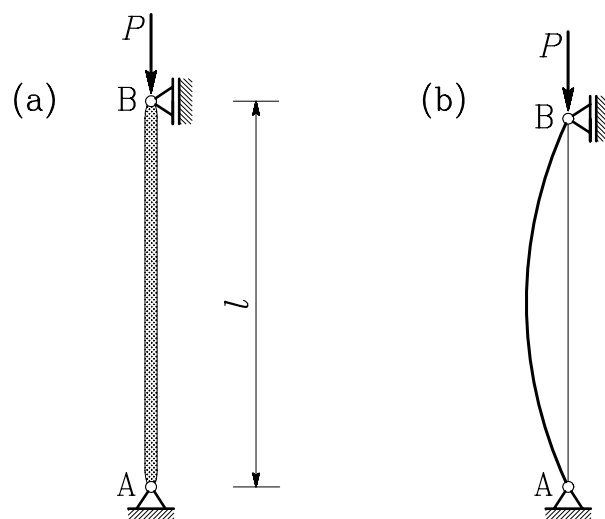


UKLON RAVNEGA GREDNEGA NOSILCA

U.1 Splošno o stabilnostnih problemih

Iz vsakdanje izkušnje poznamo primer, da se naslonimo na tenko, na primer leskovo palico, pa se ta nenadoma izkloni. Primer lahko ponazorimo z ravnim nosilcem - palico, obteženo le s točkovno tlačno vzdolžno silo v pomični podpori (slika U.1).

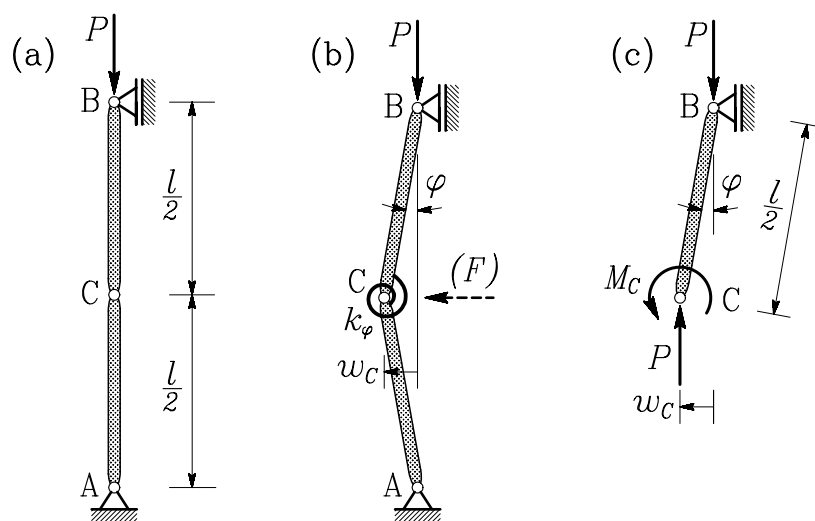


Slika U.1

Čim bolj “čokata” je palica (slika U.1.a), tem večjo vzdolžno silo lahko prevzame, ne da bi se izklonila. Nasprotno pa pri “vitkejši” palici (slika U.1.b) prej pride do izklona. S preprostim poskusom se lahko tudi prepričamo, da se pri manjši obtežbi izkloni palica, ki ni popolnoma ravna ali ima nepravilno rast, grče, razpoke ali druge nepopolnosti. Pojavu, da tlačno obtežen linijski element nenadoma preskoči iz dotedanje

v drugačno ravnotežno lego, pravimo *uklon*. Do podobnih pojavov pride tudi pri tlačno obteženih tankih stenah in lupinah, le da tedaj govorimo o *izbočitvi*. Vse tovrstne pojave pa s skupnim imenom imenujemo *stabilnostni problemi*.

Osnovni koncept nestabilnosti lahko ponazorimo s preprostim uklonskim modelom, ki ga sestavimo iz dveh enakih togih ravnih nosilcev, povezanih z upogibnim členkom C (slika U.2.a).



Slika U.2

Razen tega sta oba dela v členku povezana z rotacijsko (spiralno) vzmetjo s togostjo k_φ , ki zagotavlja stabilno začetno obliko sestava. V pomični podpori začnemo sestav obteževati s točkovno vzdolžno silo P , kakor kaže slika. Gre pravzaprav za nosilec s slike U.1, le da je vsa njegova prečna deformabilnost “skoncentrirana” v rotacijski vzmeti. V začetnem stanju sta vzdolžni osi obeh nosilcev idealno poravnani s smerjo sile, zato je torzijska vzmet neobremenjena, v obeh nosilcih pa nastopa le tlačna osna sila. Sedaj pa predpostavimo, da na členek C delujemo z majhno prečno silo F , tako da se za majhno vrednost $w_C \ll 1$ izmakne iz začetne lege (slika U.2.b). S tem se oba toga

nosilca zasučeta za majhen kot $\varphi \ll 1$. Rotacijska vzmet pri tem doživi zasuk 2φ in sedaj deluje na vsakega od nosilcev s povratnim momentom $M_C = 2k_\varphi \varphi$. Preprost fizikalni razmislek pove, da povratni moment vzmeti zmanjšuje pomik členka iz začetne lege, obtežba P pa ga povečuje. Če sedaj prečno obtežbo F odstranimo, imamo dve možnosti: če povratni moment prevlada nad vplivom vzdolžne sile P , se sestav povrne v začetno, ravno obliko. Takemu stanju sestava pravimo *stabilno stanje*. V nasprotnem primeru, če prevlada vpliv vzdolžne sile, se prečni pomik členka hitro poveča in sestav se poruši. Tako stanje imenujemo *nestabilno stanje*. Pri izbranih geometrijskih in materialnih lastnostih sestava je očitno le od velikosti sile P odvisno, ali je sestav stabilen ali nestabilen. Pri postopnem obteževanju sestava je jasno, da je ta v začetku stabilen, pri določeni velikosti sile P pa postane nestabilen. To vrednost imenujemo *kritična sila* in jo označimo s P_{kr} .

