FIZIKA

Literatura: - R. Kladnik – Osnove fizike I in II
- Visokošolska fizika I, II in III
- I. Kuščer, A. Moljk, T. Kranjc, J. Peternelj – Fizika za srednje šole I, II in III
- vaje: R. Kladnik in H. Šolinc – Zbirka fizikalnih nalog z rešitvami I in II

Vsebina predavanj:
- kinematika
- dinamika
- osnove elastomehanike
- termodinamika
- nihanje, valovanje
- zvok in zvočni pojavi

KINEMATIKA ali opis gibanja točkastih teles (za translatorno gibanje togih teles)

- togo telo je, v okviru kinematike, takšno telo, ki ohranja obliko in velikost pri gibanju
- translatorno gibanje je takšno, pri katerem togo telo ne spreminja svoje orientacije v prostoru
- gibanje je zvezno spreminjanje lege telesa v prostoru
- Kako določimo lego telesa v prostoru?

$\vec{r}$ = krajevni vektor, ki določa lego točke P, glede na izhodišče O

* skalarji – povemo samo velikost – čas, temperatura, masa, gostota...
vektorji – poleg velikosti še smer – hitrost, lega, pospešek, sila...

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ so enotski vektorji, ki določajo 3 med seboj pravokotne smeri

$\vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0$

$\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1$

$z\vec{k}$ = komponenta krajevnega vektorja r vzdolž osi z

$y\vec{j}$ = komponenta krajevnega vektorja r vzdolž osi y

$x\vec{i}$ = komponenta krajevnega vektorja r vzdolž osi x

Po pravilih seštevanja vektorjev je razvidno, da $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ → to je pravokotni koordinatni sistem

HITROST – $\vec{v}$ (simbol za vektor hitrosti)
- pove nam kako hitro se spreminja lega telesa oz kako hitro in v kateri smeri se telo giblje

$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ določa lego točke v trenutku t

x = x(t)
y = y(t) enačba tirnice v parametrični obliki
z = z(t)

$\Delta\vec{r}$ – vektor pomika v časovnem intervalu Δt

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ problem, ker $\Delta\vec{r} \neq \Delta s$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} ;$$

$d\vec{r}$ je vektor pomika, ko gre Δt → 0 in njegova smer sovpada s smerjo tangente na tirnico gibanja v trenutku t

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec i + \frac{dy}{dt}\vec j + \frac{dz}{dt}\vec k$$

$$\vec v = \vec v_x \vec i + \vec v_y \vec j + \vec v_z \vec k$$

$$\vec v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\vec v_y = \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d\vec r}{dt}$$

$$\vec v_z = \frac{dz}{dt}$$

- hitrost je odvod krajevnega vektorja po času
- enota za hitrost $[\vec v] = \frac{[d\vec r]}{[dt]} = \frac{m}{s}$

POSPEŠEK – $\vec a$
- pove nam hitrost in v kateri smeri se telesu spreminja hitrost

V času Δt se hitrost spremeni od začetne vrednosti $\vec v$ (t) na vrednost $\vec v$ (t + Δt). Sprememba hitrosti v tem časovnem intervalu je $\Delta\vec v = \vec v(t+\Delta t) - \vec v(t)$

$$\vec a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec v}{\Delta t} = \frac{d\vec v}{dt}$$

- vektor pospeška vedno kaže na vloženo stran tirnice gibanja

Pospešek je odvod hitrosti po času

$$[\vec a] = \frac{[d\vec v]}{[dt]} = \frac{ms^{-1}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

$$\vec a = \vec a_x \vec i + \vec a_y \vec j + \vec a_z \vec k$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{dv_x \vec i + dv_y \vec j + dv_z \vec k}{dt}$$

$$\vec a_x = \frac{d\vec v_x}{dt}$$

$$\vec a_y = \frac{d\vec v_y}{dt} \qquad \vec a = \frac{d\vec v}{dt}\ ;\ d\vec v = \frac{d\vec r}{dt}$$

$$\vec a_z = \frac{d\vec v_z}{dt}$$

$$\vec a = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec r}{dt}\right) = \frac{d^2\vec r}{(dt)^2} = \frac{d^2\vec r}{dt^2}$$

- pospešek je drugi odvod krajevnega vektorja $\vec r$ po času

$$\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$$

$$\vec a = \frac{d^2x}{dt^2}\vec i + \frac{d^2y}{dt^2}\vec j + \frac{d^2z}{dt^2}\vec k$$

$$\vec{a}_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\vec{a}_y = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\vec{a}_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

$$\vec{a} = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt}$$ spreminja velikost hitrosti

$\vec{a}_r$ spreminja smer hitrosti

Posebni primeri gibanja točkastih teles:

