + \frac{c}{3} + \frac{b}{6} - \frac{a}{9}$. (c) Matrika preslikave $A$ glede na standardne baze podanih prostorov je:*

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**6.** *(b) Bazi jedra in slike preslikave $A$ sta na primer:*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(A)} = \left\{1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right\} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(A)} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,0,3)\},$$

*torej $A$ ni injektivna, je surjektivna in ni bijektivna preslikava. (c) Matrika preslikave $A$ glede na standardne baze podanih prostorov je:*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**7.** *(a)* $L(5t+1) = 8t+7$. *(b)* $L(at+b) = \left(\frac{3a+b}{2}\right)t + \frac{3a-b}{2}$. *(c) Matrika preslikave A glede na podano bazo je:*

$$[L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

**8.** $a = -2$, $b = 0$ *in* $c = 2$, *ena od baz zaloge vrednosti preslikave C pa je*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(C)} = \{(-2,2,1),(0,0,-2)\}.$$

**9.** *Preslikava A je injektivna in zato obrnljiva z obratom:*

$$A^{-1}(ax^2+bx+c) = \frac{a}{3}x^2 + \frac{2a+3b}{6}x + \frac{3b+6c-2a}{18}.$$

**10.** *(a) Predpis za preslikavo $\mathcal{C}$ je:* $\mathcal{C}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$. *Bazi njenega jedra in zaloge vrednosti sta npr.*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathcal{C})} = \{(1,1,1)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(\mathcal{C})} = \{(0,-1,1),(-1,1,0)\}.$$

*(b) Matrike preslikav glede na standardno bazo so:*

$$[\mathcal{A}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad [\mathcal{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**11.** *(b) Matrika preslikave $\mathcal{D}$ v dani bazi je:*

$$[\mathcal{D}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*(c) Preslikave $\mathcal{D}$ ni bijekcija, saj ni ne injekcija (v njenem jedru so vse konstante) ne surjekcija ($Im\mathcal{D} = \mathcal{P}_1$).*

**12.** *(b) Matrika preslikave F v danih bazah je:*

$$[F]_{\mathcal{S}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

*(c) Baza ImF je npr.*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(F)} = \{(1,0,1),(1,1,0)\},$$

*torej F ni surjektivna in zato tudi ne bijektivna preslikava.*

**13.** *(b) Bazi jedra in slike preslikave L sta na primer:*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(L)} = \{(1,-1,-1,1)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(L)} = \{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}.$$

*(c) Množica $\mathcal{B}$ je baza prostora $\mathbb{R}^4$, ker jo sestavljajo štirje med seboj linearno neodvisni (preveri!) vektorji iz $\mathbb{R}^4$. (d) Matrika preslikave L glede na dani bazi je:*

$$[L]_{\mathcal{B}\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**14.** $[\mathcal{A}^2]_{\mathcal{U}'} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 12 \\ -18 & -131 & -61 \\ 20 & 48 & 190 \end{bmatrix}$, *rang preslikave $\mathcal{A}^2$ pa je enak:* $r(\mathcal{A}^2) =$ *dim(Im($\mathcal{A}^2$))*$= 3$.

**15.** $[f]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, *rang preslikave f pa je enak:* $r(f) =$ *dim(Im(f))*$= 2$.

**16.** $[\mathcal{L}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, *rang preslikave $\mathcal{L}$ pa je enak* $r(\mathcal{L}) =$ *dim(Im($\mathcal{L}$))*$= 3$.