Domače vaje iz LINEARNE ALGEBRE - Matrike in sistemi enačb

1. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(To pomeni, poišči vse 2×2 matrike A, za katere velja: $AB = BA$.)

2. Izračunaj vse kvadratne korene enotske 2×2 matrike (tj. poišči vse 2×2 matrike A, za katere je $A^2 = I$).

3. Izračunaj vse kvadratne korene matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(tj. poišči vse 2×2 matrike B, za katere je $B^2 = A$).

4. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra α ter poišči vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & & & = & 6 \\ \alpha x & + & 4y & + & \alpha z & = & 2 \end{array}$$

5. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra β ter poišči vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & - & u & = & 0 \\ 5x & + & 5y & - & 2z & - & u & = & \beta \end{array}$$

6. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra α in β ter poišči vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & \alpha \\ 6x_1 & - & 17x_2 & + & 2x_3 & + & \beta x_4 & = & 3 \end{array}$$

7. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametrov a in b ter poišči vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}$$

8. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra a in b ter poišči vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccccc} ax & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & + & t & = & b \\ x & - & y & + & az & + & t & = & 0 \end{array}$$

9. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra a, b in c ter poišči vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 3x & - & y & + & 2z & = & b \\ x & - & 5y & + & 8z & = & c \end{array}$$

10. Podani sta matriki:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo: $B - XA = I$ (I je enotska matrika).

11. Naj bodo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}.$$

in I enotska matrika. Poišči matriko X, ki zadošča enačbi: $AXB + AXI = C$.

12. Podani sta matriki:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $X^T C = D^{-1}$.

13. Poišči takšno matriko Y, da bo zadoščala enačbi $B + Y = YA - BA$, pri čemer sta:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Za naslednje matrike ugotovi, pri katerih vrednostih parametra t so obrnljive:

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & t \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1 & t^2 & t^4 \\ 1 & t^4 & t^6 \end{bmatrix}.$$

15. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi parameter a tako, da bo ena izmed lastnih vrednosti matrike A enaka 2. Poišči še ostale lastne vrednosti ter lastne vektorje, ki pripadajo največji lastni vrednosti.

16. Naj bo linearna preslikava $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom: $f(x, y, z) = (2x + 3y, -y + 4z, 3z)$. Poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

17. Določi lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje simetrične matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Določi še tako (ortogonalno) matriko P, da bo veljalo: $P^T = P^{-1}$ in $P^T AP = D$ za neko diagonalno matriko D. S pomočjo narejenega izračunaj še A^5.

18. Določi lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ali dano martiko lahko diagonaliziramo? Če jo lahko, določi tako obrnljivo matriko P, da bo matrika $P^{-1}CP$ diagonalna. Z uporabo Cayleyevega izreka izračunaj še C^3.

19. S pomočjo Q-R razcepa reši naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & & & = & 2 \\ & & & & 3z & = & 3 \\ -2x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

20. Poišči linearno funkcijo $f(x) = kx + n$, ki najbolje ustreza podatkom v tabeli *(linearno fitanje)*:

x_i	0	1	2	3
y_i	6	3	4	2

21. Poišči polinom 2. stopnje $p(x) = ax^2 + bx + c$, ki najbolje ustreza podatkom v tabeli *(kvadratično fitanje)*:

x_i	-1	0	1	2
y_i	4	0	1	2

22. Poišči rešitve naslednjega sistema linearnih enačb po metodi najmanjših kvadratov:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & z & = & -2 \end{array}$$

REŠITVE

1. $A = \begin{bmatrix} b & a \\ -a & b-a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. *Vsi iskani koreni so oblike :*

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

3. *Dobimo dve rešitvi:* $B = \begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$.

4. *Če je $\alpha = -2$, sistem ni rešljiv, v primeru $\alpha = 2$ ima neskončno rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

za $\alpha \neq \pm 2$ pa je rešitev:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2(2+\alpha)} \begin{bmatrix} 3\alpha + 5 \\ 2 \\ -3\alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

5. *Sistem ni rešljiv, če je $\beta \neq 1$. Pri $\beta = 1$ pa so rešitve sistema:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

6. *Sistem ni rešljiv pri parametrih* $\beta = 6, \alpha \neq 2$. *Pri* $\beta = 6, \alpha = 2$ *dobimo dvodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pri $\beta \neq 6$ *pa enodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha - 2 - \frac{\alpha-2}{\beta-6} \\ -\alpha - 1 \\ 0 \\ \frac{\alpha-2}{\beta-6} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. *Sistem ni rešljiv v primerih, ko je* $b \neq a = 1$ *ali* $b \neq a = -2$. *V primeru* $a = b = 1$ *dobimo dvodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pri $a = b = -2$ *enodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

če pa je $a \neq 1, -2$, *je rešitev ena sama:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2 - a - a^2} \begin{bmatrix} 1 - a \\ \frac{2-b-ab}{b} \\ b - a \end{bmatrix}.$$

8. *Sistem ni rešljiv, če je* $a = 1$ *in* $b \neq 1$. *Pri* $a = b = 1$ *dobimo dvodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pri $a \neq 1$ *pa enodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} 1 - b \\ 0 \\ -b \\ ab + b - 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{a+1}{a-1} \\ \frac{-a(a+1)}{a-1} \end{bmatrix}. \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

9. *Sistem ni rešljiv, če velja:* $b = 2a + c$. *Če to ne velja, ima sistem neskončno rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a+3b}{11} \\ 0 \\ \frac{b-3a}{11} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

10. $X = \begin{bmatrix} -8 & 10 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$

11. $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

12. $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

13. $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & -4 & 7 & 13 \\ 4 & -4 & 4 & 12 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

14. *Matrika A je obrnljiva za $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, matrika B za $t \in \mathbb{R} \setminus \{4, -2\}$, matrika C pa za $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.*

15. *$a = 2$, lastne vrednosti so $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti 3 pa so oblike $\alpha(0, 2, 1)$ pri $\alpha \in \mathbb{R}$.*

16. *Lastne vrednosti preslikave f so $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 3$, ustrezni lastni vektorji pa $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ in $v_3 = (3, 1, 1)$.*

17. *Lastne vrednosti matrike A so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ in $\lambda_3 = 6$, ustrezni lastni vektorji pa: $v_1 = (-2, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ in $v_3 = (1, 2, 0)$.*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^5 = \begin{bmatrix} 1556 & 3110 & 0 \\ 3100 & 6221 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix}.$$

18. *Lastne vrednosti matrike C so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$, ustrezni lastni vektorji pa: $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 3, 3)$ in $v_3 = (1, 3, 4)$. Matriko C lahko diagonaliziramo, ker ima 3 linearno neodvisne lastne vektorje.*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} C P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Po Caylejevem izreku je

$$C^3 = 6C^2 - 11C + 6I = \begin{bmatrix} -13 & 16 & -2 \\ -21 & -14 & 36 \\ -21 & -41 & 63 \end{bmatrix}.$$

19. *Q-R razcep matrike sistema je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = QR, \qquad Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

rešitev pa $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{5}{9}$ in $z = 1$.

20. *Iskana linearna funkcija je $f(x) = -\frac{11}{10}x + \frac{27}{5}$.*

21. *Iskani polinom je $p(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}$.*

22. *Rešitev po metodi najmanjših kvadratov je $x = -\frac{23}{15}$, $y = -\frac{28}{15}$ in $z = \frac{64}{15}$.*