1. PREMO GIBANJE

- to je gibanje po premici (smer hitrosti je ves čas II s premico, smer gibanja izberemo kot smer koordinatne osi x)

$$\vec{r} = x\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = v\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

v > 0, če se telo giblje v + smeti osi x in obratno

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{i} = a\vec{i}$$

a > 0, če hitrost telesa narašča v smeri + osi x in obratno

$x(t) = A + Bt + Ct$ A, B, C so dane konstante
$v = dx/dt = B + 3Ct$
$a = dv/dt = 6Ct$

$x_0 = A = x(t=0)$ = začetna lega telesa
$B = v(t=0) = v_0$
$x(t) = x_0 + v_0t + Ct$
Časovni grafi za premo gibanje

- časovni graf pospeša $\vec{a}$ $\left(\frac{m}{s^2}\right)$

Hitrost v času t_0 naj bo $v(t_0) = v_0$
Kolikšna je hitrost v času t: $v(t) = v$

$v = v_0$ = sprememba hitrosti v časovnem intervalu $(t – t_0)$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad /dt$$

$dv = adt$ – sprememba hitrosti v časovnem intervalu dt

$v – v_0 = \sum adt$ ko gre širina intervala → 0

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} adt$$

$\int_{t_0}^{t} a\,dt$ = enak ploščini, ki jo oklepa graf pospeška z abscisno osjo na intervalu od to do t

$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt$

- časovni graf hitrosti $\vec{v}$ $\left(\frac{m}{s}\right)$

$x(t_0) = x_0$ = lega telesa na začetku opazovanja
$x(t) = x$ = lega telesa v nekem poljubnem trenutku t

$v = \frac{dx}{dt}$ → $dx = vdt$

$x - x_0 = \sum vdt$

- sprememba lege telesa v časovnem intervalu $t_0 - t$ je $x - x_0 = \int_{t_0}^{t} vdt$

$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} vdt$

$a = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$a = tg(\alpha)\cdot\left(\frac{m}{s^2}\right)$

- Pospešek v danem trenutku je enak tangesu naklonskega kota, ki ga tangenta na graf hitrosti v danem trenutku oklepa z absciso

- časovni graf lege telesa

$v(t) = tg\alpha\cdot\left(\frac{m}{s}\right)$

1.1 Premo gibanje naj bo tako, da je a = const → ENAKOMERNO POSPEŠENO PREMO GIBANJE

a = const

$v_{t_0=0} = v_0 + \int_{t_0}^{t} adt = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt = v_0 + at$

$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)\,dt = x_0 + \int_{0}^{t} v_0\,dt + \int_{0}^{t} atdt = x_0 + v_0t + ½at$

Izpis enačb:
a = const
$v = v_0 + at$
$x = x_0 + v_0t + ½at$

iz enačbe 2 izpišemo $t = \frac{v - v_0}{a}$, to vstavimo v enačbo 3. in dobimo $2a(x - x_0) = v- v\ _0$

- Časovni grafi za enakomerno pospešeno premo gibanje

1.1.1 Navpični met – primer enakomerno pospešenega premega gibanja

$a = -g = const$
$v = v_0 - gt$
$y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt$
$-2g(y - y_0) = v - v_0$

Poskus

$t = 0{,}452s$
$y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt$
$y_0 - y = \frac{1}{2}gt$

$1m = h = \frac{1}{2}gt$
$g = 2h/t = 2m/(0{,}452) = 9{,}79m/s$

Dežna kapljica
$t = 0{,}1s$
$h = ?$
$g = 10m/s$
$y_o = h = 2km$
$y = 0$
$v = 0$
$2gy_o = v$
$v = \sqrt{(2gh)}$
$v = 720km/h$
V resnici (upor…) je v kaplje 10m/s

1.2. Premo gibanje naj bo tako, da je a = 0 → ENAKOMERNO GIBANJE

$v = v_0 = const$
$x = x_0 + v_0t$
$$v_0 = \frac{x - x_0}{t}$$

Primer
1510·360° ………… 60s
25°……………t

$t = (60s \cdot 25)/(1510 \cdot 360) = 2{,}75s$

$v_o = (x - x_o)/t = (40 \cdot 10)/(2{,}75 \cdot 10) = 145m/s$

- Upoštevanje zračnega upora pri navpičnem metu

$a = -(a - \alpha v)$
$a(v) = - g + \alpha v$
- v trenutku ko telo doseže v_{max} prične padati enakomerno s stalno hitrostjo v_{max}

$a(v_{max}) = 0 = -g + \alpha v_{max} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$

- za kapljo $v_{max} \approx 10\,\frac{m}{s}$

$$\alpha = \frac{g}{v_{max}} = \frac{10\,\frac{m}{s^2}}{10\,\frac{m^2}{s^2}} = 0{,}1\ m^{-}$$

