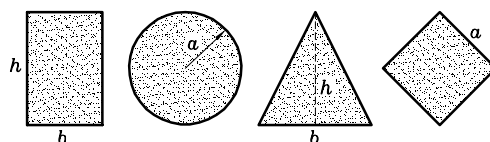


10. VAJA IZ TRDNOSTI (strižne napetosti v nosilcu)

NALOGA 1. Za prikazane like izračunaj strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} zaradi prečne sile N_z . Izračunaj tudi pripadajoče strižne oblikovne koeficiente κ_z .

Podatki: a, b, h

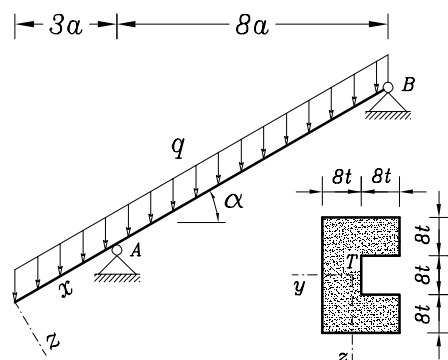
REŠITEV. (i) $\sigma_{xy} = 0, \sigma_{xz} = \frac{3N_z}{2Ax} \left(1 - 4\frac{z^2}{h^2}\right), \kappa_z = \frac{6}{5}$;
(iii) $\sigma_{xy} = 3\frac{N_z}{Ax} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{2y}{b}\right) \frac{b}{h} \ (y \geq 0), \sigma_{xz} = \frac{2N_z}{3Ax} \left(2 + \frac{3z}{h}\right) \left(1 - \frac{3z}{h}\right), \kappa_z = \frac{6}{5}$



NALOGA 2. V leseni tram je bočno zarezan žleb dimenzij $8t \times 8t$ cm, kot kaže skica. V navpični enakomerni zvezni obtežbi q , ki je definirana na enoto dolžine nosilca, je že upoštevana tudi njegova lastna teža. Določi in skiciraj: (i) potek notranjih sil ter označi prereza z maksimalnim upogibnim momentom in maksimalno prečno silo, (ii) potek normalnih napetosti v prerezu z maksimalnim upogibnim momentom ter potek strižnih napetosti na mestu maksimalne prečne sile.

Podatki: $q = 6 \text{ kN/m}, a = 0.5 \text{ m}, t = 1 \text{ cm}, \alpha = 30^\circ$

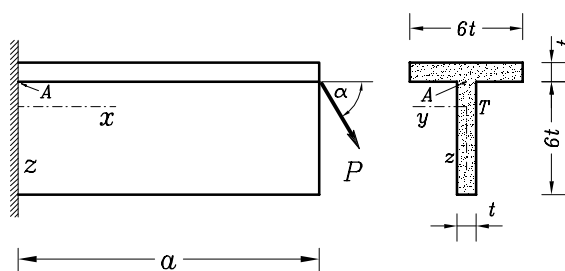
REŠITEV. $\max M_y = 10.23 \text{ kNm}, \max N_z = 13.69 \text{ kN}, \max \sigma_{xx} = 0.682 \text{ kN/cm}^2, \max \sigma_{xz} = 0.103 \text{ kN/cm}^2$



NALOGA 3. Za prikazani konzolni nosilec dolžine a , ki je obremenjen s silo P pod kotom α , izračunaj normalne in obe strižni napetosti v točki vpetja. V točki A izračunaj tudi glavni normalni in strižni napetosti.