Kritično silo P_{kr} določimo iz pogojev ravnotežja v izmaknjeni legi. Začnimo s pogojem, da mora biti vsota vseh statičnih momentov glede na podporo A enaka nič. Pogoj pove, da v drsni podpori B ni prečne reakcije ($H_B = 0$). Sedaj pa si oglejmo zgornji del obravnavanega sestava (slika U.2.c) in zapišimo pogoj, da mora biti vsota statičnih momentov glede na podporo B enaka nič

$$M_C - P w_C = 0. \quad (U.1)$$

Pri tem je $M_C = 2k_\varphi \varphi$ in ker je φ majhen kot, velja

$$w_C = \frac{l}{2} \sin \varphi \approx \frac{l}{2} \varphi. \quad (U.2)$$

S tem iz pogoja (U.1) sledi

$$\varphi \left(2k_\varphi - \frac{Pl}{2} \right) = 0. \quad (U.3)$$

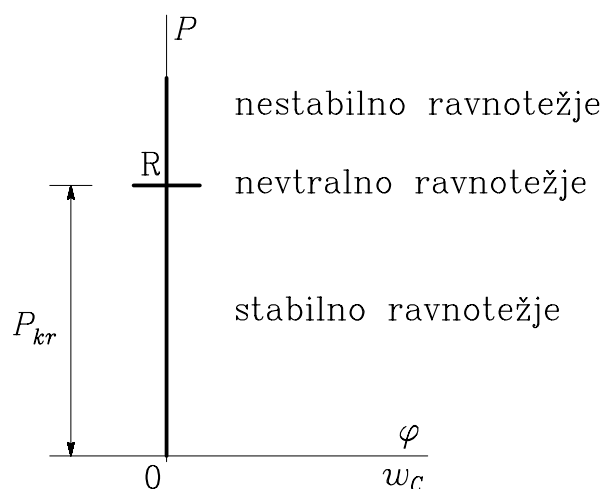
Ta enačba je izpolnjena v dveh primerih. Prva rešitev je $\varphi = 0$, kar pomeni, da je sestav v ravnotežju pri $w_C = 0$, ne glede na velikost sile

P . Vendar bi bila ta rešitev možna le pri idealno izdelani in poravnani konstrukciji, pri absolutno centrično nameščenih podporah in vmesnem členku ter ob absolutno centrično in v smeri vzdolžne osi delujoči obtežbi P . V naravi tako idealnih konstrukcij ni, zato nas bolj zanima druga rešitev, ki jo dobimo z zahtevo, da je izraz v oklepaju enak nič. Od tod dobimo kritično silo P_{kr} , pri kateri je ravnotežje možno tudi v izklonjeni legi sestava

$$2k_\varphi - \frac{P_{kr} l}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{P_{kr} = \frac{4k_\varphi}{l}}. \quad (U.4)$$

V obravnavanem primeru predstavlja kritična sila P_{kr} edino vrednost obtežbe P , pri kateri je sestav v izklonjeni legi v ravnotežju. Kritična sila torej določa mejo med stabilnim in nestabilnim obnašanjem konstrukcije. Če je obtežba manjša od kritične sile ($P < P_{kr}$), je sestav stabilen. Tudi če se pojavi motnja, na primer majhen impulz prečne zunanje sile F , ki povzroči majhen izklon sestava iz idealno ravne začetne lege, povratni moment spiralne vzmeti prevlada nad vplivom vzdolžne obtežbe P in po odstranitvi motnje se sestav povrne v začetno, ravno obliko. Pri vrednosti $P = P_{kr}$ je sestav v ravnotežju tako v začetni ravni obliki ($\varphi = 0$), kakor tudi pri majhnem izklonu za kot $\varphi \ll 1$. V tem stanju torej ne moremo govoriti niti o stabilnem niti o nestabilnem ravnotežju in ga zato imenujemo *nevtralno ravnotežje*. Če pa je obtežba večja od kritične sile ($P > P_{kr}$), je konstrukcija *nestabilna*. V idealnih razmerah, torej pri $\varphi = 0$, bi obtežbo sicer lahko povečevali tudi nad vrednostjo P_{kr} , vendar bi vsaka motnja, na primer majhen prečni impulz sile F , povzročila izklon in v nadaljevanju porušitev konstrukcije. Kakor smo pokazali zgoraj, bi namreč v tem stanju vpliv vzdolžne sile prevladal nad vplivom povratnega momenta spiralne vzmeti in prečni pomik bi se povečal čez vse meje.

Opisani mehanizem lahko ponazorimo s sovisnico med velikostjo nastopajoče obtežbe P in zasučnim kotom φ oziroma prečnim pomikom w_C (slika U.3). Točko R, v kateri je možna tako ravna kakor tudi izklonjena ravnotežna lega, imenujemo *razvejišče* ali *bifurkacija*.



Slika U.3

Za boljše razumevanje pa posamezne vrste ravnotežja predstavimo še s klasično fizikalno skico kroglice v različnih ravnotežnih položajih glede na razgibano podlago (slika U.4). Ta skica nas med drugim tudi opozori na zelo pomembno dejstvo, da je pojem ravnotežja v vseh treh primerih povezan z majhnimi premiki iz ravnotežne lege. Če bi se namreč kroglica iz nevtralne lege premaknila preveč v levo, bi prešla iz nevtralnega v stabilno ravnotežno stanje, pri velikem premiku v desno pa v stanje nestabilnega ravnotežja.



Slika U.4

U.2 Nelinearni model linijskega nosilca

Vrnimo s k tlačnemu ravnemu nosilcu, s katerim smo začeli to poglavje (slika U.1). Vzemimo, da smo koordinatni osi y in z v prečnem prerezu nosilca izbrali tako, da sta I_y in I_z glavna upogibna vztrajnostna momenta, pri čemer je vztrajnostni moment glede na os y manjši od vztrajnostnega momenta glede na os z ($I_y < I_z$). V tem primeru imenujemo vztrajnostni moment I_y *minimalni vztrajnostni moment*, os y pa *šibka vztrajnostna os*, saj je umestno pričakovati, da se nosilec pri dovolj veliki sili P ukloni ravno okrog osi y .

Za uvod pogledajmo, kam nas pripeljejo enačbe, ki smo jih izpeljali v elementarni teoriji upogiba z osno silo †. Zapis ravnotežnih pogojev za nosilec v nedeformirani legi pripelje do sklepa, da v nosilcu nastopa le tlačna osna sila $N_x = -P$, vse ostale notranje sile, torej upogibna momenta in obe prečni sili pa so enaki nič ($M_y = M_z = 0$ in $N_y = N_z = 0$). Enačba upogibnice v ravnini (y, z) je tedaj

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} = 0 \quad (U.5)$$

in po dvakratnem integriranju dobimo splošno rešitev

$$w(x) = C_1 x + C_2. \quad (U.6)$$

Integracijski konstanti C_1 in C_2 določimo iz kinematičnih robnih pogojev

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \dots \quad w = 0 & \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \\ x = l \quad \dots \quad w = 0 & \quad \rightarrow \quad C_1 = 0, \end{aligned} \quad (U.7)$$

