KINEMATIKA - opis gibanja točkastih teles

- togo telo ohranja obliko in velikost pri gibanju
- translatorno gibanje - togo telo pri gibanju ne spreminja svoje orientacije v prostoru
- gibanje je zvezno spreminjanje lege telesa v prostoru

$\vec{r}$ = krajevni vektor, ki določa lego točke P, glede na izhodišče O

* skalarji – povemo samo velikost – čas, temperatura, masa, gostota...
vektorji – poleg velikosti še smer – hitrost, lega, pospešek, sila...

- $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ → pravokotni koordinatni sistem

HITROST – $\vec{v}$ (simbol za vektor hitrosti)

- pove nam kako hitro se spreminja lega telesa oz kako hitro in v kateri smeri se telo giblje

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ določa lego točke v trenutku t

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ enačba tirnice v parametrični obliki

$\Delta\vec{r}$ – vektor pomika v časovnem intervalu Δt

$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ problem, ker $\Delta\vec{r} \neq \Delta s$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} ;$$

$d\vec{r}$ je vektor pomika, ko gre Δt → 0, njegova smer sovpada s smerjo tangente na tirnico gibanja v trenutku t

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_x\vec{i} + \vec{v}_y\vec{j} + \vec{v}_z\vec{k}$$

$$\vec{v}_x = \frac{dx}{dt}, \quad \vec{v}_y = \frac{dy}{dt}, \quad \vec{v}_z = \frac{dz}{dt}$$

- hitrost je odvod krajevnega vektorja po času
- enota za hitrost $[\vec{v}] = \frac{[d\vec{r}]}{[dt]} = \frac{m}{s}$

POSPEŠEK – $\vec{a}$

- pove nam hitrost in v kateri smeri se telesu spreminja hitrost
- v času Δt se hitrost spremeni od začetne vrednosti $\vec{v}(t)$ na vrednost $\vec{v}(t + \Delta t)$
- sprememba hitrosti v tem časovnem intervalu je $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- vektor pospeška vedno kaže na vloženo stran tirnice gibanja
- pospešek je odvod hitrosti po času

$$[\vec{a}] = \frac{[d\vec{v}]}{[dt]} = \frac{ms^{-1}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x\vec{i} + \vec{a}_y\vec{j} + \vec{a}_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x\vec{i} + dv_y\vec{j} + dv_z\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{a}_x = \frac{d\vec{v}_x}{dt}, \quad \vec{a}_y = \frac{d\vec{v}_y}{dt}, \quad \vec{a}_z = \frac{d\vec{v}_z}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} ; \quad d\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{(dt)^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

- pospešek je drugi odvod krajevnega vektorja $\vec{r}$ po času

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \vec{a}_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \vec{a}_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$

$\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ spreminja velikost hitrosti, $\vec{a}_r$ spreminja smer hitrosti

PREMO GIBANJE

- gibanje po premici (smer hitrosti je ves čas || s premico, smer gibanja izberemo kot smer koordinatne osi x)

$\vec{r} = x\vec{i}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = v\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

$v > 0$, če se telo giblje v + smeti osi x in obratno

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{i} = a\vec{i}$$

$a > 0$, če hitrost telesa narašča v smeri + osi x in obratno

Časovni grafi za premo gibanje

- časovni graf pospeša $\vec{a}$ $\left(\dfrac{m}{s^2}\right)$

- hitrost v času t_0 naj bo $v(t_0) = v_0$

$v = v_0$ = sprememba hitrosti v časovnem intervalu $(t - t_0)$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ /dt

$dv = adt$ – sprememba hitrosti v časovnem intervalu dt

$v - v_0 = \sum adt$ ko gre širina intervala → 0

$v - v_0 = \displaystyle\int_{t_0}^{t} adt$, $\displaystyle\int_{t_0}^{t} adt$ = enak ploščini, ki jo oklepa graf pospeška z abscisno osjo na intervalu od t_0 do t

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} adt$$

- časovni graf hitrosti $\vec{v}$ $\left(\dfrac{m}{s}\right)$

$x(t_0) = x_0$ = lega telesa na začetku opazovanja

$x(t) = x$ = lega telesa v nekem poljubnem trenutku t

$v = \dfrac{dx}{dt}$ → $dx = vdt$

$x - x_0 = \sum vdt$

- sprememba lege telesa v časovnem intervalu $t_0 - t$ je $x - x_0 = \displaystyle\int_{t_0}^{t} vdt$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} vdt$$

$a = tg(\alpha)\cdot\left(\dfrac{m}{s^2}\right)$

- pospešek v danem trenutku je enak tangesu naklonskega kota, ki ga tangenta na graf hitrosti v danem trenutku oklepa z absciso

- časovni graf lege telesa

$v(t) = tg\alpha \cdot (\frac{m}{s})$

ENAKOMERNO POSPEŠENO PREMO GIBANJE - a = const

$$v_{t_0=0} = v_0 + \int_{t_0}^{t} a dt = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + at) dt = x_0 + \int_{0}^{t} v_0 dt + \int_{0}^{t} atdt = x_0 + v_0 t + ½at$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$(x – x_0) = v- v_0$

- Časovni grafi za enakomerno pospešeno premo gibanje

Navpični met – primer enakomerno pospešenega premega gibanja

$a = -g = const$

$v = v_0 – gt$

$y = y_0 + v_0 t - ½gt$

$-2g(y – y_0) = v- v_0$

ENAKOMERNO GIBANJE - a = 0

$v = v_0 = const$

$x = x_0 + v_0 t$

$$v_0 = \frac{x - x_0}{t}$$

- Upoštevanje zračnega upora pri navpičnem metu

$a = -(a - \alpha v)$

$a(v) = - g + \alpha v$

- v trenutku ko telo doseže v_{max} prične padati enakomerno s stalno hitrostjo v_{max}

$a(v_{max}) = 0 = - g + \alpha v_{max} \Longrightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$

- α je odvisen od mase padajočega predmeta, prečnega preseka, gostote sredstva skozi katerega se giblje

$$\alpha = \frac{g}{v^2_{max}}$$

RAVNINSKO GIBANJE

- točkasto telo se ves čas giblje v dani ravnini
- koordinatni sistem lahko vedno izberemo tako, da ravnina (x, y) sovpada z ravnino gibanja

POŠEVNI MET - primer ravninskega gibanja

- os x je vodoravna
- v_0 začetna hitrost

$v_{0x} = v_0 cos\alpha$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

- H – max višina meta
- D – dolžina meta ali domet
- pri poševnem metu velja: $a = -\vec{j}\ g \Rightarrow a_x = 0,\ a_y = -g$
- poševni met je sestavljen iz dveh neodvisnih premih gibanj vzdolž koordinatnih osi x in y
- gibanje vzdolž x osi je enakomerno
- gibanje vzdolž y osi je enakomerno pospešeno

$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = \text{const}$

$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$

$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha\ t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$y = v_{0y}t + ½a_yt = v_0 \sin\alpha\ t$ - ½gt – enačba v parametrični obliki

- tirnica poševnega meta je parabola, če ne upoštevamo zračnega upora

$t_d = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ - čas dviganja

$H = y(t = t_d) = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

t_l = čas leta = čas po katerem kamen prileti na tla = $2t_d = 2\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$D = x(t = t_l) = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

D_{max} ko je $\alpha = 45^\circ \Rightarrow D_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$

KROŽENJE – drugi zgled za ravninsko gibanje

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

- dl – dolžina krožnega loka

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v}\ dt = d\vec{r}$

$(\vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j})dt = dx\ \vec{i} + dy\ \vec{j}$

$(\vec{v}_x^2 + \vec{v}_y^2)dt = dx + dy$

$v\ dt = (dr) = (dx + dy)$

$vdt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$dl = dx + dy$

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$dl = rd\phi$

$vdt = dl$

$v = \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{2\Pi \vec{r}\, d\phi}{360\ dt} = \dfrac{rd\phi}{dt}$

$\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$ - kotna hitrost (hitrost vrtenja radij vektorja)

$[\omega] = \dfrac{\text{radiani}}{s} = s^-$

$v = r\omega$

$\vec{a}_t = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d(r\omega)}{dt} = \dfrac{rd\omega}{dt}$

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ - kotni pospešek (pove kako hitro se spreminja kotna hitrost)

$[\alpha] = \dfrac{[d\omega]}{[t]} = s^-$

$\vec{a}_t = r\alpha$

- izpeljava izraza za radialni pospešek $\vec{a}_r$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\ dt = \vec{a}_r dt + \vec{a}_t dt$

$v(t + dt) - v(t) = d\vec{v}$

$v(t + dt) = v(t) + dv$

$\vec{v}(t + dt) = \vec{v}(t) + d\vec{v} = \vec{v}(t) + \vec{a}_t dt + \vec{a}_r dt$