Predmet	Masa (kg)	Prečni presek (m)	$v_{max}\ \frac{m}{s} / \frac{km}{h}$
Padalec	75	0,7 (zaprto padalo)	60/216
Padalec		50 (odprto padalo)	4/16
Žogica za golf	0,046	$1{,}4 \cdot 10^{-}$	32/115
Toča	$5{,}0\cdot 10^{-}$	$7{,}9\cdot 10^{-}$	14/50
kaplja	$3{,}4\cdot 10^{-}$	$1{,}3\cdot 10^{-}$	9/32

- A je odvisen od mase padajočega predmeta, prečnega preseka, gostote sredstva skozi katerega se giblje

$$\alpha = \frac{g}{v_{max}^2}$$

2. RAVNINSKO GIBANJE

- točkasto telo se ves čas giblje v dani ravnini
- koordinatni sistem lahko vedno izberemo tako, da ravnina (x, y) sovpada z ravnino gibanja

2.1. POŠEVNI MET kot primer ravninskega gibanja

- Os x je vodoravna
- v_0 začetna hitrost
  $v_{0x} = v_0\cos\alpha$
  $v_{0y} = v_0\sin\alpha$
- H – max višina meta
- D – dolžina meta ali domet
- pri poševnem metu velja: $\vec{a} = -\vec{j}\ g \Rightarrow a_x = 0,\ a_y = -g$
- poševni met je sestavljen iz dveh neodvisnih premih gibanj vzdolž koordinatnih osi x in y
- gibanje vzdolž x osi je enakomerno
- gibanje vzdolž y osi je enakomerno pospešeno

$v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha = \text{const}$
$v_y = v_{0y} - gt = v_0\sin\alpha - gt$

$x = v_{0x}t = v_0\cos\alpha\ t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$

$y = v_{0y}t + ½a_yt = v_0\sin\alpha\ t - ½gt$ – enačba v parametrični obliki

$= v_0\sin\alpha\,\frac{x}{v_0\cos\alpha} - 1/2\ g\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$

$= x_0\,tg\alpha - x\,\frac{g}{2v_0\cos\alpha}$ - enačba tirnice v eksplicitni obliki

- tirnica poševnega meta je parabola, če ne upoštevamo zračnega upora

- zanima nas koliko je H pri dani začetni hitrosti v_0 in danem kotu α

$y = v_0\sin\alpha - ½gt$
$H = y\ (t = t_d) = v_0\sin\alpha\ t_d - ½gt_d$

t_d = čas dviganja (kamen leti navzgor)

$v_y(t = t_d) = 0 = v_0 \sin\alpha - g t_d$

$$t_d = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$H = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \tfrac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

t_l = čas leta = čas po katerem kamen prileti na tla $= 2t_d = 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$y = v_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t$

$y(t = t_l) = 0 = v_0 \sin\alpha\, t_l - \tfrac{1}{2} g t_l = t_l(v_0 \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t_l) = 0 \rightarrow t_l = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

$$D = x(t = t_l) = v_0 \cos\alpha\, t_l = v_0 \cos\alpha \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

D_{max} ko je $\alpha = 45^\circ \Longrightarrow D_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

- druga možnost za računanje dometa: $y(x = d) = 0$

$D = D(\alpha) = D(\Pi/2 - \alpha)$

2.2. KROŽENJE – drugi zgled za ravninsko gibanje

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

- zanima nas, kako je velikost hitrosti $\vec{v}$ odvisna od r in tega kako hitro se vrti radij vektor (kako hitro se spreminja kot ϕ)

- dl – dolžina krožnega loka

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Longrightarrow \vec{v}\, dt = d\vec{r}$$

$(\vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j})dt = dx\, \vec{i} + dy\, \vec{j}$

$(\vec{v}_x^2 + \vec{v}_y^2)dt = dx + dy$

$v\ dt = (dr) = (dx + dy)$

$vdt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$dl = dx + dy$

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$dl = rd\phi$

$vdt = dl$

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{2\Pi \vec{r}\, d\phi}{360\ dt} = \frac{rd\phi}{dt}$$

$\omega = \frac{d\phi}{dt}$ - kotna hitrost (hitrost vrtenja radij vektorja)

$[\omega] = \frac{\text{radiani}}{\text{s}} = s^{-}$

$v = r\omega$

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = \frac{rd\omega}{dt}$$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ - kotni pospešek (pove kako hitro se spreminja kotna hitrost)

$[\alpha] = \frac{[d\omega]}{[t]} = s^{-}$

$\vec{a}_t = r\alpha$

- izpeljava izraza za radialni pospešek $\vec{a}_r$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt = \vec{a}_r dt + \vec{a}_t dt$

