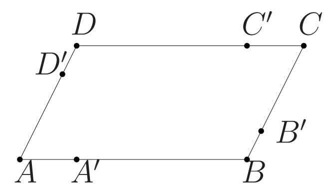
Naloga 0.1. *Podan je paralelogram $ABCD$. Točka A' leži na daljici AB tako, da med dolžinama $|AA'|$ in $|AB|$ velja razmerje $y:1$. Podobno ležijo točke B', C', D' zaporedoma na stranicah BC, CD, DA tako, da veljajo razmerja*

$$y:1 = |BB'|:|BC| = |CC'|:|CD| = |DD'|:|DA|.$$

(a) Pokaži, da je štirikotnik $A'B'C'D'$ prav tako paralelogram.

(b) Poišči vsa števila $y \in [0,1]$, za katere je ploščina paralelograma $A'B'C'D'$ enaka $5/8$ ploščine paralelograma $ABCD$.



Skica rešitve. (a) Zadostuje pokazati, da velja $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$.

$$\overrightarrow{D'C'} = y(\overrightarrow{AD}) + (1-y)\overrightarrow{DC} = y(\overrightarrow{BC}) + (1-y)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

(b) Upoštevamo $p(ABCD) = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$ in $p(A'B'C'D') = |\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'D'}|$. Izrazimo vektorja $\overrightarrow{A'B'}$ in $\overrightarrow{A'D'}$ z vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$. Dobimo

$$p(A'B'C'D') = \big((1-y)^2 + y^2\big) \cdot p(ABCD)$$

iz česar sledi $(1-y)^2 + y^2 = 5/8$. Dobimo rešitvi: $y = 1/4$ in $y = 3/4$. $\square$

Premica je natančno določena, če poznamo **katerokoli točko na njej** ter njen **smerni vektor**. Če označimo z $\vec{r}_0$ krajevni vektor neke točke na premici in z $\vec{s}$ smerni vektor premice, potem nam zdrava pamet pove, da je možno vsako točko na dani premici zapisati v obliki $\vec{r}_0 + \lambda\vec{s}$ za neko realno število λ. Dobili smo vektorska obliko enačbe premice:

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda\vec{s} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Včasih nas zanima tudi kanonska/kanonična oblika premice, čeprav je ta oblika, po mojem mnenju, pogosto manj uporabna. Iz rešitve nasednje naloge bi moralo biti razvidno, kako pridemo do kanonske oblike.

Naloga 0.2. *Za dano premico poišči njeno kanonska enačbo.*

(a) $\vec{r}(\lambda) = (1,2,1) + \lambda(1,1,2)$,

(b) $\vec{r}(\lambda) = (0,2,3) + \lambda(1,1,0)$.

Rešitev. (a) Zapišemo $\vec{r}(\lambda) = (x, y, z)$. S primerjanjem komponent dobimo tri enačbe: $x = 1 + \lambda \cdot 1$, $y = 2 + \lambda \cdot 1$, $z = 1 + \lambda \cdot 2$. Iz vsake izmed njih izrazimo λ. Dobimo $\lambda = x - 1$, $\lambda = y - 2$, $\lambda = (z - 1)/2$. Kanonska oblika enačbe premice je tako

$$x - 1 = y - 2 = (z - 1)/2.$$

(b) Zapišemo $\vec{r}(\lambda) = (x, y, z)$. S primerjanjem komponent dobimo tri enačbe: $x = \lambda$, $y = 2 + \lambda$, $z = 3$. Kjer se da, izrazimo λ. Dobimo $\lambda = x$, $\lambda = y - 2$. Kanonska oblika enačbe premice je tako

$$x = y - 2\ ;\ z = 3.$$

□

Naloga 0.3. *Ali se dani premici sekata? Če se, poišči presečišče, v nasprotnem pa poišči (najmanjšo) razdaljo med premicama ter točki, kjer sta si premici najbližji.*

(a)

$$\vec{r}_1(\lambda) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, 0), \qquad \vec{r}_2(\lambda) = (2, 0, 1) + \lambda(0, 2, -1);$$