$dv = \vec{a}_r dt + \vec{a}_t dt = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$

$\vec{a}_r dt = v d\phi / dt$

$= v \dfrac{d\phi}{dt} = \omega v$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{r^2\omega^4 + r^2\alpha^2}$

- enakomerno pospešeno kroženje

$\alpha = const$

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$

(v = v_0 at enakomerno pospešeno premo gibanje)

$\dfrac{d\phi}{dt} = \omega \Rightarrow d\phi = \omega dt \Rightarrow \phi = \phi_0 + \omega_0 t + ½\alpha t$

$(x = x_0 + v_0 t + ½at)$

$tg\alpha = \omega_0$

- enakomerno kroženje

$\alpha = 0$

$\omega = \omega_0 = const$

$\phi = \phi_0 + \omega_0 t$

t_0 = čas za en polni zasuk krajevnega vektorja = obhodni čas

$\phi(t = 0) = \phi_0$

$\phi(t = t_0) = \phi_0 + 2\Pi$

$\phi_0 + 2\Pi = \phi_0 + \omega_0 t_0 \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{2\Pi}{t_0} = 2\Pi\nu$

$\nu = \dfrac{1}{t_0}$ = frekvenca kroženja

$[\nu] = s^-$

Enakomerno kroženje kot sestav dveh $\perp$ nihanj

$x = r\cos\phi$

$\phi = \phi_0 + \omega t$

$\phi_0 = 0$

$\phi = \omega t$

r – amplituda nihanja (harmonično nihanje)

$v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d(r\cos\omega t)}{dt} = \dfrac{rd(\cos\omega t)}{dt} = -r\omega \sin\omega t$

$v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d(r\sin\omega t)}{dt} = r\omega \cos\omega t$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t} = \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = r\omega$

$a_x = \dfrac{d\vec{v}_x}{dt} = - r\omega \cos\omega t = - \omega x$

$a_y = \dfrac{d\vec{v}_y}{dt} = - r\omega \sin\omega t = -\omega y$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\omega^4 x^2 + \omega^4 y^2} = \sqrt{\omega^4(x^2 + y^2)} = \sqrt{\omega^4 r^2} = \omega r$

DINAMIKA

- 1. Newtonov zakon: telo, ki miruje bo vztrajalo v stanju mirovanja, telo, ki se giblje pa bo vztrajalo v stanju premega in enakomernega gibanja, če nanj ne učinkuje okolica
- če okolica učinkuje na telo enakomerno (ves čas enako močno), potem se telo prične gibati enakomerno pospešeno
- (učinek okolice na telo) $\alpha\ \vec{a}$: $\vec{F}\ \alpha\ \vec{a}$ → vpeljemo novo fizikalno količino = sila = $\vec{F}$
- 2. Newtonov zakon: $\vec{F} = m\vec{a}$; sorazmernostni faktor m imenujemo masa telesa

$[F] = [m][a] = kgms^- = 1N$ (1 Newton)

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$F = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

$F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}$

$F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, $F_z = ma_z$

- običajno na opazovano telo deluje več sil hkrati: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a}$, $\vec{F}$ = rezultanta vseh sil, ki delujejo na telo

$F_g = mg$ = sila teže

- 3. Newtonov zakon ali zakon o vzajemnem učinku

$\vec{F}_{1,2}$ je sila s katero 2. telo vleče 1.

$\vec{F}_{2,1}$ je sila s katero 1. telo vleče 2.

$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$

- Sila s katero 1. telo deluje na drugo je nasprotno enaka sili s katero 2. telo deluje na prvo

Newtonov gravitacijski zakon

- telesi sta krogelno simetrični

$F = G\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-}\ \dfrac{Nm^2}{kg^2}$ - gravitacijska konstanta

- t_0 = obhodni čas planeta
- r = polmer krožnice planeta

$K = \dfrac{t_0^2}{r^3} \approx 3 \cdot 10^{-19}\ \dfrac{s^2}{m^3}$ = const = 3. Kepplerjev izrek, K je Kepplerjeva konstanta

Enakomerno kroženje $\Longrightarrow a = a_r = \dfrac{v^2}{r}$

$v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\Pi r}{t_0} \Longrightarrow$ 2.NZ $\Longrightarrow F = ma_r = m\,\dfrac{v^2}{r} = m\,\dfrac{4\Pi^2 r^2}{rt_0^2} \cdot \dfrac{r}{r} = \dfrac{m\,4\Pi^2}{\frac{t_0^2}{r^3}} \cdot \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{4\Pi^2}{KM} \cdot \dfrac{mM}{r^2} = G\,\dfrac{mM}{r^2}$

$G = \dfrac{4\Pi^2}{KM} = \dfrac{4\Pi^2 m^3}{3 \cdot 10^{-19}\,s^2 \cdot 2 \cdot 10^{30}\,kg} = 6,7 \cdot 10^{-}\ \dfrac{Nm^2}{kg^2}$

Teža kot posledica Newtonovega gravitacijskega zakona

$F = G\,\dfrac{mM}{r^2} = mg(r)$

$g_r = G\,\dfrac{M}{r^2}$

g_0 = težni pospešek od površini Zemlje $\approx 10\ \dfrac{m}{s^2}$

$g_0 = g_0(r = R) = G\,\dfrac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-}\ \dfrac{Nm^2}{kg^2} \cdot \dfrac{6 \cdot 10^{24}\,kg}{(6370 \cdot 10^3\,m)^2} \approx 10\ \dfrac{m}{s^2}$

$R_{Zemlje} = 6370km$
$M \approx 6 \cdot 10\,kg$

$g(r) = G\,\dfrac{M}{r^2} \cdot \dfrac{R^2}{r^2} = g_0\,\dfrac{R^2}{r^2}$

Tirnice satelitov

$F = G\,\dfrac{mM}{r^2} = m\,\dfrac{v^2}{r}$

$v = G\,\dfrac{M}{r} = G\,\dfrac{M}{R^2} \cdot \dfrac{R^2}{r} = g_0\,\dfrac{R^2}{r} = (g_0 R)\,\dfrac{R}{r}$

$v(r) = \sqrt{g_0 R} \cdot \sqrt{\dfrac{R}{r}} = v_1 \sqrt{\dfrac{R}{r}}$

$v_1 = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{10\ \dfrac{m}{s^2} \cdot 6400\ km} = 8 \cdot 10\ \dfrac{m}{s}$ → prva kozmična hitrost

$v_2 = \sqrt{2}\ v_1 \approx 11,2\ \dfrac{km}{s}$ → druga kozmična hitrost

- Centrifugalna sila je sila, ki se pojavi le, če gibanje opazujemo v neinercialnem sistemu (kjer Newtonov zakon ne velja). Če hočemo, da NZ velja vpeljemo sistemske sile ali navidezne sile

$F_{ctr} = F_{ct}$

Sila lepenja in sila trenja pri drsenju teles

- Klada miruje (m = masa klade): 2. NZ $\Longrightarrow \sum F_y = 0 : N - mg = 0 \Longrightarrow N = mg$
- vodoravna sila podlage = F_l = sila lepenja

2. NZ $\Longrightarrow \sum F_x = 0 : F_l - F = 0 \Longrightarrow F_l = F$

$0 \le F_l \le F_{lmax} = \mu_l$ – koeficient lepenja ($\mu_l \approx$ 0-1)

- Klada zdrsne

F_t = sila trenja pri drsenju

$F_t = \mu_t N$; μ_t – koeficient trenja ($\mu_t < \mu_l$)

a) klada miruje na strmini

2. NZ zahteva: $\sum F_x = 0 : mg \sin\phi - F_l = 0 \Longrightarrow F_l = mg \sin\phi$

$\sum F_y = 0 : mg \cos\phi - N = 0 \Longrightarrow N = mg\cos\phi$

$F_l \le F_{lmax} = \mu_l N = \mu_l mg \cos\phi$

-Če hočemo, da klada miruje: $F_l < F_{lmax}$

$mg \sin\phi \le mg\mu_l \cos\phi$ /: $\cos\phi$

$tg\phi \le \mu_l$

b) $\phi > \phi_{max} \Longrightarrow$ klada drsi po klancu dol

($a_x = a$; $a_y = 0$)

$0 = \sum F_y$: $N = mg \cos\phi$

$ma = \sum F_x \Longrightarrow ma = mg \sin\phi - F_t$; $F_t = \mu_t N = \mu_t mg \cos\phi$