$v(t + dt) - v(t) = d\vec{v}$

$v(t + dt) = v(t) + dv$

$\vec{v}(t + dt) = \vec{v}(t) + d\vec{v} = \vec{v}(t) + \vec{a}_t dt + \vec{a}_r dt$

$dv = \vec{a}_r dt + \vec{a}_t dt = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$

$\vec{a}_r dt = v d\phi /dt$

$= v\frac{d\phi}{dt} = \omega v$

Izpis formul:

$v = r\omega$

$\vec{a}_t = r\alpha$

$\vec{a}_r = v\omega = r\omega = \frac{v^2}{r}$

$\omega = \frac{d\phi}{dt}$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{r^2\omega^4 + r^2\alpha^2}$

2.2.1 Posebna primera kroženja: - enakomerno pospešeno kroženje

$\alpha = const$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$

($v = v_0$ at enakomerno pospešeno premo gibanje)

$\frac{d\phi}{dt} = \omega \Rightarrow d\phi = \omega dt \Rightarrow \phi = \phi_0 + \omega_0 t + ½\alpha t$

($x = x_0 + v_0 t + ½at$)

$tg\alpha = \omega_0$

- enakomerno kroženje

$\alpha = 0$

$\omega = \omega_0 = const$

$\phi = \phi_0 + \omega_0 t$

t_0 = čas za en polni zasuk krajevnega vektorja = obhodni čas

$\phi(t = 0) = \phi_0$

$\phi(t = t_0) = \phi_0 + 2\Pi$

$\phi_0 + 2\Pi = \phi_0 + \omega_0 t_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\Pi}{t_0} = 2\Pi\nu$

$\nu = \frac{1}{t_0}$ = frekvenca kroženja

$[\nu] = s^{-}$

- Stroboskopsko merjenje frekvence

$$\nu = \frac{1}{t_0}$$

- ν_1 frekvenca, ko je izbrani kolobar miroval
- $t_{0_1} = \frac{1}{\nu_1}$ - v tem času se je izbrani kolobar zavrtel za N črnih in belih polj
- $\nu_2 < \nu_1$ - isti kolobar ponovno (navidezno) miruje
- $t_{0_2} = \frac{1}{\nu_2}$ - v tem času se je kolobar zasukal za (N + 1) črnih in belih polj
- V času $t_{0_2} - t_{0_1}$ se je torej zasukal za eno črno in eno belo polje
- Torej v času $7(t_{0_2} - t_{0_1})$ se je kolobar zasukal za 360˚

- Frekvenca vrtenja motorja je torej enaka $\nu = \frac{1}{7(t_{0_2} - t_{0_1})} = \frac{1}{7(\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1})}$

$v = r\omega$

$\vec{a}_r = v\omega = r\omega$

$\vec{a}_t = r\alpha$

$\vec{v}\ ,\ \vec{\omega}$

$\vec{v} = \vec{r}\ \ \vec{\omega}\ ,\ \vec{\omega}\ \ \vec{r} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}\ ,\ \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{r}\ \omega$

$a = \vec{a}_t + \vec{a}_r = -\vec{r}\ \omega\ \ \vec{\alpha} \times \vec{r}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

2.2.3 Enakomerno kroženje kot sestav dveh $\perp$ nihanj

$x = r\cos\phi$

$\phi = \phi_0 + \omega t$

$\phi_0 = 0$

$\phi = \omega t$

r – amplituda nihanja (harmonično nihanje)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\omega t)}{dt} = \frac{rd(\cos\omega t)}{dt} = -r\omega\sin\omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(r\sin\omega t)}{dt} = r\omega\cos\omega t$$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2 \sin^2 \omega t + r^2\omega^2 \cos^2 \omega t} = \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = r\omega$

$a_x = \dfrac{d\vec{v}_x}{dt} = - r\omega \quad \cos\omega t = - \omega \; x$

$a_y = \dfrac{d\vec{v}_y}{dt} = - r\omega \quad \sin\omega t = -\omega \; y$

$a = -bx \implies$ nihanje $x = A\sin \sqrt{b} \; t$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\omega^4 x^2 + \omega^4 y^2} = \sqrt{\omega^4 (x^2 + y^2)} = \sqrt{\omega^4 r^2} = \omega \; r$

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$

$\vec{v} = \vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j}$ Dokaži, da je $\vec{a} \perp \vec{v}$

DINAMIKA: Kaj je vzrok neenakomernega gibanja teles?