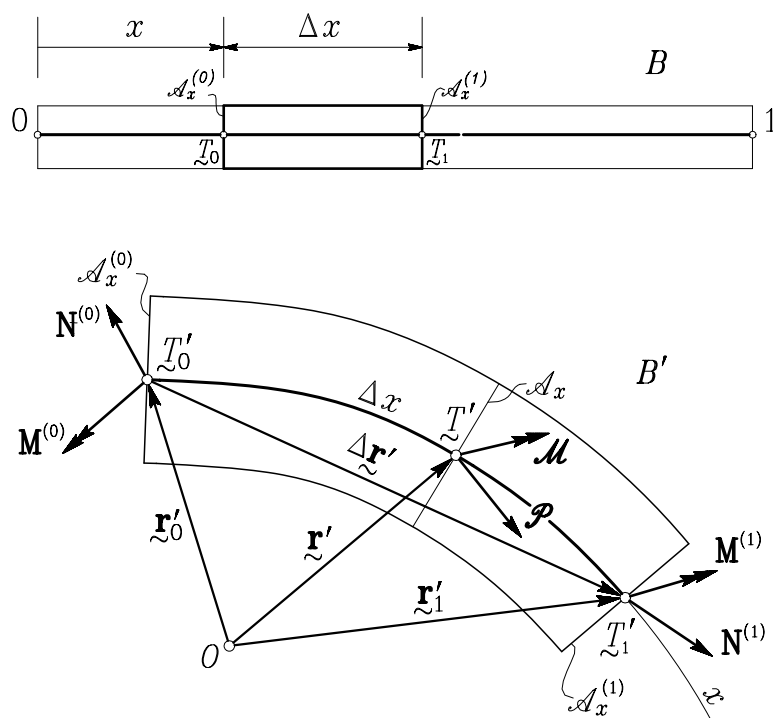
tako da je $w = 0$ na celotni dolžini nosilca in to ne glede na velikost obtežbe P . Z ravnotežnimi enačbami, ki smo jih izpeljali na nedeformirani obliki nosilca in ki zato ne upoštevajo vpliva vzdolžne obtežbe na upogibna momenta, torej ne moremo zajeti pojava uklona, čeprav nas po drugi strani izkušnja uči, da ta pojav v naravi dejansko nastopa.

† Glej knjigo Srpčič, Mehanika trdnih teles, 2003.

To pomeni, da moramo za obravnavanje uklonskih problemov vpeljati bolj strog matematični model nosilca, ki bo zajel medsebojni vpliv osne sile in upogibnega momenta. Kot prvi korak v tej smeri bomo zapisali ravnotežne pogoje nosilca v deformiranem stanju.

Ravnotežni pogoji za element deformiranega nosilca

Obravnavajmo element ravnega linijskega nosilca, ki ga omejujeta prečna prereza v točkah $\mathcal{T}_0(x, 0, 0)$ in $\mathcal{T}_1(x + \Delta x, 0, 0)$. Zunanja obtežba je v našem primeru opisana z nadomestnima linijskima obtežbama $\mathcal{P}(x)$ in $\mathcal{M}(x)$, za kateri predpostavimo, da sta konservativni in da torej med deformiranjem ohranjata svojo smer in velikost. Pod vplivom te obtežbe se obravnavani element deformira, kakor je prikazano na sliki U.5.



Slika U.5

V Lagrangevem opisu deformiranja ostanejo telesne koordinate posameznih točk nosilca nespremenjene med celotnim deformacijskim procesom, zato je končna dolžina obravnavanega elementa tudi po deformaciji številsko enaka Δx . Prostorske lege točk $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ in poljubne točke \mathcal{T} po deformaciji opišemo s krajevnimi vektorji $\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1$ in \mathbf{r}' glede na nepomično točko 0. Pri tem je

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_0 + \Delta \mathbf{r}' \quad \text{ozioroma} \quad \mathbf{r}'(x + \Delta x) = \mathbf{r}'(x) + \Delta \mathbf{r}'. \quad (U.8)$$

Za notranje sile in dvojice, s katerimi v točkah \mathcal{T}_0 in \mathcal{T}_1 preostali del nosilca deluje na obravnavani element, velja

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(0)} = -\mathbf{N}(x) & \quad \text{in} \quad \mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{N}(x + \Delta x) \\ \mathbf{M}^{(0)} = -\mathbf{M}(x) & \quad \mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{M}(x + \Delta x). \end{aligned} \quad (U.9)$$

Pri predznakih notranjih sil v točki \mathcal{T}_0 smo upoštevali, da ima prečni prerez $\mathcal{A}_x^{(0)}$ "negativno" normalo $\mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_x$.

Zapišimo najprej pogoj, da mora biti rezultanta vseh sil, ki v deformiranem stanju \mathbf{B}' delujejo na obravnavani element nosilca, enaka nič

$$\mathbf{N}^{(0)} + \mathbf{N}^{(1)} + \int_{\Delta x} \mathbf{P}(x) dx = \mathbf{0}. \quad (U.10)$$

Ob upoštevanju zvez (U.9) in izreka o povprečni vrednosti integrala † lahko enačbo (U.10) zapišemo na naslednji način

$$\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x) + \mathbf{P}(x + \xi) \Delta x = \mathbf{0} \quad (0 \leq \xi \leq \Delta x). \quad (U.11)$$

Enačbo (U.11) delimo z Δx , in izvedemo limitni proces, pri katerem gre dolžina obravnavanega elementarnega dela nosilca proti nič

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)}{\Delta x} + \mathbf{P}(x + \xi) \right] = \mathbf{0}. \quad (U.12)$$

† Glej: Bronštejn, Semendjajev, Musiol, Mühlig, Matematični priročnik (1997), str. 328

Limita ulomka v oglatem oklepaju je po definiciji prvi odvod notranje sile \mathbf{N} po x ; ko gre Δx proti nič, gre proti nič tudi ξ in tako dobimo končno obliko ravnotežnega pogoja (U.10)

$$\frac{d\mathbf{N}}{dx} + \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (U.13)$$

Kakor vidimo, smo dobili formalno povsem enako obliko ravnotežnega pogoja kot v primeru, ko smo ga zapisali na nedeformiranem elementu nosilca.

Zapišimo še drugi ravnotežni pogoj, ki zahteva, da je rezultirajoči statični moment vseh sil, ki delujejo na obravnavani del nosilca, enak nič

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{(0)} + \mathbf{M}^{(1)} + \underline{\mathbf{r}}'_0 \times \mathbf{N}^{(0)} + \underline{\mathbf{r}}'_1 \times \mathbf{N}^{(1)} + \\ & \int_{\Delta x} \underline{\mathbf{r}}' \times \mathbf{P}(x) dx + \int_{\Delta x} \mathbf{M}(x) dx = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (U.14)$$

Upoštevamo zveze (U.8) in (U.9) ter izrek o povprečni vrednosti integrala in s tem enačbo (U.14) zapišemo kot sledi

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(x + \Delta x) - \mathbf{M}(x) + \underline{\mathbf{r}}'(x) \times [\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)] + \\ & \Delta \underline{\mathbf{r}}' \times \mathbf{N}(x + \Delta x) + \underline{\mathbf{r}}'(x + \xi_1) \times \mathbf{P}(x + \xi_1) \Delta x + \mathbf{M}(x + \xi_2) \Delta x = \mathbf{0} \\ & (0 \leq \xi_1 \leq 1, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1). \end{aligned} \quad (U.15)$$