$\Longrightarrow ma = mg \sin\phi - \mu_t mg \cos\phi$ /:m

$\Longrightarrow a = g(\sin\phi - \mu_t \cos\phi)$

Sila upora pri gibanju telesa skozi snov

$F_{upora} = \frac{1}{2} c_2 \rho S v$ → kvadratni zakon upora

c_2 = koeficient upora brez enot, določimo ga eksperimentalno

ρ = gostota snovi skozi katero se telo giblje

S = prečni presek telesa v ravnini $\perp$ na smer gibanja

$ma = F_{upora} - mg$

$F_{upora} - mg = 0$ telo se začne gibati s stalno hitrostjo v_{max}

$\frac{1}{2} c_2 \rho S v_{max} - mg = 0$ /:m $\qquad v_{max} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$

$$\frac{c_2 \rho S}{2m} v_{max}^2 - g = 0$$

$$\alpha = \frac{c_2 \rho S}{2m}$$

- če je gibanje telesa skozi snov počasno in če je viskoznost snovi velika (ζ), potem velja za silo upora t.i linearni zakon upora:

$F_{upora} = c_1 v \zeta l$

- c_1 = koeficient linearnega upora
- ζ = viskoznost snovi
- l = karakteristična dimenzija telesa

$\mathcal{R} = \frac{\rho v l}{\zeta}$ = Reynoldsovo število

$\mathcal{R} >> 1$ → kvadratni zakon upora

$\mathcal{R} \le 1$ → linearni zakon upora

Hooke-ov zakon za prožno vzmet

2.NZ $\Longrightarrow \sum F_x = 0$

$mg - F_v = 0$

$F_v = mg$

x – raztezek vzmeti

$F_v \leftrightarrow x$

$\frac{F_v}{x}$ = const = k = konstanta vijačne vzmeti

$F_v = -kx$ → Hookov zakon

GIBANJE TELES

- Telo je sistem točkastih teles (atomov ali molekul) med katerimi delujejo t.i. notranje sile

3.NZ : $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$: $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$

- Če so sile $\vec{F}_{ij}$ zelo močne se telo obnaša kot trdna snov. V tem primeru so razdalje med posameznimi točkastimi telesi nekaj 0,1nm (1nm = 10^{-9} m)
- Če so sile šibke (to je pri večjih razdaljah $\approx$nm) pa je snov mehka; skrajni primer plini
- $\vec{F}_i$ je zunanja sila, ki deluje na točkasto telo št. i

Gibalna količina točkastega telesa

2. NZ za točkasto telo z maso m se glasi: F = ma, $a = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$F = \frac{mdv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$\vec{G} = m\vec{v}$ = gibalna količina

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

Gibanje sistema točkastih teles, med katerimi delujejo notranje sile (poleg zunanjih sil)

$$\frac{d\vec{G}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \ldots + \vec{F}_{1n}$$

$$\frac{d\vec{G}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \ldots + \vec{F}_{in}$$

vse enačbe seštejemo $\Longrightarrow \frac{d\vec{G}_1}{dt} + \frac{d\vec{G}_2}{dt} + \ldots + \frac{d\vec{G}_n}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$

$$\frac{d\vec{G}_n}{dt} = \vec{F}_n + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots + \ldots + \vec{F}_{n,n-1}$$

$\Longrightarrow$

(notranje sile se izničijo $\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ji}$)

$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \ldots + \vec{G}_n$ = celotna gibalna količina telesa

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ = rezultanta vseh zunanjih sil

$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F}$ → celotna gibalna količina se spreminja le če so zunanje sile $\vec{F} = 0$

$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{G} = const$ - zakon o ohranitvi gibalne količine

$\vec{G} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_n\vec{v}_n$

$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

$G = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n)$

$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$

$\vec{G} = \frac{md}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1}{m} + \frac{m_2\vec{r}_2}{m} + \ldots + \frac{m_n\vec{r}_n}{m}\right)$

Definicija krajevnega vektorja masnega središča: $\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_r + \ldots m_n\vec{r}_n}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m}$

$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$ = hitrost masnega središča

$G = \frac{md\vec{r}_c}{dt} = m\vec{v}_c$ = gibalna količina sistema točkastih teles je takšna, kakor da bi bila vsa masa telesa zbrana v masnem središču, ki se giblje s hitrostjo $\vec{v}_c$

$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F} : \Rightarrow \frac{md\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}$

$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}$ = pospešek masnega središča

$m\vec{a}_c = \vec{F}$

- masno središče se giblje tako, kakor da bi rezultanta vseh zunanjih sil $\vec{F}$ delovala na celotno maso telesa, ki je zbrana v masnem središču

$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F}$

$\vec{G} = m\vec{v}_c$

$m\vec{a}_c = \vec{F}$ = zakon za gibanje masnega središča

Sila curka

- S = prečni presek cevi iz katere izteka voda s hitrostjo $\vec{v}$

$Ø_v$ = volumski tok vode pove koliko litrov vode priteče iz cevi na sekundo

$Ø_v = \frac{dV}{dt} = \frac{Svdt}{dt} = Sv$

$dV = Svdt$

- $Ø_m$ = masni tok, pove koliko kg vode priteče iz cevi na sekundo

$Ø_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \rho Ø_v = \rho Sv$

$dm = \rho dV$, ρ = gostota tekočine

$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F}$ (opazujemo samo spremembo gibalne količine vode v vektorski smeri)

- Sprememba gibalne količine obarvanega dela vode v času dt je: $dG = dm(-v) - dm(v)$

$= 2vdm = -2\rho Svdt$

$\frac{d\vec{G}}{dt} = -2v\rho Sv = -2Ø_m = F$ = zunanja sila, ki uravnoveša U cev

- Sila curka = F_{curka} = nasprotno enaka sili F

$F_{reakcijska\ sila} = uØ_m$

$F_{curka} = -F = 2vØ_m$

Gibanje togega telesa

- Def togega telesa: togo telo je sistem točkastih teles med katerimi delujejo tako močne notranje sile ($\vec{F}_{ij}$), da se razdalje med posameznimi točkastimi telesi med gibanjem ne spreminjajo. Telo pri gibanju ohranja obliko in prostornino

$d_{ij} = (x_i - x_j) + (y_i - y_j) + (z_i - z_j)$

$$v_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

- $\vec{r}_c$ = krajevni vektor masnega središča
- $\vec{r}_i$ = krajevni vektor, ki določa lego i-tega togega telesa glede na masno središče

$$\vec{R}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i$$

$$v_i = \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$\frac{dr_i}{dt}$ = hitrost i-tega togega telesa glede na masno središče.

Ker je telo togo sledi: $\frac{dr_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

- $\vec{\omega}$ je trenutna kotna hitrost s katero se telo v danem trenutku vrti okrog neke osi, ki gre skozi masno središče

$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega}\ \vec{r}_i$ → poljubno gibanje togega telesa lahko popišemo kot sestav translatornega gibanja telesa s hitrostjo masnega središča $\vec{v}_c$ in rotacijo telesa okrog neke osi, ki gre skozi masno središče

Vrtenje togega telesa okrog osi, ki gre skozi masno središče in katere smer v prostoru je stalna

- $\vec{F}_i$ je rezultanta zunanjih sil, ki delujejo na i-to telo

$$\vec{F}_i^{(c)} = \vec{F}_i + \vec{F}_{in}$$

$\vec{F}_{in} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{ij}$ = vsota vseh notranjih sil, ki delujejo na i-to telo

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega}\ \vec{r}_i$$

$$\frac{dr_i}{dt} = \vec{\omega}\ \vec{r}_i$$

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{v}_c}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\omega}\,\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i\perp} + \vec{r}_{i\parallel}$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{i\perp})$$

$$= \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp} - \omega\ \vec{r}_{i\perp}$$

- Pospešek masnega središča že znamo izračunati, namreč $m\,\vec{a}_i = \vec{F}$; m masa telesa, $\vec{F}$ rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na togo telo

2. NZ za i-to telo se glasi: $m_i\,\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{in} = \vec{F}_i^{(c)} \Rightarrow m_i\,\vec{a}_c + m_i(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) - m_i\omega\ \vec{r}_{i\perp}$

- za vrtenje telesa ni pomembna rezultanta sil, ampak kako so te sile porazdeljene po telesu