- 1. Newtonov zakon: telo, ki miruje bo vztrajalo v stanju mirovanja, telo, ki se giblje pa bo vztrajalo v stanju premega in enakomernega gibanja, če nanj ne učinkuje okolica
- Isaac Newton (angleški fizik pred 300leti)
- 1. Newton-ov zakon velja le v primerno izbranih koordinatnih sistemih. Takšne koordinatne sisteme v katerih velja 1.NZ imenujemo inercialne koordinatne sisteme. Vsi koordinatni sistemi, ki se gibljejo premo in enakomerno glede na dan inercialni sistem so prav tako inercialni koordinatni sistemi
- Kaj je posledica učinkovanja okolice na opazovano telo?

x = ½at

- če okolica učinkuje na telo enakomerno (ves čas enako močno), potem se telo prične gibati enakomerno pospešeno
- (učinek okolice na telo) $\alpha \; \vec{a}$: $\vec{F} \; \alpha \; \vec{a}$ → vpeljemo novo fizikalno količino = sila = $\vec{F}$

- 2. Newtonov zakon: $\vec{F} = m\,\vec{a}$; sorazmernostni faktor m imenujemo masa telesa
- Dogovor: 1l H_2O pri 4˚C naj ima maso 1kg. S tem smo izbrali enoto za maso

$F = m_1 a_1$

$F = m_2 a_2$

enačbi delim med seboj in dobim:

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{a_2}{a_1} \implies m_2 = m_1 \dfrac{a_1}{a_2}$

$[F] = [m][a] = kgms^{-} = 1N$ (1 Newton)

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

$F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

$F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = ma_x \vec{i} + ma_y \vec{j} + ma_z \vec{k}$

$F_x = ma_x$

$F_y = ma_y$

$F_z = ma_z$

- običajno na opazovano telo deluje več sil hkrati: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\,\vec{a}$

$\vec{F}$ = rezultanta vseh sil, ki delujejo na telo

- Če telo ob površini Zemlje pada s pospeškom 10 $\dfrac{m}{s^2}$

$F_g = mg$ = sila teže

- 3. Newtonov zakon ali zakon o vzajemnem učinku

$\vec{F}_{1,2}$ je sila s katero 2. telo vleče 1.

$\vec{F}_{2,1}$ je sila s katero 1. telo vleče 2.

$\vec{F}_{1,2} = - \vec{F}_{2,1}$

- Sila s katero 1. telo deluje na drugo je nasprotno enaka sili s katero 2. telo deluje na prvo

Newtonov gravitacijski zakon

- telesi sta krogelno simetrični

$F = G \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-} \dfrac{Nm^2}{kg^2}$ - gravitacijska konstanta

- t_0 = obhodni čas planeta
- r = polmer krožnice planeta

$K = \dfrac{t_0^2}{r^3} \approx 3 \cdot 10^{-19} \dfrac{s^2}{m^3}$ = const = 3. Kepplerjev izrek, K je Kepplerjeva konstanta

Enakomerno kroženje $\Longrightarrow a = a_r = \frac{v^2}{r}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\Pi r}{t_0} \Longrightarrow 2.NZ \Longrightarrow F = m a_r = m\frac{v^2}{r} = m\frac{4\Pi^2 r^2}{r t_0^2}\cdot\frac{r}{r} = \frac{m\,4\Pi^2}{\frac{t_0^2}{r^3}}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{4\Pi^2}{KM}\cdot\frac{mM}{r^2} = G\frac{mM}{r^2}$$

$$G = \frac{4\Pi^2}{KM} = \frac{4\Pi^2 m^3}{3\cdot 10^{-19}\,s^2\cdot 2\cdot 10^{30}\,kg} = 6,7\cdot 10^{-}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$\frac{t_0^2}{r^3} = \frac{(27,3\,dni)^2}{(3,84\cdot 10^8\,m)^3} \approx 10^{-}\ \frac{s^2}{m^3} = K'$$

$$F = \frac{4\Pi^2}{K'M}\cdot\frac{Mm}{r^2}\ \ldots$$

1.) Teža kot posledica Newtonovega gravitacijskega zakona

$$F = G\frac{mM}{r^2} = mg(r)$$

$$g_r = G\frac{M}{r^2}$$

g_0 = težni pospešek od površini Zemlje $\approx 10\ \frac{m}{s^2}$

$$g_0 = g_0(r = R) = G\frac{M}{R^2} = 6,67\cdot 10^{-}\ \frac{Nm^2}{kg^2}\cdot\frac{6\cdot 10^{24}\,kg}{(6370\cdot 10^3\,m)^2} \approx 10\ \frac{m}{s^2}$$