(b)

$$\vec{r}_1(\lambda) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1), \qquad \vec{r}_2(\lambda) = (0, 2, 3) + \lambda(0, 1, 1).$$

Rešitev. (a) Če se premici sekata v neki točki S, potem se krajevni vektor $\vec{r}_S$ da zapisati kot $\vec{r}_S = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, 0)$ in $\vec{r}_S = (2, 0, 1) + \mu(0, 2, -1)$, saj točka S leži na obeh premicah. Preveriti moramo, ali je enačba

$$(1, 1, 1) + \lambda(1, -1, 0) = (2, 0, 1) + \mu(0, 2, -1)$$

res kdaj izpolnjena. S primerjanjem komponent vidimo, da bo omenjeno res natanko tedaj, ko je:

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= 2, \\ 1 - \lambda &= 2\mu, \\ 1 &= 1 - \mu. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb dobimo $\lambda = 1$ in $\mu = 0$. Kot vidimo, je izpolnjena tudi tretja enačba. Zato se premici res sekata in to v točki s krajevnim vektorjem $\vec{r}_S = (2, 0, 1) + 0 \cdot (0, 2, -1) = (2, 0, 1)$.

(b) Če se premici sekata v neki točki S, potem se krajevni vektor $\vec{r}_S$ da zapisati kot $\vec{r}_S = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$ in $\vec{r}_S = (0, 2, 3) + \mu(0, 1, 1)$, saj točka S leži na obeh premicah. Preveriti moramo, ali je enačba

$$(1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1) = (0, 2, 3) + \mu(0, 1, 1)$$

res kdaj izpolnjena. S primerjanjem komponent vidimo, da bo omenjeno res natanko tedaj, ko je:

$$\begin{aligned}1+\lambda &= 0,\\ 2 &= 2+\mu,\\ 3+\lambda &= 3+\mu.\end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb dobimo $\lambda = -1$ in $\mu = 0$. Kot vidimo, tretja enačba tedaj ni izpolnjena. Zato se premici ne sekata.

Poiščimo (najmanjšo) razdaljo med premicama, ter tisto točko A na premici $\vec{r}_1$ in tisto točko B na premici $\vec{r}_2$, kjer sta si obe premici najbližji. Za ustrezni števili λ_A in λ_B mora veljati

$$\vec{r}_A = (1,2,3) + \lambda_A(1,0,1) \qquad \text{in} \qquad \vec{r}_B = (0,2,3) + \lambda_B(0,1,1).$$

Če si narišemo dve mimobežni premici, kaj hitro ugotovimo, da mora biti daljica AB pravokotna tako na premico $\vec{r}_1$ kot na premico $\vec{r}_2$. Torej ima premica skozi A in B smerni vektor enak $(1,0,1)\times(0,1,1) = (-1,-1,1)$. Enačbe te premice je tako oblike $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_A + \lambda(-1,-1,1)$. Ker tudi točka B leži na njej, mora za ustrezen λ_0 veljati

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \lambda_0(-1,-1,1).$$

Če upoštevamo še zgornji enačbi dobimo

$$(0,2,3) + \lambda_B(0,1,1) = (1,2,3) + \lambda_A(1,0,1) + \lambda_0(-1,-1,1).$$

S primerjanjem komponent dobimo sistem treh enačb z neznankami $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_0$. Po krajšem računu dobimo $\lambda_A = -2/3$ in $\lambda_B = -1/3$ (ter $\lambda_0 = 1/3$). Krajevna vektorja točk A in B sta torej

$$\vec{r}_A = (1,2,3) - 2/3\cdot(1,0,1) = (1/3, 2, 7/3) \quad \text{in} \quad \vec{r}_B = (0,2,3) - 1/3\cdot(0,1,1) = (0, 5/3, 8/3).$$