Enačbo delimo z Δx in izvedemo limitni proces, pri katerem gre dolžina elementa Δx proti nič. Tako dobimo

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{M}(x + \Delta x) - \mathbf{M}(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \underline{\mathbf{r}}'}{\Delta x} \times \mathbf{N}(x + \Delta x) + \mathbf{M}(x + \xi_2) + \right. \\ & \left. \underline{\mathbf{r}}'(x) \times \frac{\mathbf{N}(x + \Delta x) - \mathbf{N}(x)}{\Delta x} + \underline{\mathbf{r}}'(x + \xi_1) \times \mathbf{P}(x + \xi_1) \right] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (U.16)$$

Od tod sledi

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} + \frac{d\mathfrak{r}'}{dx} \times \mathbf{N} + \mathcal{M} + \mathfrak{r}' \times \left(\frac{d\mathbf{N}}{dx} + \mathcal{P} \right) = \mathbf{0}. \quad (U.17)$$

Ob upoštevanju enačbe (U.13) in ker iz poglavja o deformabilnem telesu vemo, da je

$$\frac{d\mathfrak{r}'}{dx} = \mathfrak{e}'_x, \quad (U.18)$$

sledi končna oblika momentnega ravnotežnega pogoja

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} + \mathfrak{e}'_x \times \mathbf{N} + \mathcal{M} = \mathbf{0}. \quad (U.19)$$

Tudi momentna ravnotežna enačba deformiranega elementa se od tiste, ki smo jo izpeljali na nedeformiranem elementu, razlikuje le po tem, da v njej namesto vektorja \mathbf{e}_x nastopa vektor \mathfrak{e}'_x deformirane telesne koordinatne baze. Kakor se bo izkazalo v nadaljevanju, pa ima ta razlika daljnosežne posledice pri izpeljavi uklonskih enačb.

Klasična uklonska enačba

Uvodoma smo za šibko vztrajnostno os izbrali os y , kar pomeni, da pričakujemo uklon nosilca okrog osi y . Zato v nadaljevanju obravnavamo primer upogiba v ravnini (z, x) , kakor je prikazano na *sliki U.6*. V tem primeru je $N_y = 0$, $M_x = M_z = 0$ ter $u_y = 0$, $\omega_x = \omega_z = 0$. Upoštevati moramo, da gre pri uklonu za majhno spremembo oblike nosilca, zato je tudi v tem primeru umestna predpostavka, da so prvi parcialni odvodi pomikov in specifične spremembe dolžin majhne količine v primerjavi z enoto

$$\left| \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right| \ll 1 \quad \text{in} \quad |D_{ii}| \ll 1. \quad (U.20)$$

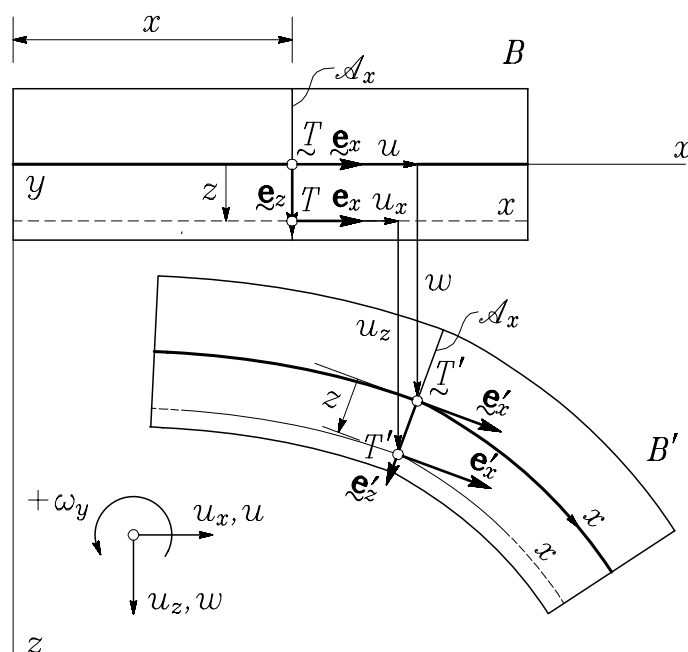
Pojav uklona je značilen za vitke nosilce, pri katerih je vpliv prečnih sil na povese in vzdolžne normalne napetosti zanemarljiv, zato privzamemo Bernoullijev model nosilca. Kakor smo ugotovili v okviru elementarne teorije, so pri upogibu z osno silo v ravnini (x, z) kartezijske

komponente pomika poljubne točke Bernoullijevega nosilca povezane s pomiki linijskega računskega modela z izrazi †

$$u_x = u - z \frac{dw}{dx}, \quad u_z = w. \quad (U.21)$$

Vektor pomika poljubne točke nosilca je tako

$$\mathbf{u} = \left(u - z \frac{dw}{dx} \right) \mathbf{e}_x + w \mathbf{e}_z. \quad (U.22)$$



Slika U.6

V poglavju o deformabilnem telesu smo izpeljali formulo za določitev baznih vektorjev deformirane telesne koordinatne baze

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}. \quad (U.23)$$

† Glej knjigo Srpčič, Mehanika trdnih teles, 2003, str.516.

Deformirani telesni bazni vektor \mathbf{e}'_x je tako

$$\mathbf{e}'_x = \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}'_x = \left(1 + \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2}\right) \mathbf{e}_x + \frac{dw}{dx} \mathbf{e}_z. \quad (U.24)$$

V skladu s prvo od predpostavk (U.20) lahko v koeficientu pri \mathbf{e}_x zane-marimo prvi parcialni odvod pomika u v primerjavi z enoto in dobimo

$$\mathbf{e}'_x = \left(1 - z \frac{d^2 w}{dx^2}\right) \mathbf{e}_x + \frac{dw}{dx} \mathbf{e}_z. \quad (U.25)$$

V momentni ravnotežni enačbi (U.19) nastopa deformirani bazni vektor $\underline{\mathbf{e}}'_x$, ki pripada težišču prereza \mathcal{T}

$$\underline{\mathbf{e}}'_x = \mathbf{e}'_x|_{z=0} \quad \rightarrow \quad \underline{\mathbf{e}}'_x = \mathbf{e}_x + \frac{dw}{dx} \mathbf{e}_z. \quad (U.26)$$

Vektorski produkt, ki nastopa v enačbi (U.19), je tedaj

$$\underline{\mathbf{e}}'_x \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & \frac{dw}{dx} \\ N_x & 0 & N_z \end{vmatrix} = \left(N_x \frac{dw}{dx} - N_z\right) \mathbf{e}_y. \quad (U.27)$$

Zaradi popolnosti določimo še deformirani bazni vektor $\underline{\mathbf{e}}'_z$

$$\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}'_z = \underline{\mathbf{e}}'_z = -\frac{dw}{dx} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z. \quad (U.28)$$

Brez težav se prepričamo, da je vektor $\underline{\mathbf{e}}'_y$, ki pripada deformirani telesni koordinatni bazi, kar enak baznemu vektorju \mathbf{e}_y . Velja tudi

$$\underline{\mathbf{e}}'_x \cdot \underline{\mathbf{e}}'_y = \underline{\mathbf{e}}'_y \cdot \underline{\mathbf{e}}'_z = \underline{\mathbf{e}}'_z \cdot \underline{\mathbf{e}}'_x = 0, \quad (U.29)$$

kar nam pove, da ostanejo telesni bazni vektorji, ki pripadajo točkam linijskega računskega modela, tudi po deformaciji pravokotni med seboj, pri čemer pa vektorja $\underline{\mathbf{e}}'_x$ in $\underline{\mathbf{e}}'_z$ nista več enotska vektorja.