$m_i\,\vec{r}_i \times \vec{a}_c + m_i\,\vec{r}_i \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) - m_i\omega\ \vec{r}_i \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_{in} = 0$, ker gre os vrtenja skozi masno središče

$$(\Sigma m_i\,\vec{r}_i) \times \vec{a}_c + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) - \sum_i m_i \omega^2\,\vec{r} \times \vec{r}_{i\perp} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{in}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{in}\ ;\ \vec{F}_{ij}\ ,\ \vec{F}_{ji}$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \rightarrow (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{in} = 0$ zato ker so notranje sile paroma nasprotno enake in delujejo vzdolž veznic togega telesa

$$\vec{r}_i \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) = (\vec{r}_{i\perp} + \vec{r}_{i\parallel}) \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) = \vec{r}_{i\perp} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) + \vec{r}_{i\parallel} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp})$$

$$\vec{r}_i \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) = \vec{\alpha}\ \vec{r}_{i\perp} - (\vec{r}_{i\parallel}\vec{\alpha})\ \vec{r}_{i\perp}$$

$$\vec{r}_i \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{i\parallel} \times \vec{r}_{i\perp}$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i = (\vec{r}_{i\perp} + \vec{r}_{i\parallel}) \times (\vec{F}_{i\perp} + \vec{F}_{i\parallel})$$

$\vec{F}_{i\perp}$ = komponenta zunanje sile $\vec{F}_i$, ki je $\perp$ na os vrtenja

$\vec{F}_{i\parallel}$ = komponenta zunanje sile $\vec{F}_i$, ki je $\parallel$ z osjo vrtenja

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i = (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}) + (\vec{r}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\perp}) + \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{in}$$

$$\vec{\alpha}\,(\sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}^{\,2}) - \sum_i m_i\,(\vec{r}_{i\parallel}\vec{F}_i)\,\vec{r}_{i\perp} - \sum_i m_i\omega^2\,(\vec{r}_{i\parallel} \times \vec{r}_{i\perp})$$

$$\sum_i (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}) + \sum_i \vec{r}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\perp} + \sum_i \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\parallel}$$

$$\vec{\alpha} \sum m_i r_i^2 \perp = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \perp \times \vec{F}_i \perp$$

- Enakost komponent, ki so $\perp$ na os vrtenja, je samo zahteva, kakšne morajo biti zunanje sile, da os vrtenja ne spreminja smeri v prostoru

$$\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \perp$$ = J = vztrajnostni moment telesa za vrtenje okrog izbrane osi

[J] = [m][ ] = kgm

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \perp \times \vec{F}_i \perp = \sum_{i=1}^{N} M_i \; ; \; \vec{M}_i = \vec{r}_i \perp \times \vec{F}_i \perp$$ = navor zunanje sile $\vec{F}_i \perp$ glede na os vrtenja

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \perp \times \vec{F}_i \perp = \sum M_i$$ = M = vsota navorov zunanjih sil glede na dano os vrtenja

$j\,\vec{\alpha} = \vec{M}$

$m\,\vec{a}_c = \vec{F}$

Zakoni za vrtenje togega telesa

$J\,\vec{\alpha} = \vec{M}$ → velja za vrtenje okrog osi, ki gre skozi masno središče in ima stalno smer v prostoru

→ velja tudi za "fiksno os"

$J = \sum m_i \; \vec{r}_i \perp$

$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \perp \times \vec{F}_i \perp$

- Navor sile $\vec{F}$ glede na dano os vrtenja, sila $\vec{F}$ naj leži v ravnini table $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{F} \perp = \vec{F} \sin\phi$

- Smer vektorja navora najlažje določimo po pravilih desnosučnega vijaka

$\vec{M} = \vec{r} \; \vec{F} \sin\phi = \vec{r} \; \vec{F} \perp$

$\vec{r} \perp$ = ročica sile = pravokotna oddaljenost nosilke sile od osi vrtenja

$\vec{r} \perp = \vec{r} \sin\phi \Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \perp \vec{F}$

$J = \sum m_i \vec{r}_i^{\,2} \perp$ Računanje vztrajnostnega momenta J

- V praktičnih primerih vedno privzamemo, da je masa zvezno porazdeljena po prostornini telesa

$m_i r_i^2 \perp \leftrightarrow r^2 \; c \perp dm$

$J = \int r^2 \; dm$

$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$ (če je telo homogeno $\rho = \frac{m}{V}$)

$J = \int r^2 \perp \rho dV = \frac{m}{V} \int r^2 \perp dV$

Posebni primeri:

a) os gre skozi levi konec palice (b = 0): $J = \frac{1}{3} mL^2$

b) os gre skozi masno središče ($b = \frac{L}{2}$): $J_c = \frac{1}{12} mL^2$

$$J = \frac{m}{3L}\left[(\frac{L}{2} + a)^3 + (\frac{L}{2} - a)^3 \right] = \frac{1}{2} mL^2 + ma^2 = J_c + ma$$

$J = J_c + ma$ Steinerjev izrek

Formule:

- homogen valj: $J_c = \frac{1}{2} mR^2$

- homogena krogla: $J_c = \frac{2}{5} mR^2$

- votla krogla: $J_c = \frac{2}{3} mR^2$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ = navor sile

$[\vec{M}] = [\vec{r}][\vec{F}]$ = Nm = Newton meter

- Če na telo deluje več sil hkrati: $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$

Kotaljenje valja

$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \omega \times \vec{r}_i \perp$

P = točka, kjer se valj dotika podlage

$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{R}$

$\vec{v}_p = \vec{v}_c - \omega R$ → glede na to enačbo ločimo 3. tipe kotaljenja: i) $\omega R > \vec{v}_c$: kotaljenje s podrsavanjem v smeri nazaj

ii) $\omega R = \vec{v}_c$: kotaljenje brez drsenja

iii) $\vec{v}_c > \omega R$: kotaljenje s podrsavanjem v smeri gibanja

- 2.NZ za gibanje masnega središča: $m\vec{a}_c = mg\sin\phi = F_l$

$0 \le F_l \le \mu_l N = F_{lmax}$

- zakon za vrtenje okrog osi, ki gre skozi masno središče: $J\vec{\alpha} = \vec{M}$

$$J\vec{\alpha} = F_l R \Rightarrow F_l = \frac{J\alpha}{R}$$

- $\vec{v}_c = \omega R$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt}$$

$$\vec{a}_c = R\alpha \Rightarrow \frac{J\alpha}{R} = \frac{Ja_c}{R^2}$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt}$$

$$F_l = \frac{Ja_c}{R^2} \Rightarrow m\vec{a}_c = mg\sin\phi - \frac{Ja_c}{R^2}$$

$$m\vec{a}_c + \frac{Ja_c}{R^2} = mg\sin\phi$$

$$m\vec{a}_c\left(1 + \frac{J}{mR^2}\right) = mg\sin\phi$$

$$\vec{a}_c = \frac{g\sin\rho}{1 + \frac{J}{mR^2}}$$

$$2\vec{a}_c x_c = \vec{v}_c^2 \Rightarrow \frac{2gx_c\sin\rho}{1 + \frac{J_c}{mR^2}} = \frac{2gh_c}{1 + \frac{J_c}{mR^2}}$$

Telo	$\frac{J_c}{mR^2}$	$\vec{a}_c$
Poln valj	$\frac{\frac{1}{2}mR^2}{mR^2} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}g\sin$
Polna krogla	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{7}g\sin$
Votel valj	1	$\frac{1}{2}g\sin$
Votla krogla	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}g\sin$

Zakon za vrtenje okrog stalne osi

- Telo je simetrično glede na os vrtenja

$J\vec{\alpha} = \vec{M}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

- J = vztrajnostni moment telesa glede na izbrano os

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

$J\vec{\omega} = \vec{\Gamma}$ - vrtilna količina togega telesa glede na dano os vrtenja

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \vec{M}$$

- Če je vsota zunanjih navorov enaka nič, torej $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\Gamma}$ = const = J $\vec{\omega}$ = const → zakon o ohranitvi vrtilne količine

$\vec{\Gamma} = \vec{\omega}$ r= const

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$: $\vec{M}$ je $\perp$ na ravnino, ki jo tvorita $\vec{r}$ in $\vec{F}$

Precesija vrtavke

- J – vztrajnostni moment
- m masa vrtavke
- ω kotna hitrost vrtavke

$d\vec{\Gamma} = \vec{M}\,dt$

$d\vec{\Gamma} = Mdt = mgr_c dt = \vec{\Gamma}\,d\phi = \vec{\Gamma}\,\omega d\phi$

- Ω = kotna hitrost procesije vrtavke = $\frac{d\phi}{dt} = \frac{mgr_c}{J\omega}$

$\vec{\Gamma} = J\vec{\omega}$ - to da je $\vec{\Gamma} \parallel \vec{\omega}$ velja samo, če se telo vrti okrog simetrijske osi

- J_1 = vztrajnostni moment glede na os 1
- J_2 = vztrajnostni moment glede na os 2