Razdalja med premicama oz. razdalja med točkama A in B pa je

$$d(A,B) = \sqrt{(1/3-0)^2 + (2-5/3)^2 + (7/3-8/3)^2} = \sqrt{3}/3.$$

□

Ravnina je natančno določena, če poznamo **katerokoli točko na njej** ter njeno **normalo** (=katerikoli neničelen vektor, ki je pravokoten na ravnino). Če označimo z $\vec{r}_0$ krajevni vektor neke točke na ravnini in z $\vec{n}$ normalo ravnine, potem nam zdrava pamet pove, da na ravnini ležijo natanko tiste točke $\vec{r}$, za katere je vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ pravokoten na normalo, tj. natanko tiste točke $\vec{r}$, za katere velja

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0.$$

Zgornje predstavlja vektorsko obliko enačbo ravnine. Včasih nas zanima tudi kanonska/kanonična oblika ravnine. Le to dobimo tako, da zapišemo $\vec{r} = (x,y,z)$ in enačbo $((x,y,z) - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$ poenostavimo.

Naloga 0.4. *Premica p gre skozi točko $(1, 1, 1)$ in ima smerni vektor enak $(1, -2, 0)$. Ravnina Σ gre skozi točko $(1, 6, 1)$ in ima normalo enako $(1, -2, 4)$.*

(a) Poišči točko S, kjer premica p prebada ravnino Σ.

(b) Določi enačbo tiste premice, ki gre skozi S, vsa leži v ravnini Σ in je pravokotna na premico p.

Rešitev. . Premica p je podana z enačbo $\vec{p}(\lambda) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -2, 0)$, ravnina Σ pa z enačbo $(\vec{r} - (1, 6, 1)) \cdot (1, -2, 4) = 0$. Presečišče S leži tako na premici kot na ravnini. Torej za ustrezen λ_S velja $\vec{r}_S = (1, 1, 1) + \lambda_S(1, -2, 0)$ in $(\vec{r}_S - (1, 6, 1)) \cdot (1, -2, 4) = 0$. Posledično tako dobimo

$$\big((1, 1, 1) + \lambda_S(1, -2, 0) - (1, 6, 1)\big) \cdot (1, -2, 4) = 0,$$

iz česar po kratkem računu sledi $\lambda_S = -2$ oz. $\vec{r}_S = (1, 1, 1) - 2(1, -2, 0) = (-1, 5, 1)$.

(b) Postopamo lahko na (vsaj) dva načina. *1. Način.* Enačba iskane premice je oblike $\vec{q}(\lambda) = (-1, 5, 1) + \lambda(a, b, c)$. Ker je pravokotna na premico p morata biti smerna vektorja obeh premic pravokotna, tj. $(a, b, c) \cdot (1, -2, 0) = 0$, iz česar sledi $a = 2b$. Ker celotna premica q leži v dani ravnini mora za vsak λ veljati $\big((-1, 5, 1) + \lambda(2b, b, c) - (1, 6, 1)\big) \cdot (1, -2, 4) = 0$ iz česar sledi $c = 0$. Smerni vektor premice q je tako $(2, 1, 0)$ (lahko bi vzeli tudi kak neničelen večkratnik tega vektorja). Enačba iskane premice je torej $\vec{q}(\lambda) = (-1, 5, 1) + \lambda(2, 1, 0)$.

2. Način. Smerni vektor iskane premice q je po eni strani pravoten na smerni vektor premice p, po drugi strani pa je pravokoten tudi na normalo ravnine. Torej je enak $(1, -2, 0) \times (1, -2, 4) = (-8, -4, 0) = -4(2, 1, 0)$. Enačba iskane premice je zato

$$\vec{q}(\lambda) = (-1, 5, 1) + \lambda(2, 1, 0).$$

□

Naloga 0.5. *Določi (najmanjšo) razdaljo točke $X(0, 0, 0)$ do ravnine, ki je določena s točkami $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, -1)$ in $C(0, 2, 1)$.*

Skica rešitve. Normala ravnine je enaka $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, -3) \times (-1, 3, -1) = (8, 4, 4) = 4(2, 1, 1)$. Enačba ravnine je zato

$$(\vec{r} - (1, -1, 2)) \cdot (2, 1, 1) = 0.$$

Izračunati moramo razdaljo med točkama X in S, kjer je S prebadališče dane ravnine s tisto premico, ki gre skozi X in ima za smerni vektor normalo ravnine. □