Sedaj lahko zapišemo ravnotežne enačbe deformiranega nosilca v skalarni obliki

$$\frac{dN_x}{dx} + \mathcal{P}_x = 0 \quad (U.30)$$

$$\frac{dN_z}{dx} + \mathcal{P}_z = 0 \quad (U.31)$$

$$\frac{dM_y}{dx} + N_x \frac{dw}{dx} - N_z + \mathcal{M}_y = 0. \quad (U.32)$$

Kakor vidimo, nastopa v momentni ravnotežni enačbi tudi osna sila N_x . Vendar je ta enačba nekoliko nerodna, saj bi morali najprej izračunati prečno silo N_z v odvisnosti od zunanje obtežbe \mathcal{P}_z . Tej nevšečnosti se izognemo tako, da enačbo (U.32) odvajamo po x , upoštevamo zvezo (U.31) in po ureditvi dobimo

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(N_x \frac{dw}{dx} \right) = - \left(\mathcal{P}_z + \frac{d\mathcal{M}_y}{dx} \right). \quad (U.33)$$

Kakor vemo, predstavlja osna sila rezultanto vzdolžnih normalnih napetosti v prečnem prerezu, upogibni moment pa rezultanto njihovih statičnih momentov glede na težišče prečnega prereza nosilca. Z drugimi besedami: normalne napetosti σ_{xx} v prečnem prerezu moramo določiti tako, da bo njihova rezultanta enaka osni sili N_x , njihov rezultirajoči statični moment glede na težišče pa upogibnemu momentu M_y , ki smo ju predhodno določili iz ravnotežnih pogojev. Z enoosnim poskusom smo normalno napetost σ_{xx} povezali s specifično spremembo dolžine vzorca D_{xx} . V poenostavljenem primeru, ko so vse deformacijske količine zelo majhne v primerjavi z enoto, smo specifično spremembo dolžine kot realno fizikalno količino nadomestili z diagonalno komponento ε_{xx} simetričnega dela matrike parcialnih odvodov pomikov, ki je po svoji naravi formalna matematična količina, fizikalni pomen pa ji lahko pripišemo le v primeru majhnih deformacij. V okviru našega strožjega računskega modela nosilca pa vzamemo konstitucijski zakon v obliki, ki ustreza enoosnemu poskusu

$$\sigma_{xx} = ED_{xx}. \quad (U.34)$$

V poglavju o deformabilnem telesu smo specifične spremembe dolžin izrazili s komponentami tenzorja velikih deformacij E_{ij} †. Za vlakno, ki je bilo pred deformacijo vzporedno osi x , tako dobimo

$$D_{xx} = \sqrt{1 + 2E_{xx}} - 1. \quad (U.35)$$

Na obeh straneh enačbe (U.35) prištejemo 1 in jo kvadriramo

$$1 + 2D_{xx} + D_{xx}^2 = 1 + 2E_{xx}. \quad (U.36)$$

Upoštevajoč predpostavko (U.20) lahko zanemarimo D_{xx}^2 v primerjavi z $2D_{xx}$. Tako ugotovimo, da je specifična sprememba dolžine D_{xx} približno enaka komponenti E_{xx} tenzorja velikih deformacij, ki jo lahko izrazimo s parcialnimi odvodi pomikov

$$D_{xx} \approx E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2. \quad (U.37)$$

Pri tem smo upoštevali, da je v našem primeru $u_y = 0$. Ob predpostavki (U.20) lahko vzamemo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \ll \left| \frac{\partial u_x}{\partial x} \right| \quad (U.38)$$

in z upoštevanjem zvez (U.21) dobimo

$$D_{xx} = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right). \quad (U.39)$$

Vzdolžna normalna napetost v poljubni točki prečnega prereza je tako

$$\sigma_{xx} = E \left[\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right) \right]. \quad (U.40)$$

Sedaj lahko zapišemo pogoja, da mora biti rezultanta normalnih napetosti σ_{xx} enaka osni sili N_x , njihov rezultirajoči statični moment

† Glej knjigo Srpčič, Mehanika trdnih teles, 2003.

glede na težišče pa upogibnemu momentu M_y , ki smo ju predhodno določili iz ravnotežnih pogojev

$$N'_x = \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x = E \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x - E \frac{d^2w}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x \quad (U.41)$$

$$M_y = \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x = E \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x - E \frac{d^2w}{dx^2} \int_{\mathcal{A}_x} z^2 \sigma_{xx} dA_x \quad (U.42)$$

Ker je

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_x} \sigma_{xx} dA_x &= A_x \\ \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x &= S_y = 0 \\ \int_{\mathcal{A}_x} z^2 \sigma_{xx} dA_x &= I_{yy}, \end{aligned} \quad (U.43)$$

iz enačb (U.41) in (U.42) sledi

$$N'_x = E A_x \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (U.44)$$

$$M_y = - E I_{yy} \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (U.45)$$

Z oznako ' pri osni sili smo poudarili, da gre za fizikalno komponento notranje sile, ki se nanaša na enotski vektor v smeri deformiranega

telesnega baznega vektorja $\underline{\mathbf{e}}_x'$

$$N_x' = \mathbf{N} \cdot \frac{\underline{\mathbf{e}}_x'}{|\underline{\mathbf{e}}_x'|}. \quad (U.46)$$

Pri upogibnem momentu te potrebe ni, saj je $\underline{\mathbf{e}}_y' = \mathbf{e}_y$.