$\vec{\Gamma} = J_1\vec{\omega}_1 + J_2\vec{\omega}_2$

$\omega J \neq \vec{\Gamma}$; J = vztrajnostni moment glede na navpično os

$\vec{\Gamma}_1 = J_1\vec{\omega}_1$

$\vec{\Gamma}_2 = J_2\vec{\omega}_2$

- Za vsako telo lahko poiščemo tri (z oznako 1, 2, 3) $\perp$ osi za katere velja, da če se telo vrti okrog katerekoli od teh osi, potem je $\vec{\Gamma} = J_1\vec{\omega}_i$, i = 1, 2, 3

J_1, J_2, J_3 so glavni vztrajnostni momenti

Delo sile in moč pri gibanju togega telesa

- dr = majhen premik prijemališča sile $\vec{F}$

dA = delo sile na poti dr: dA = $\vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}\cos\phi ds$

$|d\vec{r}| = ds \neq dr$

- celotno delo sile $\vec{F}$, ko njeno prijemališče popiše pot c(1, 2): $A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r} = \int_1^2 F\cos\phi\, ds$

moč = P = $\frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}\,d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}$

$\vec{v}$ = hitrost prijemališča sile

dA = Pdt

$A_{1-2} = \int_1^2 Pdt = \overline{P}\,(t_2 - t_1)$ definicija povprečne moči

$$\overline{P} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} Pdt$$

$$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{[F][r]}{[t]} = \frac{Nm}{s} = \frac{J}{s} = 1W$$

[A] = Nm = J(Joule)

- Posplošitev izraza za delo na primeru ko na telo deluje več sil hkrati: F_1, F_2…
- Delo izračunamo tako, da prejšnji izraz uporabimo za vsako silo posebej

$$A_{1-2}^{i} = \int_1^2 \vec{F}_i\,d\vec{r}_i$$

$$A_{1-2} = \sum_i A_{1-2}^{(i)} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i\,d\vec{r}_i$$

- Poljubno gibanje togega telesa

$d\vec{r}_i = \vec{v}_i\,dt = \vec{v}_c\,dt + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)dt = d\vec{r}_c + (\underbrace{\vec{\omega}\,dt}_{d\phi}) \times \vec{r}_i$

$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

- $\vec{r}_i$ = lega i-tega prijemališča glede na masno središče telesa

$d\vec{r}_i = d\vec{r}_c + d\vec{\phi} \times \vec{r}_i$

$$A_{1-2} = \int_1^2 \sum_i (\vec{F}_i\,d\vec{r}_c + \vec{F}_i(d\vec{\phi} \times \vec{r}_i))$$

$\sum_i \vec{F}_i$ = rezultanta vseh sil

$$\vec{F}_i(d\vec{\phi} \times \vec{r}_i) = (d\vec{\phi} \times \vec{r}_i)\vec{F}_i = d\phi(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = d\phi\,\vec{M}_i$$

$$\sum_i \vec{F}_i(d\vec{\phi} \times r_i) = \sum_i d\phi\,\vec{M}_i = d\vec{\phi}\,\vec{M}$$

$$\vec{M} = \sum_i M_i = \sum_i r_i \times F_i$$

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}_c + \int_1^2 \vec{M}\,d\vec{\phi}$$

- Posebna primera:

a) gibanje naj bo translatorno ($d\vec{\phi} = 0$): $A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}_c$, $P = \vec{F}\,\vec{v}_c$

b) vrtenje togega telesa okrog fiksne osi ($d\vec{r}_c = 0$): $A_{1-2} = \int_1^2 \vec{M}\,d\vec{\phi}$ - izraz za delo pri vrtenju: $dA = Md\vec{\phi}$,

$$P = \frac{dA}{dt} = M\frac{d\phi}{dt} = \vec{M}\,\vec{\omega}$$

$$\zeta = \text{izkoristek} = \frac{P_{dejanska}}{P_{max}}$$

Delo sile teže

$$A_{1-2}^{(g)} = \int_1^2 \vec{F}_g\,d\vec{r}$$

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_g\,d\vec{z} = -mg\vec{k}\,(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = -mgdz$$

$$A_{1-2}^{(g)} = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = mgz_1 - mgz_2$$

- Delo sile teže je neodvisno od oblike poti; odvisno je samo od začetne in končne lege telesa. Take sile za katere velja ta ugotovitev imenujemo konservativne

$mgz_c = W_p$ = potencialna energija telesa, to je energija, ki jo ima telo zaradi svoje lege v prostoru

$$A_{1-2}^{(g)} = W_{p(1)} - W_{p(2)}$$

Delo sile prožne vzmeti

- vzmet raztegujemo počasi, tako, da je njena hitrost stalna

$$\vec{F}_v = kx$$

- x = raztezek vzmeti
- k = prožnostna konstanta vzmeti

$$A_{1-2}^{(k)} = \int_1^2 \vec{F}_v\,d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2}(-kx)\,dx = ½k\,x_1^2 - ½k\,x_2^2$$

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx$$

$$\vec{F}_v = -kx\,\vec{i}$$

- x_1 = raztezek vzmeti na začetku
- x_2 = raztezek vzmeti na koncu
- W_{pr} = prožnostna energija vzmeti, to je energija, ki jo ima vzmeti zaradi svojega stanja

$W_{pr} = ½kx$

$$A_{1-2}^{(k)} = W_{pr(1)} - W_{pr(2)}$$

Izrek o spremembi kinetične energije togega telesa

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}_c + \int_1^2 \vec{M}\,d\vec{\phi}$$

$$m\vec{a}_c = \vec{F}$$

$$J\vec{\alpha} = \vec{M}$$

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

$\vec\alpha = \frac{d\vec\omega}{dt}$

$\vec\omega = \frac{d\vec\phi}{dt}$

$$\Rightarrow A_{1-2} = \int_1^2 m\,\vec a_c\,d\vec r_c + \int_1^2 J_c\,\vec\alpha\,d\vec\phi = \int_1^2 m\,\frac{dv_c}{dt}\,d\vec r_c + \int_1^2 J_c\,\frac{d\vec\omega}{dt}\,d\vec\phi = \int_1^2 m\,d\vec v_c\,\frac{d\vec r_c}{dt} + \int_1^2 J_c\,d\vec\omega\,\frac{d\vec\phi}{dt} =$$

$$\int_1^2 m\,\vec v_c\,d\vec v_c + \int_1^2 J_c\,\vec\omega\,d\vec\omega$$

$= \int_1^2 m v_c\,dv_c + \int_1^2 J_c\,\omega\,d\omega$ (izpustimo znake za vektor)

$= (½m\,v_{c_2}^2 - ½m\,v_{c1}^2) + (½J_c\,\omega_2^2 - ½J_c\,\omega_1^2)$

$= [½m\,v_{c_2}^2 + ½J_c\,\omega_2^2] - [½m\,v_{c1}^2 + ½J_c\,\omega_1^2]$ → delo vseh zunanjih sil

- Wk = kinetična energija togega telesa

$W_k = ½m\,v_c^2 + ½J_c\,\omega^2$

$A_{1-2} = W_{k(2)} - W_{k(1)}$

$A_{1-2} = \Delta W_k$ Delo vseh zunanjih sil je enaka spremembi kinetične energije togega telesa

$A_{1-2} = A_{1-2}^{(g)} + A_{1-2}^{(vse\_sile\_razen\_teže)}$

$A_{1-2} = \Delta W_k$

$A_{1-2}^{(g)} + A_{1-2}^{(vse\_sile\_razen\_teže)} = \Delta W_k$

$A_{1-2}^{(vse\_sile\_razen\_teže)} = \Delta W_k + W_{p(2)} - W_{p(1)}$

$= \Delta W_p$

$A_{1-2}^{(vse\_sile\_razen\_teže)} = \Delta W_k + \Delta W_p$

Ravnovesje togih teles in ravnovesne lege

- zakon za gibanje masnega središča: $\vec F = m\,\vec a_c$
- zakon za vrtenje: $J_c\,\vec\alpha = \vec M$

$\Rightarrow \vec a_c = 0,\ \vec\alpha = 0 \Rightarrow \vec F = 0,\ \vec M = 0$ → pogoj za ravnovesje togega telesa, v tem primeru telo miruje

- stabilna ravnovesna lega
- labilna ravnovesna lega
- metastabilna ravnovesna lega
- pogoj, da kroglica miruje v dani točki je mg sinϕ = 0 c $\Rightarrow \frac{mg\cdot\sin\phi}{mg\cdot\cos\phi} = tg\phi = 0$
- z = z(x) = krivulja, ki predstavlaj obliko doline
- $tg\phi = \frac{dz}{dx}$

Wp = mgz = potencialna energija krogljice v dani legi

$z = \frac{W_p}{mg} \Rightarrow tg\phi = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{mg}\cdot\frac{dW_p}{dx}$

