Domače vaje iz LINEARNE ALGEBRE - Vektorji

1. V pravilnem tetraedru $ABCD$ tvorijo vektorji $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ bazo prostora. Naj bo P nožišče višine iz točke D na osnovno ploskev ABC in Q nožišče višine iz točke A na ploskev BCD.

(a) Izrazi vektorja $\overrightarrow{DP}$ in $\overrightarrow{AQ}$ v bazi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

(b) Pokaži, da se višini DP in AQ sekata. Njuno presečišče označimo z E. Izrazi vektor $\overrightarrow{AE}$ v bazi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2. Točke A, B, C in D so zaporedna oglišča enakokrakega trapeza. Velja še: $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Naj bo E razpolovišče daljice AD ter S presečišče daljic BE in AC. Označimo: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

(a) Izrazi vektor $\overrightarrow{BS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(b) Izračunaj koordinate točke S, če poznaš koordinate točk: $A(5,4,1)$, $B(0,-1,2)$ in $D(5,9,3)$.

3. Točke A, B, C, D, E, F, G in H so zaporedna oglišča kocke. Točka S je središče kvadrata $EFGH$, točka M pa deli stranico CG v razmerju $3:1$. Naj bo T točka, v kateri se sekata daljici AM in CS. Označimo še: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.

(a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AT}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$!

(b) Določi koordinate točke T, če poznamo koordinate naslednjih točk: $A(2,1,1)$, $B(4,1,1)$, $D(2,3,1)$ in $E(2,1,3)$!

4. V paralelogramu $ABCD$ označimo: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Točka S leži na diagonali AC in deli AC v razmerju $3:1$. Premica skozi točki B in S seka stranico CD v točki X.

(a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AX}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(b) V kakšnem razmerju deli točka X daljico DC?

(c) Izračunaj koordinate točke X, če so koordinate točk: $A(1,2,3)$, $B(-1,2,3)$ in $C(3,4,-1)$.

5. Točke A, B, C, D, E in F so zaporedna oglišča pravilnega šestkotnika. Naj bo G razpolovišče daljice FE ter S presečišče daljic GB in AC.

(a) V kakšnem razmerju deli daljica GB daljico AC?

(b) Izrazi ploščino trikotnika ABS s ploščino šestkotnika.

6. Dan je trikotnik ABC. Točke P, Q in R delijo stranice AB, BC in CA v razmerju $1:2$. Daljici AQ in CP se sekata v točki D, daljici AQ in BR v točki E, daljici BR in CP pa v točki F. Pokaži, da je ploščina trikotnika DEF enaka $\frac{1}{7}$ ploščine trikotnika ABC.

7. V pravilni štiristrani piramidi $ABCDE$ označimo: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{C} = \overrightarrow{AE}$. Točka G deli daljico BE v razmerju $3:1$, točka M pa je središče kvadrata $ABCD$.

(a) Označimo z R presečišče višine ME s premico skozi točki D in G. Izrazi vektor $\overrightarrow{MR}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

(b) Določi koordinate točke R, če so koordinate točk $A(2,1,2)$, $B(-2,3,1)$, $D(-1,1,0)$ in $E(-1,1,-2)$.

8. Dana sta vektorja $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ in $\vec{b} = \lambda\vec{i} - \vec{j}$, kjer sta $\vec{i}$ in $\vec{j}$ linearno neodvisna vektorja. Določi skalar λ tako, da bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna. V tem primeru še izrazi vektor $\vec{a}$ z vektorjem $\vec{b}$.

9. Naj bosta $\vec{\imath}$ in $\vec{\jmath}$ linearno neodvisna vektorja. Z njima se izražajo vektorji: $\vec{a} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ in $\vec{c} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

(a) Izrazi vektor $\vec{c}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

(b) Ali sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna?

10. Dana sta vektorja $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ in $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, pri čemer poznamo dolžine vektorjev: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, ter kote med njimi: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$. Vektorja $\vec{m}$ in $\vec{n}$ razpenjata paralelogram. Zapiši vektorja diagonal tega paralelograma in izračunaj njuni dolžini.

11. Dani so vektorji $\vec{a} = \alpha\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 2\alpha\vec{\jmath}$ in $\vec{c} = 3\alpha\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, kjer so $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ linearno neodvisni vektorji. Določi skalar α tako, da bodo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležali na isti ravnini.