Zveza (U.45) je v mehaniki konstrukcij znana kot *enačba elastike* in je očitno neodvisna od tega, ali zapišemo ravnotežne pogoje na deformiranem ali na nedeformiranem nosilcu. To je razumljivo, saj gre dejansko za zvezo med upogibnim momentom in ukrivljenostjo nosilca, ki je zgolj geometrijski pojem in je pri majhnih spremembah oblike nosilca dovolj natančno opisana z drugim odvodom povesa w . Zvezo (U.45) vstavimo v momentno ravnotežno enačbo (U.33) in dobimo

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 M_y}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(N_x \frac{dw}{dx} \right) = \left(\mathcal{P}_z + \frac{d\mathcal{M}_y}{dx} \right)}. \quad (U.47)$$

Tako smo dobili strožjo obliko enačbe upogibnice, ki vključuje tudi vpliv osne sile na upogibke $w(x)$.

V nadaljevanju si oglejmo tri različne možnosti uporabe te enačbe. Najprej vzemimo, da na nosilec razen nadomestne linijske obtežbe \mathcal{P}_z in \mathcal{M}_y deluje še natezna osna obtežba v krajiščih nosilca, tako da je osna sila pozitivna in konstantna po dolžini nosilca

$$N_x = N > 0 = \textit{konst.}$$

Zaradi preglednejšega pisanja vpeljemo okrajšavo

$$k^2 = \sqrt{\frac{N}{EI_{yy}}} \quad (U.48)$$

in za primer, da je upogibna togost EI_{yy} konstantna vzdolž nosilca dobimo

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{EI_{yy}} \left(\mathcal{P}_z + \frac{d\mathcal{M}_y}{dx} \right). \quad (U.49)$$

Splošna rešitev dobljene enačbe je

$$w(x) = C_1 \operatorname{sh} kx + C_2 \operatorname{ch} kx + C_3 x + C_4 + w_p, \quad (U.50)$$

kjer je w_p partikularna rešitev, odvisna od desne strani enačbe (). Natančnejša matematična analiza pokaže, da dobljena enačba nima singularnih točk. To je razumljivo, saj si zlahka predstavljamo, da natezna osna sila kvečjemu zmanjšuje povese zaradi prečne obtežbe.

Druga možnost je, da v nosilcu vlada konstantna tlačna osna sila

$$N_x = -P = \textit{konst.}$$

Z okrajšavo

$$k^2 = \sqrt{\frac{P}{EI_{yy}}} \quad (U.51)$$

in pri konstantni upogibni togosti se enačba (U.47) glasi

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{EI_{yy}} \left(\mathcal{P}_z + \frac{d\mathcal{M}_y}{dx} \right). \quad (U.52)$$

V tem primeru nastopajo v homogenem delu splošne rešitve trigonometrične funkcije

$$w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 + w_p, \quad (U.53)$$

Nadaljnja analiza je odvisna od tega, kakšna je desna stran dobljene enačbe. V primeru, da na nosilec deluje od nič različna prečna obtežba ($\mathcal{P}_z \neq 0$ in $\mathcal{M}_y \neq 0$), je desna stran različna od nič in nosilec se deformira že pri vzdolžni obtežbi $P = 0$. Začetni pomik w_0 se z naraščanjem sile P povečuje, kar pomeni, da ravna ravnotežna oblika nosilca ni možna. Zato tudi ne pride do uklona nosilca v smislu preskoka iz ravne v deformirano ravnotežno lego. Tak primer mehanskega stanja imenujemo *napetostni problem* za razliko od *stabilnostnega problema*, s kakršnim imamo opraviti v primeru, da je prečna obtežba enaka nič.

Tedaj namreč nosilec ostane raven vse dokler sila P ne doseže kritične vrednosti, pri kateri nosilec trenutno preide v izklonjeno ravnotežno lego. Diferencialna enačba (U.21) se tedaj glasi

$$\boxed{\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0}, \quad (U.54)$$

Ob upoštevanju vpeljanih predpostavk in okrajšave (U.51) lahko iz enačbe (U.32) izrazimo tudi prečno silo N_z

$$\boxed{N_z = - \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + k^2 \frac{dw}{dx} \right)}. \quad (U.55)$$

Enačbo (U.54) imenujemo *klasična uklonska enačba*, saj omogoča določitev kritične uklonske sile v klasičnih uklonskih primerih. V matematičnem pogledu gre za razmeroma preprosto navadno linearno homogeno diferencialno enačbo s konstantnim koeficientom, ki jo brez težav rešimo s primerno zamenjavo spremenljivk. Splošna rešitev je

$$\boxed{w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4}. \quad (U.56)$$

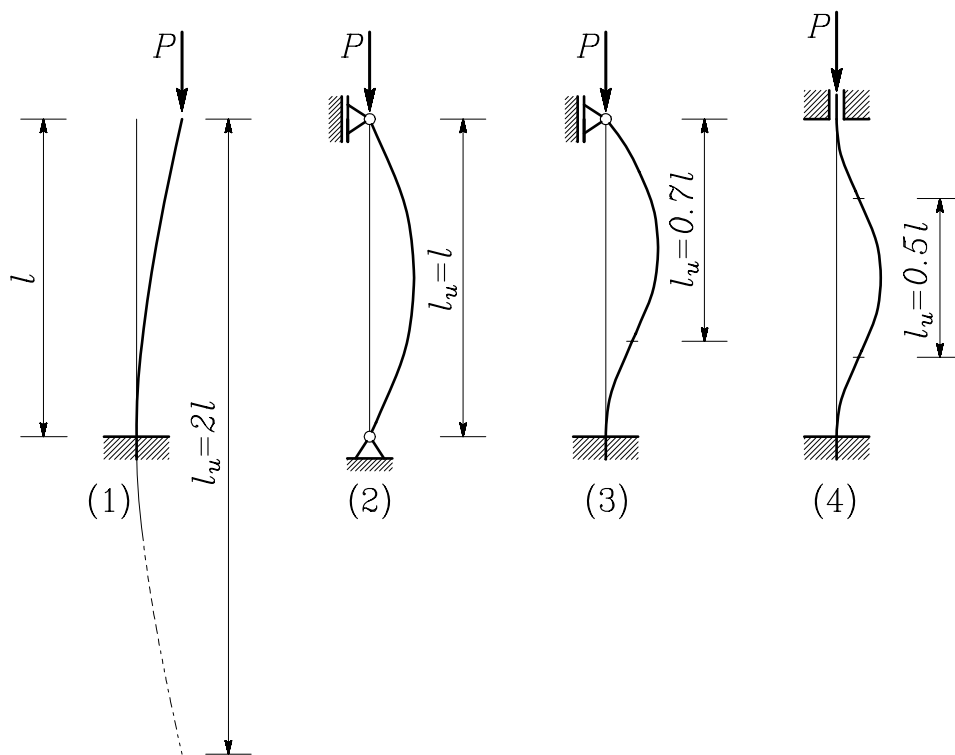
Če določimo prve štiri odvode pomika w

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx + C_3 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -k^2 C_1 \sin kx - k^2 C_2 \cos kx \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= -k^3 C_1 \cos kx + k^3 C_2 \sin kx \\ \frac{d^4 w}{dx^4} &= k^4 C_1 \sin kx + k^4 C_2 \cos kx, \end{aligned} \quad (U.57)$$

se lahko hitro prepričamo, da je nastavek (U.56) rešitev uklonske enačbe (U.54). Pri tem so C_1, \dots, C_4 integracijske konstante, ki jih moramo določiti iz ustreznih kinematičnih in statičnih robnih pogojev za vsak primer podpiranja nosilca posebej. Da bi lahko zapisali tudi kinematične robne pogoje v podporah, kjer je preprečen upogibni zasuk, se spomnimo še zveze med povosom w in zasukom ω_y

$$\omega_y = -\frac{dw}{dx}. \quad (U.58)$$

Določanje integracijskih konstant in s tem posebnih rešitev uklonske enačbe (U.54) prikažemo na štirih osnovnih uklonskih primerih (slika U.7), ki predstavljajo praktično pomembne primere tlačno obteženih stebrov z različnimi načini podpiranja.