Podatki: $a = 1.5 \text{ m}, \alpha = 60^\circ, P = 10 \text{ kN}, t = 25 \text{ mm}$

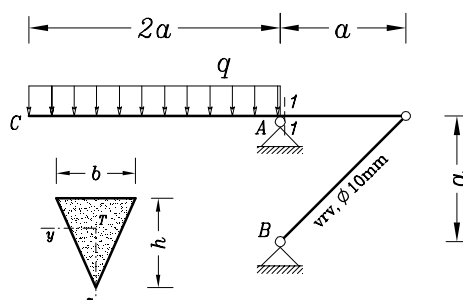
REŠITEV. $\sigma_{11}(A) = 20.05 \text{ MPa}, \sigma_{22}(A) = -0.35 \text{ MPa}$



NALOGA 4. Za prikazani ravninski okvir izračunaj: (i) diagrame notranjih sil, (ii) spremembo dolžine vrvi, (iii) in nariši normalne σ_{xx} in strižne napetosti σ_{xz} v prerezu 1-1, (iv) s Castiglianovim izrekom vertikalni pomik v točki C (upoštevaj tudi vpliv osnih sil na deformiranje).

Podatki: $E = 20000 \text{ kN/cm}^2, a = 2 \text{ m}, b = 20 \text{ cm}, h = 40 \text{ cm}, q = 15 \text{ kN/m}$

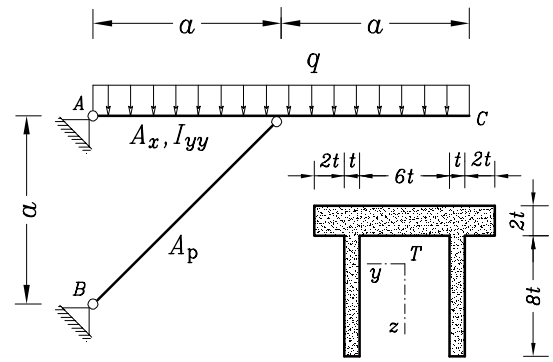
REŠITEV. $\Delta \ell_v = 1.53 \text{ cm}, \max \sigma_{xx}^{1-1} = 4.35 \text{ kN/cm}^2, \max \sigma_{xz}^{1-1} = 0.225 \text{ kN/cm}^2, w_C = 5.45 \text{ cm}$



NALOGA 5. V vmesni fazi gradnje je polovični mostni nosilec AC podprt in obtežen kot kaže slika. Izračunaj: (i) strižni oblikovni koeficient κ_z za prikazani prečni prerez, (ii) strižni oblikovni koeficient $\bar{\kappa}_z$, če strižne napetosti prevzameta le stojini, (iii) navpični pomik in zasuk v točki C. Upoštevaj vpliv osnih in prečnih sil na deformiranje.

Podatki: $E = 10\,000 \text{ kN/cm}^2$, $A_p = 50 \text{ dm}^2$, $q = 40 \text{ kN/m}$, $\nu = 0.3$, $a = 8 \text{ m}$, $t = 10 \text{ cm}$

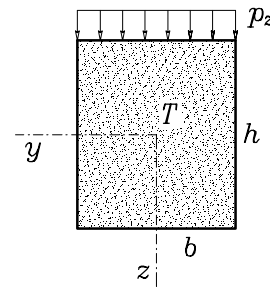
REŠITEV. (i) $\kappa_z = 2.099$, (ii) $\bar{\kappa}_z = 2$, (iii) $w_C = 1.66 \text{ cm}$, $\varphi_C = -0.118^\circ$



NALOGA 6. Izračunaj normalno napetost σ_{zz} za prostoležeči nosilec dolžine a obremenjen s porazdeljeno ploskovno obtežbo p_z na zgornjem robu pravokotnega prečnega prereza $b \times h$. Izračunaj tudi razmerje med normalnima napetostima $\max|\sigma_{zz}|$ in $\max|\sigma_{xx}|$.

Podatki: b , h , p_z

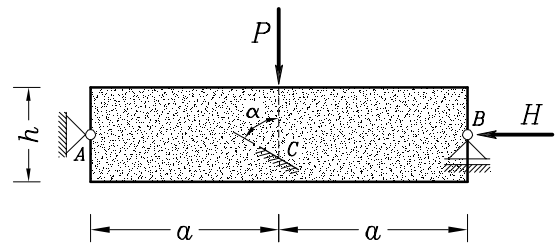
REŠITEV. $\sigma_{zz}(z) = -\frac{p_z}{2} (4\zeta^3 - 3\zeta + 1)$, $\zeta = \frac{z}{h}$;
 $\frac{\max|\sigma_{zz}|}{\max|\sigma_{xx}|} = \frac{4}{3} \left(\frac{h}{a}\right)^2$



