Domače vaje iz LINEARNE ALGEBRE - Linearni prostori

1. Dana je množica $\mathcal{M} = \{(a, b, 2b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ in operaciji

$$(a, b, 2b, a) + (c, d, 2d, c) = (a + c, b + d, 2b + 2d, a + c),$$
$$\lambda(a, b, 2b, a) = (\lambda a, \lambda b, 2\lambda b, \lambda a), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prepričaj se, da je množica $\mathcal{M}$ s tema dvema operacijama realen vektorski prostor!

2. Določi parameter a tako, da bo vektor $(-1, a + 2, -2, a^2 + a + 1)$ pripadal podprostoru v $\mathbb{R}^4$, razpetemu na vektorje $(1, 0, 2, 4)$, $(3, 1, 1, 2)$, in $(5, 1, 5, 3)$!

3. V linearnem prostoru $\mathbb{R}^4$ so dani vektorji: $v = (3, 9, -4, -2)$, $u_1 = (1, -2, 0, 3)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$ in $u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

(a) Ugotovi, ali leži vektor v v linearni ogrinjači $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$.

(b) Ali je množica $\{u_1, u_2, u_3\}$ linearno neodvisna? Je ta množica baza prostora $\mathbb{R}^4$?

4. Naj bodo a, b, c in d linearno neodvisni vektorji v realnem linearnem prostoru $\mathcal{V}$. Kaj lahko poveš o linearni (ne)odvisnosti vektorjev:

(a) $a_1 = a + 2c + d$, $b_1 = 2a - b + c$, $c_1 = a + c + d$;

(b) $a_2 = a + 2c + d$, $b_2 = 2a - b + c$, $c_2 = -a + b + c + d$.

5. Katere od naslednjih podmnožic prostora $\mathbb{R}^5$ so linearni podprostori v $\mathbb{R}^5$?

$$\mathcal{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 = 0\},$$
$$\mathcal{S}_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 3x_1 - 2x_2 = 0\},$$
$$\mathcal{S}_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = 1\},$$
$$\mathcal{S}_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_3 = x_5 \quad \text{in} \quad x_2 = x_4\}.$$

6. V prostoru $\mathcal{P}_3$ polinomov največ tretje stopnje sta podani naslednji množici:

$$S_1 = \{t^3, t^3 - t^2, t^3 + t^2, t^3 - 1\},$$
$$S_2 = \{t^2 - 1, t + 1, t^3 - 1\}.$$

Če je množica linearno neodvisna, ji dodaj tak polinom, da postane linearno odvisna. Če pa je množica linearno odvisna, ji odvzemi tak polinom, da postane linearno neodvisna.

7. Naj bo $\mathcal{P}_2$ linearen prostor polinomov največ druge stopnje. Katere od naslednjih množic polinomov iz tega prostora so linearno neodvisne? Če je množica linearno odvisna, izrazi en njen element kot linearno kombinacijo ostalih!

(a) $\{1, t, t^2 - 1\}$,

(b) $\{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$,

(c) $\{2t^2 + t, t^2 + 3, t\}$,

(d) $\{2t^2 + t + 1, 3t^2 + t - 5, t + 13\}$.

8. V $\mathbb{R}^4$ imamo podprostora:

$$S = \mathcal{L}\{(1,1,1,1),(2,3,1,0),(1,-1,1,-1)\},$$
$$T = \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1),(2,-2,0,0),(3,-1,1,1)\}.$$

Poišči baze prostorov S, T, $S \cap T$ in $S+T$! Kolikšna je dimenzija teh prostorov?

9. Naj bosta U in V podmnožici prostora $\mathbb{R}^4$:

$$U = (a,b,c,d) \mid b+c+d = 0\},$$
$$V = \{(a,b,c,d) \mid a+b = 0 \quad \text{in} \quad c = 2d\}.$$

Pokaži, da sta U in V linearna podprostora v $\mathbb{R}^4$ ter poišči baze prostorov U, V, $U \cap V$ in $U+V$!