R_{Zemlje} = 6370km

$M \approx 6\cdot 10$ kg

$$g(r) = G\frac{M}{r^2}\cdot\frac{R^2}{r^2} = g_0\frac{R^2}{r^2}$$

2.) Tirnice satelitov

$$F = G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = G\frac{M}{r} = G\frac{M}{R^2}\cdot\frac{R^2}{r} = g_0\frac{R^2}{r} = (g_0 R)\frac{R}{r}$$

$$v(r) = \sqrt{g_0 R}\cdot\sqrt{\frac{R}{r}} = v_1\sqrt{\frac{R}{r}}$$

$$v_1 = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{10\ \frac{m}{s^2}\cdot 6400\ km} = 8\cdot 10\ \frac{m}{s}$$ → prva kozmična hitrost

$v_1 = \frac{2\Pi R}{t_0} \Longrightarrow t_0 = \frac{2\Pi R}{v_1} = 84min \Longrightarrow$ čas satelita z v_1 ko kroži na površju Zemlje

- Krogljica, ki pada skozi tunel čez središče Zemlje porabi ravno t_0, da pride gor in dol

$v_2 = \sqrt{2}\ v_1 \approx 11,2\ \frac{km}{s}$ → druga kozmična hitrost

- Meritev gravitacijske konstante G s Cavendish-ovo tehnico

$G = 6,67 \cdot 10^{-}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$

$ma = F = G\frac{mM}{r^2}$

$a = G\frac{M}{r^2}$

$x' = ½ at$

$F = \frac{mv^2}{r} = ma_r$ = sila vrvice je usmerjena proti središču → centripetalna sila

- Centrifugalna sila je sila, ki se pojavi le, če gibanje opazujemo v neinercialnem sistemu (kjer Newtonov zakon ne velja). Če hočemo, da NZ velja vpeljemo sistemske sile ali navidezne sile (to so centrifugalne sile)

$F_{ctr} = F_{ct}$

Sila lepenja in sila trenja pri drsenju teles

- Klada miruje (m = masa klade)

2. NZ $\Longrightarrow \sum F_y = 0 : N - mg = 0 \Longrightarrow N = mg$

- vodoravna sila podlage = F_l = sila lepenja

2. NZ $\Longrightarrow \sum F_x = 0 : F_l - F = 0 \Longrightarrow F_l = F$

$0 \le F_l \le F_{lmax} = \mu_l$ – koeficient lepenja ($\mu_l \approx$ 0-1)

- Klada zdrsne

F_t = sila trenja pri drsenju

$F_t = \mu_t N$; μ_t – koeficient trenja ($\mu_t < \mu_l$)

a) klada miruje na strmini

m = masa klade

2. NZ zahteva: $\sum F_x = 0 : mg \sin\phi - F_l = 0 \implies F_l = mg \sin\phi$

$\sum F_y = 0 : mg \cos\phi - N = 0 \implies N = mg\cos\phi$

$F_l \leq F_{lmax} = \mu_l N = \mu_l mg \cos\phi$

-Če hočemo, da klada miruje: $F_l < F_{lmax}$

$mg \sin\phi \leq mg\mu_l \cos\phi \quad /: \cos\phi$

$tg\phi \leq \mu_l$

- Naša klada zdrsne pri kotu $\phi_{max} = 10^\circ$; $tg10^\circ = \mu_l \approx 0{,}2$

b) $\phi > \phi_{max} \implies$ klada drsi po klancu dol

($a_x = a$; $a_y = 0$)

$0 = \sum F_y$: $N = mg \cos \phi$

$ma = \sum F_x \implies ma = mg \sin\phi - F_t$; $F_t = \mu_t N = \mu_t mg \cos\phi$

$\implies ma = mg \sin\phi - \mu_t mg \cos\phi \quad /:m$

$\implies a = g(\sin\phi - \mu_t \cos\phi)$

Sila upora pri gibanju telesa skozi snov

$F_{upora} = ½c_2\rho Sv$ → kvadratni zakon upora

c_2 = koeficient upora brez enot, določimo ga eksperimentalno

ρ = gostota snovi skozi katero se telo giblje

S = prečni presek telesa v ravnini $\perp$ na smer gibanja

$ma = F_{upora} - mg$

$F_{upora} - mg = 0$ telo se začne gibati s stalno hitrostjo v_{max}

$½c_2\rho Sv_{max} - mg = 0 \;/:m \qquad v_{max} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$

$$\frac{c_2 \rho S}{2m} v_{max}^2 - g = 0$$

$$\alpha = \frac{c_2 \rho S}{2m}$$

telo	krogla	kaplja	
C_2	0,4	0,04	1,3

Za kroglo (poskus) : $\alpha = \dfrac{0{,}4 \cdot 1{,}3\,kgm^{-3}\,\Pi r^2}{2 \cdot 95 \cdot 10^{-3}\,kg} \approx 0{,}1m^{-}$

- Če je gibanje telesa skozi snov počasno in če je viskoznost snovi velika (ζ), potem velja za silo upora t.i linearni zakon upora:

$F_{upora} = c_1 v \zeta l$

- c_1 = koeficient linearnega upora
- ζ = viskoznost snovi
- l = karakteristična dimenzija telesa

za kroglo $l = 2r$, $c_1 = 3\Pi$

Snov	Zrak (20˚)	H_2O	Olje
ζ	$2{,}0\cdot10^{-}$	10^{-}	1

$\mathcal{R} = \dfrac{\rho v l}{\zeta}$ = Reynoldsovo število

$\mathcal{R} >> 1 \rightarrow$ kvadratni zakon upora

$\mathcal{R} \leq 1 \rightarrow$ linearni zakon upora

Hooke-ov zakon za prožno vzmet

2.NZ $\Longrightarrow \sum F_x = 0$

$mg - F_v = 0$

$F_v = mg$

x – raztezek vzmeti

$F_v \leftrightarrow x$

$F_{v1} = mg : x_1 = 3$ enote

$F_{v2} = 2mg : x_2 = 7$ enot

$F_{v3} = 3mg : x_3 = 11$ enot

$$\frac{F_{v_1}}{x_1} = \frac{mg}{x_1} = \frac{mg}{3e}$$

$$\frac{F_{v_2}}{x_2} = \frac{2mg}{x_2} = \frac{mg}{3{,}5e} \qquad \frac{F_v}{x} = \text{const} = k = \text{konstanta vijačne vzmeti}$$

$$\frac{F_{v_3}}{x_3} = \frac{3mg}{x_3} = \frac{mg}{3{,}7e}$$

$F_v = -kx \rightarrow$ Hookov zakon

$50\cdot10^{-3}kg\cdot10\ \dfrac{m}{s^2} = k\cdot3{,}5cm$

$k = \dfrac{0{,}5N}{3{,}5cm} = 0{,}14\ \dfrac{N}{cm}$

$[k] = \dfrac{N}{cm}, \dfrac{N}{m}$

GIBANJE TELES

- Telo je sistem točkastih teles (atomov ali molekul) med katerimi delujejo t.i. notranje sile
- $\vec{F}_{ij}$ je sila na i-to telo, ki jo povzroča j-to telo
- $\vec{F}_{ji}$ je sila na j-to telo, ki jo povzroča i-to telo

3.NZ : $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$: $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$

- Če so sile $\vec{F}_{ij}$ zelo močne se telo obnaša kot trdna snov. V tem primeru so razdalje med posameznimi točkastimi telesi nekaj 0,1nm (1nm = 10^{-9} m)
- Če so sile šibke (to je pri večjih razdaljah $\approx$nm) pa je snov mehka; skrajni primer plini
- $\vec{F}_i$ je zunanja sila, ki deluje na točkasto telo št. i

Gibalna količina točkastega telesa

2. NZ za točkasto telo z maso m se glasi: F = ma, $a = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$F = \frac{mdv}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

$\vec{G} = m\vec{v}$ = gibalna količina

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

Gibanje sistema točkastih teles, med katerimi delujejo notranje sile (poleg zunanjih sil)

$$\frac{d\vec{G}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \ldots + \vec{F}_{1n}$$

$$\frac{d\vec{G}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \ldots + \vec{F}_{in}$$ vse enačbe seštejemo $\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{G}_n}{dt} = \vec{F}_n + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots + \ldots + \vec{F}_{n,n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{G}_1}{dt} + \frac{d\vec{G}_2}{dt} + \ldots + \frac{d\vec{G}_n}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

(notranje sile se izničijo $\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ji}$)

$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \ldots + \vec{G}_n$ = celotna gibalna količina telesa

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ = rezultanta vseh zunanjih sil

$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F}$ → celotna gibalna količina se spreminja le če so zunanje sile

$\vec{F} = 0$

$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{G}$ = const - zakon o ohranitvi gibalne količine

$\vec{G} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + mn\,\vec{v}_n$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$G = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots + m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n)$$

$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$

$$\vec{G} = \frac{md}{dt}\left(\frac{m_1\vec{r}_1}{m} + \frac{m_2\vec{r}_2}{m} + \ldots + \frac{m_n\vec{r}_n}{m}\right)$$

Definicija krajevnega vektorja masnega središča: $\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_r + \ldots m_n\vec{r}_n}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m}$

$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$ = hitrost masnega središča

$G = \frac{md\,\vec{r}_c}{dt} = m\vec{v}_c$ = gibalna količina sistema točkastih teles je takšna, kakor da bi bila vsa masa telesa zbrana v masnem središču, ki se giblje s hitrostjo $\vec{v}_c$

$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F} \;:\; \Rightarrow \frac{md\,\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}$

$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}$ = pospešek masnega središča

$m\vec{a}_c = \vec{F}$

- masno središče se giblje tako, kakor da bi rezultanta vseh zunanjih sil $\vec{F}$ delovala na celotno maso telesa, ki je zbrana v masnem središču

$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F}$

$\vec{G} = m\vec{v}_c$

$m\vec{a}_c = \vec{F}$ = zakon za gibanje masnega središča

- Zgledi za uporabo enačbe $\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt}$

1.)