NALOGA 7. Izračunaj napetostni vektor $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ v točki $C(a, 0, \frac{h}{4})$ za prikazani prostoležeči nosilec dolžine $2a$ pravokotnega prečnega prereza $b \times h$. Določi območje na nosilcu, kjer so glavne normalne napetosti po absolutni vrednosti manjše od σ_0 , tj. $|\sigma_{11,22}| < \sigma_0$; ter območje, kjer so glavne strižne napetosti po absolutni vrednosti manjše od τ_0 , tj. $|\tau_{I,II}| < \tau_0$.

Podatki: $b = 15 \text{ cm}$, $h = 50 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$, $P = 600 \text{ kN}$, $H = 400 \text{ kN}$, $\sigma_0 = 4 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_0 = 1 \text{ kN/cm}^2$

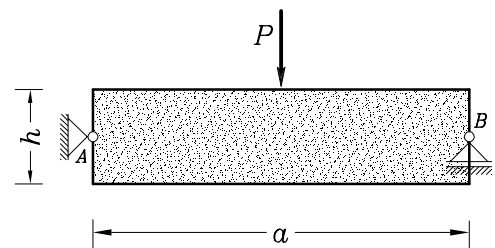
REŠITEV. $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = 1.744 \mathbf{e}_x + 0.225 \mathbf{e}_z \text{ [kN/cm}^2\text{]}$



NALOGA 8. Določi družino ortogonalnih trajektorij glavnih normalnih napetosti σ_{11} in σ_{22} za prikazani prostoležeči nosilec pravokotnega prečnega prereza $b \times h$, obremenjenega s koncentrirano silo P na sredini nosilca.

Podatki: $\alpha = \frac{h}{a} = \frac{1}{8}$

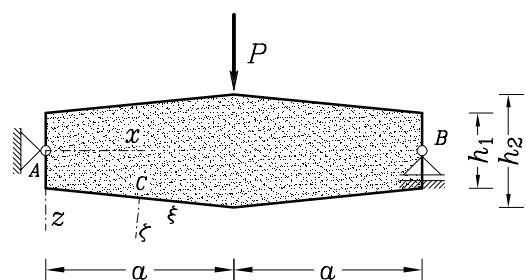
REŠITEV. $\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{4\xi\zeta}{1-4\zeta^2} \pm \sqrt{\left(\frac{4\xi\zeta}{1-4\zeta^2}\right)^2 + \alpha^2}$, $\xi = \frac{x}{a}$, $\zeta = \frac{z}{h}$



NALOGA 9. Za prikazani prostoležeči nosilec dolžine $2a$ s spremenljivim pravokotnim prečnim prerezom najprej izpelji izraz za strižno napetost σ_{xz} . Nato izračunaj matriko napetostnega tenzorja $\boldsymbol{\sigma}_C$ v točki $C(\frac{a}{2}, 0, z > 0)$ na robu nosilca glede na koordinatna sistema (x, y, z) in (ξ, η, ζ) .

Podatki: $h_1 = 10 \text{ cm}$, $h_2 = 50 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $P = 30 \text{ kN}$, $a = 2 \text{ m}$

REŠITEV.

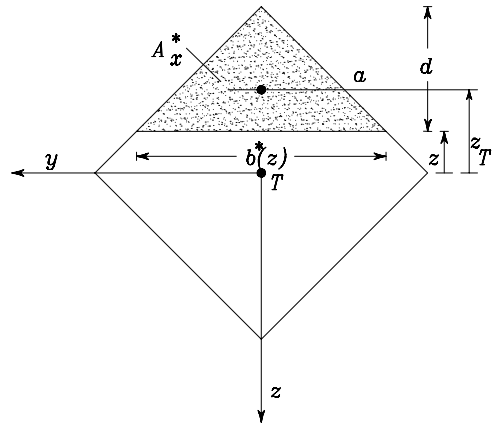


10. VAJA - NALOGA 1

Za prikazan ravninski lik izračunaj strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} zaradi prečne sile N_z ter pripadajoči oblikovni koeficient.