- stabilna ravnovesna lega krogljice je tam, kjer ima Wp minimum
- labilna ravnovesna lega je tam, kjer ima Wp maximum

Nihanje

- premo gibanje točkastega telesa vzdolž osi x, katerega časovni graf prikazuje slika

- nihanje je periodično se ponavljajoče gibanje
- t_0 = nihajni čas; to je čas med dvema enakima zaporednima legama telesa v kateri je tudi smer hitrosti enaka
- $\nu = \frac{1}{t_0}$ = frekvenca nihanja

$[\nu] = s^{-}$

- harmonično nihanje je tako nihanje, pri katerem s elega telesa spreminja s časom kot sinusna ali kosinusna funkcija časa

- $x = x_0 \sin\omega t$
- $x(t) = x(t + t_0)$
- $x_0 \sin\omega t = x_0 \sin\omega(t + t_0)$
- $x_0 \sin\omega t = x_0 \sin(\omega t + \omega t_0)$
- $\omega t_0 = 2\Pi$
- $\omega = \frac{2\Pi}{t_0} = 2\Pi\nu$ = krožna frekvenca nihanja
- $[\omega] = \frac{radian}{s} = s^{-}$
- x_0 = amplituda nihanja

NIHALO NA VIJAČNO VZMET
- x = odmik nihala od ravnovesne lege
- m = masa uteži
- k = prožnostna konstanta vzmeti
- $F_v = k(x + s_0)$
- s_0 = raztezek vzmeti, ko je utež v ravnovesni legi
- a = pospešek uteži
- 2.NZ za gibanje uteži z maso m:

$ma = mg - k(x + s_0) \rightarrow ma = mg - kx - ks_0 \rightarrow mg - ks_0 = 0 \Rightarrow mg = ks_0 \rightarrow ma = mg - kx - ks_0$

$a = \frac{-kx}{m}$

- pospešek pri nihalu je vedno sorazmeren z odmikom x nihala od ravnovesne lege

$-\omega x + \omega_0 x = 0 \rightarrow (\omega_0 - \omega)x = 0 \rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{k}{m}$

$x(t) = A\sin(\omega_0 t - \delta)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$t_0 = \frac{2\Pi}{\omega_0} = 2\Pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\frac{k}{m} = \omega_0 \rightarrow a = -\omega_0\ x$

$a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0\ x = 0$ enačba harmoničnega nihanja–homogena diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti

- splošna rešitev te enačbe se zapiše v obliki: $x = A\sin(\omega t - \delta)$; A, δ sta konstanti

$\frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t - \delta)$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega\ A\sin(\omega t - \delta) = -\omega\ x$ - konstanti A, δ sta odvisni od tega kako nihalo poženemo (kdaj pričnemo šteti čas t)

- Začetni pogoji v trenutku t = 0, v = 0, $x = x_0$

$x = A\sin(\omega_0 t - \delta)$

$x(t = 0) = -A\sin\delta = x_0 \Rightarrow \delta = -\frac{\Pi}{2}$

$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t - \delta)$ $A = x_0$

$v(t = 0) = \omega_0 A\cos\delta = 0$

$x = x_0\cos\omega_0 t$

Začetni pogoji v t = 0, x = 0, $v = v_0 + x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

$x = x_0\cos\omega_0 t$

$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_0 \sin\omega_0 t = -v_0 \sin\omega_0 t$

$v_0 = \omega_0 x_0$ = amplituda hitrosti

$a = -\omega_0\ x = -\omega_0\ x_0\cos\omega_0 t = -a_0\cos\omega_0 t$

$a_0 = \omega_0\ x_0$ = amplituda pospeška

Izrek o spremembi kinetične energije za gibajočo se utež
- $A_{1-2} = \Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{pr}$ delo zunanjih sil razen sile teže in prožne sile vzmeti
- $W_{pr} = \frac{1}{2}kx^2$; x = raztezek vzmeti
- $\Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{pr} = 0 \Rightarrow W_k + W_p + W_{pr} = const$

- $W_k = \frac{1}{2}mv^2$
- $W_p = -mgx$ dogovor: potencialna energija je nič, ko je utež v ravnovesni legi
- $W_{pr} = \frac{1}{2}k(x+s_0)^2$
- W = celotna energija = $\frac{1}{2}mv^2 - mgx + \frac{1}{2}k(x+s_0)^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ks_0^2 + 2ks_0$

$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ks_0^2 - x(mg - ks_0) = const$ Prožnostna energija, ko je utež v ravnovesni legi

- $W - \frac{1}{2}ks_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = const$ Energija nihanja pri nihalu na vijačnico
- $W_{nih} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$
- $x = x_0\cos\omega_0 t$
- $v = -\omega_0 x_0 \sin\omega_0 t$
- $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}kx_0^2\sin^2\omega_0 t$
- $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2\omega_0 t$
- $W_{nih} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{kx^2}{m} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$

TEŽNO NIHALO
- ϕ = odmik nihala od ravnovesne lege
- J = vztrajnostni moment telesa glede na os vrtenja
- m = masa telesa
- l_c = oddaljenost masnega središča od osi vrtenja

Zakon za vrtenje: $J\alpha = M = -mgr_\perp$

$r_\perp = l_c\sin\phi$

$\alpha = -\frac{mgl_c}{J}\sin\phi$

$\sin\phi = \frac{r_\perp}{l_c}$

$s = l_c\phi$

Za majhne kote: $r_\perp \approx l_c\phi$

$\sin\phi \approx \frac{r_\perp}{l_c} = \frac{l_c\phi}{l_c} = \phi$

$\alpha = -\left(\frac{mgl_c}{J}\right)\phi \Rightarrow \frac{mgl_c}{J} = \omega_0$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl_c}{J}}$

$t_0 = \frac{2\Pi}{\omega_0} = 2\Pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}$

$\alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0\phi$

$\phi = A\sin(\omega_0 - \delta)$

$\phi = \phi_0\cos\omega_0 t$ (poseben primer)
- $W_{nih} = W_k + W_p$
- $W_p = 0$ ko je nihalo v ravnovesni legi
- $W_p(\phi) = mgh = \frac{1}{2}mgl_c\phi^2$
- $(l_c - h) + r_\perp^2 = l_c^2$
- $l_c^2 - 2l_c h + h + r_\perp^2 = l_c^2$
- $h - 2l_c h + r_\perp^2 = 0$
- $h = l_c - \sqrt{l_c^2 - r_\perp^2}$

- $h = \frac{(l_c - \sqrt{\ })(l_c - \sqrt{\ })}{(l_c + \sqrt{\ })} \approx \frac{r_\perp^2}{2l_c}$

- za majhne kote: $h \approx \frac{l_c \phi^2}{2}$

$$W_k = \frac{1}{2} J\omega^2$$

- ω = kotna hitrost, s katero se telo vrti okrog osi v izbranem trenutku = $\frac{d\phi}{dt} = -\omega_0 \phi_0 \sin\omega_0 t$

- $W_{nih} = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} mgl_c \phi^2 = const$

MATEMATIČNO NIHALO
- $J = ml$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$
- $t_0 = 2\Pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

NIHALO NA POLŽASTO VZMET
- $k \leftarrow\rightarrow D$ = sučnostna konstanta polžaste vzmeti
- $F_v = kx \leftarrow\rightarrow M = D\phi$
- J = vztrajnostni moment Al-plošče
- $J\alpha = -D\phi$
- $\alpha = -\frac{D}{J}\phi$
- $\omega_0 = \frac{D}{J} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$
- $\alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0 \phi = 0$
- $\phi = \phi_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$
- $W_{nih} = \frac{1}{2} J\omega^2 + W_{prož} = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} D\phi^2 = const$
- $W_{pr} = \frac{1}{2} kx^2 \leftarrow\rightarrow W_{prož} = \frac{1}{2} D\phi^2$
- $A = \int r d\phi$
- $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 \phi_0 \cos(\omega_0 t - \delta)$ (lahko vstaviš v Wnih)
- $t_0 = 2\Pi \sqrt{\frac{J}{D}}$

- $s = s_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$ nedušeno harmonično nihanje
- s = odmik nihala od ravnovesne lege

Dušeno nihanje = pri takem nihanju amplituda nihanja s časom pojenja in nihalo se slej ko prej ustavi
- $F_{upora} = bv$ ($b = c_1 l\zeta$)
- 2. NZ: $ma = mg - bv - k(x + s_0)$
- s_0 = raztezek vzmeti v ravnovesni legi
- $mg = ks_0$
- $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, $v = \frac{dx}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$
- $\frac{k}{m} = \omega_0$ = krožna frekvenca nedušenega nihanja ali lastna frekvenca nihala
- $\frac{b}{m} = 2\beta$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0 x = 0$ enačba dušenega nihanja