10. Dopolni množico $M = \{(1,2,1,2,0),(2,-1,-1,2,0)\}$ do baze prostora $\mathbb{R}^5$ ter poišči kakšno bazo komplementarnega prostora $\mathbb{R}^5 \setminus \mathcal{L}\{M\}$.

11. V prostoru $\mathcal{P}_3$ polinomov največ tretje stopnje imamo množico:

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3 \mid p(1) = p(2) = 0\}.$$

Dokaži, da je $\mathcal{U}$ linearen podprostor prostora $\mathcal{P}_3$, ter poišči bazo njemu komplementarnega prostora $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3 \setminus \mathcal{U}$.

12. V prostoru $\mathcal{P}_3$ polinomov največ tretje stopnje imamo množico:

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3 \mid p'(0) = 0\}.$$

Dokaži, da je $\mathcal{U}$ linearen podprostor prostora $\mathcal{P}_3$, ter poišči bazo njemu komplementarnega prostora $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3 \setminus \mathcal{U}$.

REŠITVE

(Objavljene so le rešitve dokončno oddanih nalog. Za pravilnost rešitev odgovarjata demonstratorja.)

2. $a = -2$

3. *(a)* $v = u_1 + 3u_2 - 2u_3$ *(b) Množica* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *je linearno neodvisna, vendar ne napenja prostora* $\mathbb{R}^4$*, zato tudi ni baza tega prostora.*

4. *Vektorji pod (a) so linearno neodvisni, pod (b) pa linearno odvisni.*

5. *Linearni podprostori v* $\mathbb{R}^5$ *so množice* $\mathcal{S}_2$*,* $\mathcal{S}_3$ *in* $\mathcal{S}_5$*, množici* $\mathcal{S}_1$ *in* $\mathcal{S}_4$ *pa nista.*

6. *Množica* S_1 *je linearno odvisna. Da postane linearno neodvisna ji moramo odvzeti enega od prvih treh polinomov. Množica* S_2 *je linearno neodvisna. Linearno odvisna postane, če ji dodamo katerikoli polinom, ki je linearna kombinacija podanih.*

7. *Množice polinomov iz točk (a), (b) in (c) so linearno neodvisne, množica v točki (d) pa je linearno odvisna. Izrazimo lahko npr.* $2t^2 + t + 1 = \frac{2}{3}(3t^2 + t - 5) + \frac{1}{3}(t + 13)$.

8.

$$\mathcal{B}_S = \{(1,1,1,1),(2,3,1,0),(1,-1,1,-1)\},\ Dim(S) = 3,$$
$$\mathcal{B}_T = \{(1,-1,-1,1),(2,-2,0,0),(3,-1,1,1)\},\ Dim(T) = 3,$$
$$\mathcal{B}_{S\cap T} = \{(2,0,2,0),(1,-1,1,-1)\},\ Dim(S \cap T) = 2,$$
$$\mathcal{B}_{S+T} = \{(1,1,1,1),(2,3,1,0),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,1)\},\ Dim(T) = 4.$$

9.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_U &= \{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\},\\
\mathcal{B}_V &= \{(1,-1,0,0),(0,0,2,1)\},\\
\mathcal{B}_{U\cap V} &= \{(3,-3,2,1)\},\\
\mathcal{B}_{U+V} &= \{(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1),(1,-1,0,0)\}.
\end{aligned}$$

11. *Da je $\mathcal{U}$ linearen podprostor prostora $\mathcal{P}_3$ pokažemo, ko preverimo, da je za poljubne $p,q \in \mathcal{U}$ in $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ linearna kombinacija $\lambda p + \mu q \in \mathcal{U}$. Ena od baz komplementarnega podprostora $\mathcal{V}$ je $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{x^3, x^2\}$.*

12. *Da je $\mathcal{U}$ linearen podprostor prostora $\mathcal{P}_3$ pokažemo, ko preverimo, da je za poljubne $p,q \in \mathcal{U}$ in $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ linearna kombinacija $\lambda p + \mu q \in \mathcal{U}$. Baza komplementarnega podprostora $\mathcal{V}$ je $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{x\}$.*