Slika U.7

Prvi osnovni uklonski primer

Kot prvega od osnovnih uklonskih primerov obravnavajmo enostransko polnovpet steber dolžine l z minimalnim upogibnim vztrajnostnim momentom $I_y = I_{min}$ in z modulom elastičnosti E (slika U.7.1). V vpeti podpori ($x = 0$) morata biti izpolnjena kinematična robna pogoja, da sta preprečena povse w in zasuk ω_y . V prostem krajišču ($x = l$) pa moramo upoštevati statična robna pogoja, da sta tako prečna sila N_z kakor tudi upogibni moment M_y enaka nič. Pogoje, v katerih pomik w ne nastopa eksplicitno, izrazimo s pomočjo pomožnih enačb (U.45), (U.55) in (U.58)

$$\begin{aligned}
 x = 0 \dots & \begin{cases} w = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0 \\
 x = l \dots & \begin{cases} M_y = 0 \rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \\ N_z = 0 \rightarrow \frac{d^3w}{dx^3} + k^2 \frac{dw}{dx} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ob upoštevanju izrazov (U.57) za odvode pomika w dobimo

$$\begin{aligned}
 C_2 + C_4 &= 0 \\
 kC_1 + C_3 &= 0 \\
 k^2C_1 \sin kl + k^2C_2 \cos kl &= 0 \\
 k^2C_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{U.59}$$

Dobljeni homogeni sistem linearnih algebrajskih enačb za konstante C_1, \dots, C_4 je tako preprost, da bi ga lahko rešili kar na pamet. Vendar ga najprej zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{U.60}$$

Prikazani homogeni sistem enačb ima vedno trivialno rešitev $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Vendar nas te rešitev ne zanima, saj pripelje zgolj do nedeformirane ravnotežne oblike nosilca $w(x) = 0$. Netrivialne rešitve pa dobimo le v primeru, da je matrika koeficientov singularna, kar pomeni, da je njena determinanta enaka nič

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (U.61)$$

Z izvednotenjem determinante preide pogoj (U.61) v naslednjo obliko

$$k^5 \cos kl = 0. \quad (U.62)$$

Prva rešitev dobljene enačbe je $k = 0 \rightarrow P = 0$, vendar ta rešitev ni zanimiva, saj pri neobteženem nosilcu uklona ne pričakujemo. Preostane nam množica drugih rešitev

$$\cos kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (U.63)$$

od katerih pa nas spet zanima le rešitev pri $n = 0$, za katero ob upoštevanju oznake (U.51) velja

$$l \sqrt{\frac{P_{kr}^{(1)}}{EI_y}} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{P_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_y}{(2l)^2}}. \quad (U.64)$$

Tako smo dobili prvo in s tem najmanjšo kritično uklonsko silo v obravnavanem primeru, kar smo tudi poudarili z oznako ⁽¹⁾. Vse preostale rešitve pri $n = 1, 2, \dots$ bi namreč pripeljale do večjih vrednosti kritične uklonske sile, ki pa za praktično oceno uklonske varnosti nosilca niso pomembne.

Sedaj lahko končno zapišemo posebno rešitev uklonske enačbe za obravnavani primer. Pri $P = P_{kr}$ je matrika koeficientov sistema (U.60) singularna, zato je rešitev neskončno veliko. Drugače povedano, rešitev

lahko določimo le *do faktorja natančno*. Načeloma bi morali uporabiti katero od znanih metod za iskanje netrivialnih rešitev homogenega sistema enačb. Vendar je naš primer tako preprost, da lahko neposredno zapišemo

$$C_1 = C_3 = 0 \quad \text{in} \quad C_4 = -C_2. \quad (U.65)$$

Ker je ob upoštevanju izraza (U.64) za kritično silo

$$k = \sqrt{\frac{P_{kr}^{(1)}}{EI_y}} = \frac{\pi}{2l}, \quad (U.66)$$

sledi iz enačbe (U.56) posebna rešitev (*slika U.7.1*)

$$\boxed{w(x) = C_2 \left(\cos \frac{\pi x}{2l} - 1 \right)}. \quad (U.67)$$

Prva uklonska oblika obravnavanega nosilca je torej kosinusoida. Največji upogibek je določen z velikostjo konstante C_2 , ki je lahko poljubna, vendar dovolj majhna, da so izpolnjene predpostavke, ob katerih smo izpeljali uklonsko enačbo.

Drugi osnovni uklonski primer

Drugi osnovni uklonski primer predstavlja obojestransko členkasto podprt nosilec, ki je v pomično podprtem krajišču obtežen s tlačno vzdolžno silo P (*slika U.7.2*). Robni pogoji v tem primeru so

$$x = 0 \dots \begin{cases} w = 0 \\ M_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$x = l \dots \begin{cases} w = 0 \\ M_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

Ob upoštevanju izrazov (U.51) za odvode pomika w dobimo

$$\begin{aligned}
 C_2 + C_4 &= 0 \\
 k^2 C_2 &= 0 \\
 C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 kl + C_4 &= 0 \\
 k^2 C_1 \sin kl + k^2 C_2 \cos kl &= 0
 \end{aligned} \tag{U.68}$$

oziroma v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & kl & 1 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{U.69}$$

Pogoj za obstoj netrivialnih rešitev

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k^2 & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & kl & 1 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{U.70}$$

tokrat pripelje do enačbe

$$lk^4 \sin kl = 0. \tag{U.71}$$

Podobno kakor v prejšnjem primeru obravnavamo le možnost

$$\sin kl = 0 \quad \rightarrow \quad kl = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{U.72}$$

Rešitev $kl = 0$ ne pride v poštev in prvo kritično uklonsko silo dobimo pri $n = 1$

$$l \sqrt{\frac{P_{kr}^{(1)}}{EI_y}} = \pi \quad \rightarrow \quad \boxed{P_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}}. \tag{U.73}$$

Iz prve in druge enačbe sistema (U.68) sledi

$$C_2 = C_4 = 0, \tag{U.74}$$

iz tretje in četrte pa

$$\begin{aligned} C_1 \sin kl + C_3 l &= 0 \\ C_1 \sin kl &= 0. \end{aligned} \tag{U.75}$$

Torej mora biti $C_3 = 0$ in posebna rešitev uklonske enačbe je

$$\boxed{w(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}}. \tag{U.76}$$

V tem primeru je uklonska oblika sinusoida. Največji upogibek na sredini dolžine nosilca je določen s konstanto C_1 , ki je spet lahko poljubna, vendar dovolj majhna vrednost.