- $\beta = \frac{b}{2m}$ = koeficient dušenja

i) empirično smo ugotovili, da se amplituda nihanja s časom manjša
ii) zaradi sile upora pričakujemo, da bo nihalo nihalo s frekvenco $\omega_0' < \omega_0$
- nedušeno nihanje: $x = x_0\sin(\omega_0 t - \delta)$ (nastavek za dušeno δ nihanje)
- dušeno nihaje: $x = A(t)\sin(\omega_0' - \delta)$ (amplituda odvisna od časa)
- $\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}\sin(\omega_0' - \delta) + A\omega_0'\cos(\omega_0' - \delta)$
- $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2A}{dt^2}\sin(\omega_0' - \delta) + A\omega_0'\cos(\omega_0' - \delta) - A\omega_0'\ \sin(\omega_0't - \delta)$ → to vstavimo v enačbo dušenega nihanja in dobimo:

$\underbrace{[\ ]}_{=0}\sin(\omega_0' - \delta) + \underbrace{[\ ]}_{=0}\cos(\omega_0't - \delta) = 0$

- $A(t) = x_0 e^{-\beta t}$
- x_0 = amplituda na začetku = $A(t = 0)$
- $\omega_0' \ = \omega_0\ - \beta$
- $x = x_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_0' t - \delta)$
- vsako nihalo, če je prepuščeno samo sebi, se slej ko prej ustavi. Da nihalo kljub temu niha kar naprej, ga moramo poganjati z zunanjo silo F(t). Pravimo, da nihalu z zunanjo silo F(t) vsiljujemo nihanje.
- iz izreka o spremembi Wk sledi: dA(zunanje sile) = dWnih
- P(zun sile) = $\vec{F}\ \vec{v}$
- $\vec{v}$ = hitrost prijemališča sile = v nihala = nihajoče vzmeti
- P = $\vec{F}\ \vec{v}$
  = - $\vec{F}\ \vec{v}$ če je smer v nasprotna trenutni smeri sile
- poganjanje je najbolj učinkovito takrat, ko se sila in hitrost spreminjata na enak način in sta ves čas usmerjena v isto smer
- ma = mg – bv – k(x + s_0) + F(t)
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0\ x = \frac{F(t)}{m}$
- $\beta = \frac{b}{2m}$
- $\omega_0\ = \frac{k}{m}$
- poseben primer: $F(t) = F_0\sin\omega t$
- ugotovitev: če počakamo nekaj časa nihalo prične nihati z enako frekvenco ω s katero niha zunanja sila $F(t) = F_0\sin\omega t$.
  Amplituda je odvisna od ω in doseže največjo vrednost le pri določeni velikosti frekvence s katero nihalo vzbujamo.
- enačba vsiljenega nihanja: $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0\ x = \frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$ → nehomogena diferencialna enačba 2. reda s const koeficienti
- $x(t) = x(t)|_{homogena} + x(t)|_{partikularna\ rešitev}$
  $= x_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_0' t - \delta) + \underbrace{A\sin(\omega t - \Phi)}_{\text{Nihanje, ki ga povzroča zunanja sila}}$
- Φ = fazni zamik
- po daljšem času nihalo niha tako kot mu veleva zunanja sila ($e^{-\beta t}$ << 1)
- $x(t) = A\sin(\omega t - \Phi)$; konstanti A in Φ pa določimo na naslednji način:
  $x = A\sin(\omega t - \Phi) = A\cos0\ \sin\omega t - A\sin0\ \cos\omega t$

$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t - \Phi) = A\omega\cos\Phi\ \cos\omega t + A\omega\sin\Phi\ \cos t\omega$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega\ \sin(\omega t - \Phi) = -A\omega\ \cos\Phi\ \sin\omega t + A\omega\ \sin\Phi\ \cos\omega t$

- to vstavimo v enačbo vsiljenega nihanja in dobimo:

$(-A\omega\ \cos\Phi\ \sin\omega t + A\omega\ \sin\Phi\ \cos\omega t) + 2\beta(A\omega\cos\Phi\ \cos\omega t + A\omega\sin\Phi\ \cos t\omega) + \omega_0\ (A\cos0\ \sin\omega t - A\sin0\ \cos\omega t) = \frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$

$A((\omega_0\ - \omega\ )\cos\Phi + 2\beta\omega\sin\Phi)\sin\omega t) + A(-(\omega_0\ - \omega\ )\sin\Phi + 2\beta\omega\cos\Phi)\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$

$A((\omega_0\ - \omega\ )\cos\Phi + 2\beta\omega\sin\Phi) = \frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$

$A(-(\omega_0\ - \omega\ )\sin\Phi + 2\beta\omega\cos\Phi) = 0$

- $(\omega_0\ - \omega\ )\sin\Phi = 2\beta\omega\cos\Phi$
- $tg\Phi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
- Φ = kot zamika; to je fazni kot za katerega nihalo zaostaja za nihanjem zunanje sile

Vsiljeno nihanje

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0 \; x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$
- $x = A\sin(\omega t - \Phi)$
- $A = (-(\omega_0 - \omega)\sin\Phi + 2\beta\omega\cos\Phi) = 0$
- $A((\omega_0 - \omega)\cos\Phi + 2\beta\omega\sin\Phi) = \frac{F_0}{m}$
- $tg\Phi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
- $A = \frac{\frac{F_0}{m}}{((\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}$
- A je največji tedaj, ko je $\omega = \omega_0$. Pravimo, da je zunanja sila $F_0\sin\omega t$ v resonanci z nihalom.
- V resonanci ($\omega = \omega_0$) je fazni zamik enak $\Phi = \frac{\Pi}{2}$, torej: $x = A(\omega = \omega_0)\sin(\omega_0 t - \frac{\Pi}{2})$

$A(\omega = \omega_0) = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}$

$\sin(\omega_0 t - \frac{\Pi}{2}) = -\cos\omega_0 t$

$x = -\frac{F_0}{2m\beta\omega_0}\cos\omega_0 t$

$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{2m\beta}\sin \omega_0 t = \frac{F(t)}{2m\beta}$

$\frac{dW_{nih}}{dt} \; I_{F(t)} = Fv = \frac{F^2(t)}{2m\beta}$

$\frac{dW_{nih}}{dt} \; I_{Fupora} = -(bv)v = -bv = -b\frac{F^2(t)}{4m^2\beta^2} = -\frac{F^2(t)}{2m\beta}$

- pogajanje nihala je najbolj učinkovito tedaj, ko je zunanja sila F(t) v resonanci z nihalom, t.j ko velja $\omega = \omega_0$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Sestavljena nihala in sestavljeno nihanje

- J = vztrajnostni moment vsakega od nihal
- l_c = odaljenost masnega središča vsakega od nihal od osi vrtenja
- m = masa vsakega od nihal
- napišimo zakon za vrtenje vsakega nihala posebej: raztezek vzmeti je:

$b(\phi_2 - \phi_1) \Longrightarrow F_v = k\cdot raztezek = kb(\phi_2 - \phi_1)$

$\alpha_1 = \frac{d^2\phi_1}{dt^2}$ = kotni pospešek 1. nihala

$\alpha_2 = \frac{d^2\phi_2}{dt^2}$ = kotni pospešek 2. nihala

$J\alpha_1 = \sum M^{(1)} = -mgl_c\phi_1 + \frac{b^2k}{J}(\phi_2 - \phi_1)$

$J\alpha_2 = \sum M^{(2)} = -mgl_c\phi_2 + \frac{b^2k}{J}(\phi_2 - \phi_1)$

1. $\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + \frac{mgl_c}{J}\phi_1 - \frac{kb^2}{J}(\phi_2 - \phi_1) = 0$
2. $\frac{d^2\phi_2}{dt^2} + \frac{mgl_c}{J}\phi_2 + \frac{kb^2}{J}(\phi_2 - \phi_1) = 0$

Zanima nas $\phi_1(t)$ in $\phi_2(t)$

$\frac{mgl_c}{J} = \omega_0$

$$\frac{kb^2}{J} = \Delta$$

i) če seštejemo 1 in 2 sledi: $\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + \frac{d^2\phi_2}{dt^2} + \omega_0\ (\phi_1 + \phi_2) = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi_1 + \phi_2) + \omega_0^2(\phi_1 + \phi_2) = 0$$