Podatki: a

Rešitev: Iz slike vidimo da sta $b^*(z)$ in $S_y^*(z)$ simetrični funkciji z -ja. Torej bomo σ_{xz} izračunali samo za gornjo polovico. Nadalje je zaradi simetrije v smeri y napetost $\sigma_{xy} = 0$. Prav tako se mesto največje strižne napetosti σ_{xz} ne nahaja v težišču. A_x^* označuje obravnavani pikčasti del prereza kot tudi ploščino tega dela.



Strižne napetosti in oblikovni koeficient izračunamo po enačbah (glej predavanja):

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{-N_z S_y^*(y)}{h^*(y) I_{yy}} = \sigma_{xy}(x, y). \\ \sigma_{xz} &= \frac{-N_z S_y^*(z)}{b^*(z) I_{yy}} = \sigma_{xz}(x, z). \\ \kappa_z &= \frac{A_x^2}{I_{yy}} \int_{A_x} \left(\frac{S_y^*(\bar{z})}{b^*(\bar{z})} \right)^2 d\bar{y} d\bar{z}\end{aligned}$$

Izračun $S_y^*(z)$:

- Uporaba dvojnega integrala:

$$S_y^*(z) = \int_{A_x^*} \bar{z} d\bar{y} d\bar{z} = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^z \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}} - \bar{z}}^{\frac{a}{\sqrt{2}} + \bar{z}} \bar{z} d\bar{y} d\bar{z}, \quad z \in \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

- Uporaba enojnega integrala:

$$S_y^*(z) = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^z b^*(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}, \quad z \in \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Upoštevamo $b^*(z) = 2 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + z \right)$ in dobimo (enak rezultat kot pri dvojnem integralu)

$$S_y^*(z) = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(-a + 2\sqrt{2}z \right) \left(a + \sqrt{2}z \right)^2.$$

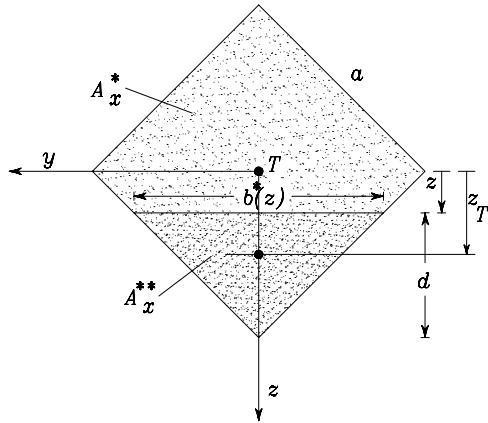
- Uporaba enačbe (glej sliko) $S_y^* = \int_{A_x^*} \bar{z} d\bar{y} d\bar{z} = z_T A_x^*$

$$S_y^*(z) = b^*(z) \frac{d}{2} z_T = 2 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + z \right) \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + z \right) \left(\frac{2z}{3} - \frac{a}{3\sqrt{2}} \right), \quad z \in \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$S_y^*(z) = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(-a + 2\sqrt{2}z \right) \left(a + \sqrt{2}z \right)^2.$$

Izračun strižnega oblikovnega koeficienta:

$$\kappa_z = \frac{A_x}{I_{yy}^2} \int_{A_x} \left(\frac{S_y^*(\bar{z})}{b^*(\bar{z})} \right)^2 d\bar{y} d\bar{z} = 2 \frac{A_x}{I_{yy}^2} \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^0 \left(\frac{S_y^*(\bar{z})}{b^*(\bar{z})} \right)^2 b^*(\bar{z}) d\bar{z} = \frac{31}{30}.$$



$S_y^*(z)$ lahko izračunamo tudi preko $S_y^{**}(z)$. Velja $S_y = 0 = S_y^{**} + S_y^*$. Od tu dobimo $S_y^* = -S_y^{**}$.