Tretji osnovni uklonski primer

Tretji osnovni uklonski primer predstavlja steber, ki je na enem koncu togo vpet, na drugem pa pomično vrtljivo podprt in obtežen s tlačno vzdolžno silo P (slika U.7.3). Robni pogoji za določitev integracijskih konstant so tedaj

$$\begin{aligned} x = 0 \dots & \begin{cases} w = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0 \\ x = l \dots & \begin{cases} w = 0 \\ M_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \end{aligned}$$

Ob upoštevanju izrazov (U.57) za odvode pomika w dobimo

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ kC_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 &= 0 \\ k^2 C_1 \sin kl + k^2 C_2 \cos kl &= 0 \end{aligned} \tag{U.77}$$

Podobno kakor v prejšnjih dveh primerih izrazimo pogoj za obstoj netrivialnih rešitev dobljenega homogenega sistema enačb z zahtevo, da mora biti determinanta matrike koeficientov enaka nič

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & l & 1 \\ k^2 \sin kl & k^2 \cos kl & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (U.78)$$

Tako dobimo

$$k^2 (\sin kl - kl \cos kl) = 0. \quad (U.79)$$

Pogoj za nastop ravnotežnega stanja v deformirani legi nosilca je tokrat

$$\sin kl - kl \cos kl = 0. \quad (U.80)$$

Dobljeno trigonometrično enačbo lahko rešimo s primerno iteracijsko metodo, na primer z Newtonovo metodo zaporednih približkov †. Najmanjša pozitivna rešitev, izračunana na tri decimalke natančno, je

$$kl = 4.493 \quad \rightarrow \quad l \sqrt{\frac{P_{kr}^{(1)}}{EI_y}} = 4.493. \quad (U.81)$$

Prvo kritično silo izrazimo podobno kakor v prejšnjih primerih in z zaokrožitvijo koeficienta v imenovalcu dobimo

$$\boxed{P_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_y}{(0.7l)^2}}. \quad (U.82)$$

V sistemu (U.77) lahko konstante C_2 do C_4 izrazimo s C_1

$$\begin{aligned} C_3 &= -kC_1 \\ C_2 &= -C_1 \operatorname{tg} kl \\ C_4 &= -C_2 = C_1 \operatorname{tg} kl. \end{aligned} \quad (U.83)$$

† Glej na primer: Bronštejn, Semendjajev, Matematični priročnik, Ljubljana, 1967, str. 163-165.

S tem in ob upoštevanju izraza (U.82) za kritično silo lahko uklonsko obliko opišemo z enačbo

$$w(x) = C_1 \left[\sin \frac{4.493 x}{l} - 4.493 \cos \frac{4.493 x}{l} + 4.493 \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right].$$

(U.84)

Četrty osnovni uklonski primer

Kot četrti osnovni uklonski primer obravnavamo obojestransko vpet nosilec, pri katerem je v obteženem krajišču sproščen vzdolžni pomik (slika U.7.4). Robni pogoji za določitev integracijskih konstant so tedaj

$$x = 0 \dots \begin{cases} w = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0$$

$$x = l \dots \begin{cases} w = 0 \\ \omega_y = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dw}{dx} = 0$$

Od tod sledi sistem homogenih enačb za integracijske konstante

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ kC_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 &= 0 \\ kC_1 \cos kl - kC_2 \sin kl + C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{U.85}$$

Iz zahteve, da mora biti determinanta matrike koeficientov enaka nič, dobimo pogoj za ravnotežje v deformiranem stanju v naslednji obliki

$$\cos kl - \frac{kl}{2} \sin kl - 1 = 0. \tag{U.86}$$

Hitro se lahko prepričamo, da je prva pozitivna rešitev dobljene enačbe $kl = 2\pi$. Od tod sledi prva kritična sila obravnavanega nosilca

$$\boxed{P_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_y}{(0.5l)^2}}. \quad (U.87)$$

Preostane nam še določitev uklonske oblike. Če zapišemo sistem enačb (U.85) pri $kl = 2\pi$, dobimo

$$\begin{aligned} C_1 &= C_3 = 0 \\ C_4 &= -C_2 \end{aligned} \quad (U.88)$$

in enačbo računске osi nosilca v deformirani ravnotežni legi lahko zapišemo v preprosti obliki

$$\boxed{w(x) = C_2 \left(\cos \frac{2\pi x}{l} - 1 \right)}. \quad (U.89)$$

Eulerjeva uklonska sila, uklonska dolžina, uklonska vitkost

Opazimo lahko, da smo ob predpostavki, da je $I_y = I_{min}$, kritično uklonsko silo v vseh štirih obravnavanih uklonskih primerih zapisali v enaki obliki

$$\boxed{P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_u^2}}. \quad (U.90)$$

Pri tem smo vpeljali tako imenovano *uklonsko dolžino nosilca* l_u . V prvem od obravnavanih primerov je $l_u = 2l$, v drugem $l_u = l$, v tretjem $l_u = 0.7l$ in v četrtem $l_u = 0.5l$. Kritično silo, zapisano v obliki (U.90) imenujemo *Eulerjeva kritična uklonska sila* ali tudi *elastična uklonska sila*, saj je z njo določen prehod iz ravne v deformirano ravnotežno obliko le v primeru, da je nosilec v celoti v elastičnem območju.

Eulerjevo kritično silo pogosto zapišemo tudi v nekoliko drugačni obliki. Kakor vemo iz elementarne trdnosti, predstavlja mero za upogibno togost prečnega prereza nosilca tako imenovani *vztrajnostni polmer prereza*. Pri uklonu okrog šibke osi y je pomemben vztrajnostni polmer $i_y = i_{min}$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A_x}}. \quad (U.91)$$

Pri obravnavanju ukonskih problemov je ugodno vpeljati novo količino λ , ki jo imenujemo *uklonska vitkost nosilca* in je definirana z razmerjem med uklonsko dolžino l_u in minimalnim vztrajnostnim polmerom, v našem primeru i_y

$$\boxed{\lambda_y = \frac{l_u}{i_y}}. \quad (U.92)$$

S tem lahko izraz za Eulerjevo kritično silo zapišemo takole

$$\boxed{P_{kr} = \frac{\pi^2 E A_x}{\lambda_y^2}}. \quad (U.93)$$