=x

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\Phi_1 - \phi_2 = A_1 \sin(\omega_0^{(1)} t - \delta_1)\ ;\ \omega_0^{(1)} = \omega$$

ii) če enačbo 1. odštejemo od 2 pa dobimo: $\frac{d^2\phi_2}{dt^2} - \frac{d^2\phi_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\Delta^2)(\phi_2 - \phi_1)$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi_2 - \phi_1) + (\omega_0^2 + 2\Delta^2)(\phi_2 - \phi_1) = 0$$

$$\phi_2 - \phi_1 = A_2 \sin(\omega_0^{(2)} t - \delta_2)\ ;$$

$$\omega_0^{(2)} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Delta^2}$$

Ugotovitve: 1. Frekvenci $\omega_0^{(1)} = \omega$ in $\omega_0^{(2)} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Delta^2}$ sta lastni frekvenci sestavljenega nihala. Sestavljeno nihalo ima toliko lastnih frekvenc $\omega_0^{(1)}$, $\omega_0^{(2)}$ … kolikor enostavnih nihal ga sestavlja. V splošnem niso vse lastne frekvence različne

$$\phi_1 = \frac{1}{2} A_1 \sin(\omega_0^{(1)} t - \delta_1) - \frac{1}{2} A_2 \sin(\omega_0^{(2)} t - \delta_2)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} A_1 \sin(\omega_0^{(1)} t - \delta_1) - \frac{1}{2} A_2 \sin(\omega_0^{(2)} t - \delta_2)$$

2. Lastno nihanje sestavljenega nihala je takšno, pri katerem vsako od enostavnih nihal niha z enako frekvenco, ki je ena od lastnih frekvenc.

Npr: $A_2 = 0 \Longrightarrow \phi_2(t) = \frac{1}{2} A_1 \sin(\omega_0^{(1)} t - \delta_1)$

1. Lastno nihanje s frekvenco $\omega_0^{(1)} = \sqrt{\frac{mgl_c}{J}}$

$A_1 = 0 \Longrightarrow \phi_2(t) = -\phi_1(t) = \frac{1}{2} A_2 \sin(\omega_0^{(2)} t - \delta_2)$

2. lastno nihanje $\omega_0^{(2)} = \sqrt{\omega_0^2 + \Delta^2}$

3. Pri poljubnem sestavljenem nihalu lahko odmik i-tega enostavnega nihala od ravnovesne lege zapišemo kot vsoto harmoničnih nihanj z lastnimi frekvencami nihala

$$\phi_i(t) = \sum_{j=1}^{n} A_i^{(j)} \sin(\omega_o^{(j)} t - \delta_i^{(j)})$$

Takšno gibanje posameznega nihala v splošnem ni periodično ponavljajoče se gibanje, torej v splošnem ni nihanje. Nihanje dobimo le v primeru, če so vse lastne frekvence $\omega_o^{(j)}$ celoštevilčni mnogokratniki najmanjše lastne frekvence.

4. Poljubno nihanje lahko torej vedno zapišemo v obliki:

$$\phi(t) = \sum_{1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t - \delta n)$$ Fourier-jeva vrsta

ω_0 = najmanjša lastna frekvenca

5. Takšno nihanje najbolj nazorno predstavimo s spektrom nihanja

Osnove elastomehanike

- $\sum \vec{F}_i = 0$ telo miruje = je v mehanskem ravnovesju
- $\sum \vec{M}_i = 0$

- ker v naravni ni absolutno togih teles se vsako telo pod vplivom zunanjih sil deformira. Pri tem spremeni obliko in prostornino
- deformacije: - elastične: ko zunanje sile prenehajo delovati telo zavzame prvotno obliko in prostornino
  - plastične: če se telo ne povrne v prvotno obliko in prostornino
- porazdelitev zunanjih sil po površini in prostornini telesa: v splošnem so zunanje sile zvezno porazdeljene po površini in prostornini telesa

i) Površinska (ploskovna) porazdelitev sil

- $\vec{n}$ = vektor normale na ploskev dS (enotski vektor, ki je $\perp$ na ploskev dS) je delež celotne zunanje sile, ki deluje na ploskev dS

$d\vec{F} = d\vec{F}_{\perp} + d\vec{F}_{\parallel}$

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{d\vec{F}_{\perp}}{dS} + \frac{d\vec{F}_{\parallel}}{dS}$$

$\frac{d\vec{F}}{dS}$ = napetost [$\frac{N}{m^2}$]

$\frac{d\vec{F}_{\parallel}}{dS} = \mathcal{T}$ = strižna napetost

$\frac{d\vec{F}_{\perp}}{dS} = \sigma\vec{n}$ natezna napetost, če $\frac{d\vec{F}_{\perp}}{dS}$ kaže v isto smer kot $\vec{n}$

$-P\vec{n}$ tlačna napetost, če $\frac{d\vec{F}_{\perp}}{dS}$ kaže v nasprotno smer kot $\vec{n}$

- porazdelitev zunanjih sil po površini telesa opredelimo torej tako, da za vsak ploskovni element navedemo ustrezno napetost. Celotno silo F, ki deluje na površino telesa zapišemo kot: $F = \int_S (\sigma\vec{n} + \mathcal{T})dS$

ii) Prostorninska porazdelitev zunanjih sil

- $f = \frac{d\vec{F}}{dV}$ = gostota telesa
- $\vec{F} = \int f dV$
- $d\vec{F} = dmg = \rho dVg = \rho g dV$
- ρ = gostota snovi
- v primeru teže je gostota sile f enaka: $f = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{\rho g dV}{dV} = \rho g$ = specifična teža

Osnovni tipi deformacij

- Natezna deformacija palic
- L >> a, b
- F je enakomerno porazdeljena po celotnem prečnem preseku palice
- $\frac{F}{S} = \sigma$ = natezna napetost
- zaradi delovanja zunanjih sil se palica raztegne
- $L \rightarrow L + \Delta L$
- ΔL = raztezek palice
- $\Delta L = \frac{F}{S} \cdot L \cdot \frac{1}{E}$
- E = prožnostni modul snovi
- $\frac{\Delta L}{L} \cdot E = \frac{F}{S}$
- $\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon$ = relativni raztezek palice
- $\varepsilon E = \sigma$ Hooke-ov zakon za natezanje
- $[E] = [\sigma] = \frac{N}{m^2}$
- če palico stiskamo
- $\Delta L < 0$
- $\frac{\Delta L}{L} < 0$; $-\varepsilon E = P$
- Hooke-ov zakon

$\varepsilon E = \sigma$

$\frac{dL}{L} \cdot E = \frac{F}{S}$

$\Delta L = \frac{1}{E} \cdot L \cdot \frac{F}{S}$

- L >> a, b
- $L \rightarrow L + \Delta L$
- $a \rightarrow a + \Delta a$
- $b \rightarrow b + \Delta b$
- $0 < \eta < \frac{1}{2}$

- $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \eta \frac{\Delta L}{L}$
- η = Poissonovo št.
- ΔV = ?
- $V = abL$
- $V + \Delta V = (L + \Delta L)(a - \Delta a)(b - \Delta b)$

$= abL + ab\Delta L - \Delta abL - a\Delta bL + \Delta a\Delta bL - a\Delta b\Delta L - \Delta ab\Delta L + \Delta a\Delta b\Delta L$

- $\Delta V = ab\Delta L - \Delta abL - a\Delta bL + \Delta a\Delta bL - a\Delta b\Delta L - \Delta ab\Delta L + \Delta a\Delta b\Delta L$
- $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta b}{b} ...$

Zelo majhen in ni pomemben

- $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\eta)$

Ker je $\Delta V > 0$

Hooke-ov zakon za tlak

- stisnemo iz vseh strani
- $P_1 = \frac{F_1}{S_1}$
- $P_2 = \frac{F_2}{S_2}$
- $P_3 = \frac{F_3}{S_3}$
- $\frac{\Delta V}{V} = -\chi \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$
- χ= stisljivost snovi [$\frac{m^2}{N}$]
- Poseben primer: $P_1 = P_2 = P_3 = P$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi P$$

Strižna deformacija ali Hooke-ov zakon za strig

- $\frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{E}{S}$
- σ = strižni modul snovi
- $\frac{\Delta x}{h}$ = tgO $\approx$ O za majhne kote
- $\frac{F}{S} = \mathcal{T}$ = strižna napetost
- $\sigma O = \mathcal{T}$ Hooke-ov zakon za strig
- $[\sigma] = [\mathcal{T}] = [\frac{N}{m^2}]$
- $\varepsilon E = P$
- $\frac{\Delta L}{L} = -\frac{P}{E}$
- $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\eta)$
- $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{E}(1 - 2\eta)$
- $\frac{\Delta V}{V} = -\chi \frac{P}{3} = -\chi(P_1 + P_2 + P_3)\frac{1}{3}$
- $\chi/3 = \frac{(1 - 2\eta)}{E} \Rightarrow \chi = \frac{3(1 - 2\eta)}{E}$