12. Naj bodo $\vec{a} = (1, 2\alpha, 1)$, $\vec{b} = (2, \alpha, \alpha)$ in $\vec{c} = (3\alpha, 2, -\alpha)$, kjer je α neko realno število.

(a) Izračunaj volumen tetraedra, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

(b) Določi parameter α tako, da bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ležali na isti ravnini! V tem primeru izrazi $\vec{a}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

13. Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorji iz $\mathbb{R}^3$ z dolžinami: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ in $|\vec{c}| = 1$. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enak $\frac{\pi}{3}$, kot med vektorjem $\vec{c}$ ter ravnino, ki jo razpenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\frac{\pi}{6}$. Izračunaj prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje: $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$ in $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

14. Paralelogram ima oglišče $A(1,1,1)$ ter stranici $\overrightarrow{AB} = (0,0,1)$ in $\overrightarrow{AD} = (1,-2,1)$. Določi točko E na stranici BC tako, da se bosta daljici AE in BD sekali pod pravim kotom.

15. Točke $A(1,-1,2)$, $B(-1,1,2)$ in $C(1,2,3)$ so oglišča trikotnika ABC. Poišči nožišče višine T iz vrha C na osnovnico AB. Kolikšen je kot med daljicama CT in CB?

16. Dokaži, da so vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$ kolinearni natanko tedaj, ko so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ koplanarni (Nasvet: pomagaj si z mešanim produktom in s formulo za večkratni vektorski produkt).

17. Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ napenjajo tetraeder s prostornino 3. Izračunaj prostornino tetraedra, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$. (Nasvet: pomagaj si s formulo za večkratni vektorski produkt).

18. Pri danih neničelnih vektorjih $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poišči tak vektor $\vec{x}$, ki zadošča enačbi:

$$\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}.$$

19. Dani so vektorji: $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (1,1,0)$ in $\vec{c} = (1,-1,0)$. Poišči tak vektor $\vec{x}$, da bo zadoščal enačbama:

$$\vec{x}\vec{a} = 3 \quad \text{in} \quad \vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}.$$

REŠITVE

1. *(a)* $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$ *in* $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. *(b) Višini DP in AQ se sekata, ker točke A, P, Q in D ležijo na isti ravnini.* $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

2. *(a)* $\overrightarrow{BS} = -\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$ *(b)* $S(4,5,2)$

3. *(a)* $\overrightarrow{AT} = \frac{8}{11}\vec{a} + \frac{8}{11}\vec{b} + \frac{6}{11}\vec{c}$ *(b)* $T(\frac{38}{11}, \frac{27}{11}, \frac{23}{11})$

4. *(a)* $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ *(b) Točka* X *deli daljico* DC *v razmerju* $2:1$, *(c)* $X(\frac{11}{3}, 4, -1)$

5. *(a)* $GB : AC = 3 : 4$. *(b)* $p_{\triangle ABC} = \frac{1}{6}p_{ABCDEF}$.

6. *Najprej dve stranici trikotnika izrazimo z vektorjema* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ *in* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{a} + \frac{2}{7}\overrightarrow{b}$ *ter* $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{7}\overrightarrow{a} + \frac{1}{7}\overrightarrow{b}$. *Potem je* $p_{\triangle DEF} = |\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{DE}| = \frac{1}{7}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \frac{1}{7}p_{\triangle ABC}$.

11. $\alpha = \pm 1$

12. *(a)* $V = \frac{1}{3}(3\alpha^3 - \alpha + 2)$ *(b) Vektorji* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{c}$ *ležijo na isti ravnini, če je* $\alpha = -1$. *V tem primeru je* $\overrightarrow{a} = -4\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$.

13. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

14. $E(1, 1, 2)$

15. *Kot med daljicama* CT *in* CB *je enak* $\arccos\sqrt{\frac{11}{12}} \doteq 16,77^0$.

16. *Vektorja* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ *sta kolinearna natanko tedaj, ko je njun vektorski produkt enak* 0. *S pomočjo formule za večkratni vektorski produkt ugotovimo, da to velja natanko tedaj, ko je mešani produkt vektorjev* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{c}$ *enak nič oziroma, ko so ti vektorji koplanarni. Enako sklepamo pri vektorjih* $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ *in* $\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

17. $V = 54$

18. $\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{b} + (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})}{1 + |\overrightarrow{a}|^2}$