$\vec{v}_c = 130 \frac{km}{h} = 36 \frac{m}{s}$

Čas trajanja udarca = t = 10 s

m = masa žoge = 0,45kg

Kolikšna je povprečna sila noge na žogo?

$$\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt} \quad /dt$$

dG = Fdt

$$\int_0^{Gkon\ čko} dG = \int_0^{t=10} Fdt$$

$G_{končna} = \int Fdt$ = sunek sile

$$\overline{F} = \frac{1}{t}\int Fdt = \frac{G_{kon\ čon}}{t} = \frac{mv_c}{t} = \frac{0,45\ kg \cdot 36\ ms^{-1}}{10 \cdot 10^{-2}\ s} = 1620N$$

2.) Reakcijska sila pri gibanju rakete

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F}\ ;\ \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{G}}{dt} = 0$$

G(t) = mv

- u = hitrost izgorelih plinov glede na raketo

G(t + dt) = (m – dm)(v + dv) + dm(v + dv – u)

dG = G(t + dt) – G(t) = (m – dm)(v + dv) + dm(v + dv – u) – mv = mdv – udm

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0 : \frac{mdv}{dt} - \frac{udm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{mdv}{dt} = \frac{udm}{dt}$$

$\frac{dm}{dt}$ = hitrost izgorevanja goriva = $Ø_m$ = masni tok

$[Ø_m] = \frac{kg}{s}$

$\frac{mdv}{dt} = u\,Ø_m$

$uØ_m$ = reakcijska potisna sila

$u = 2500 \frac{m}{s} \qquad uØ_m = 2500 \frac{m}{s} \cdot 10 \frac{kg}{s} = 25 \cdot 10^6\ N$

$Ø_m = 10 \frac{ton}{s}$

Saturn (raketa ZDA) : $m_0 = 3100 \cdot 10$= za četna masa rakete + goriva

$Ø_m = 15 \cdot 10 \frac{kg}{s}$

$t_{zg} = 150s$

$u = 2500 \frac{m}{s}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{u\Phi_m}{m} \quad /dt$$

$$\int_0^v dv = uØ_m \int_0^t \frac{dt}{m} \qquad m(t) = m_0 - Ø_m t$$

$$v(t) = uØ_m \cdot \int_0^t \frac{dt}{m} = uØ_m \int_0^t \frac{dt}{m_0 - \Phi_m t} = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \Phi_m t}\right)$$

$$v(t = 150s) = 2500 \frac{m}{s} \cdot \ln\left(\frac{3100 \cdot 10^3 kg}{3100 \cdot 10_3 kg - 15 \cdot 10^3 \frac{kg}{s} \cdot 150\ s}\right)$$

$$= 2500 \frac{m}{s} \cdot \ln\left(\frac{3100}{850}\right)$$

$$= 3235 \frac{m}{s}$$ - v vodoravni smeri

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = -mg$$ → raketo izstrelimo v navpični smeri

$$\frac{mdv}{dt} = uØ_m - mg$$

$$v(t) = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \Phi_m t}\right) - gt$$

$$v(t = 150s) = 1735\ \frac{m}{s}$$

Sila curka

- S = prečni presek cevi iz katere izteka voda s hitrostjo $\vec{v}$

- $Ø_v$ = volumski tok vode pove koliko litrov vode priteče iz cevi na sekundo

$$Ø_v = \frac{dV}{dt} = \frac{Svdt}{dt} = Sv$$

$dV = Svdt$

- $Ø_m$ = masni tok, pove koliko kg vode priteče iz cevi na sekundo

$$Ø_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \rho Ø_v = \rho Sv$$

$dm = \rho dV$, ρ = gostota tekočine

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F}$$ (opazujemo samo spremembo gibalne količine vode v vektorski smeri)

- Sprememba gibalne količine obarvanega dela vode v času dt je: $dG = dm(-v) - dm(v)$
$= 2vdm = -2\rho Svdt$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = -2v\rho Sv = -2Ø_m = F =$$

zunanja sila, ki uravnoveša našo U cev

- Sila curka = F_{curka} = nasprotno enaka sili F

$F_{reakcijska\ sila} = uØ_m$

$F_{curka} = -F = 2vØ_m$

Računanje masnega središča teles v praktičnih primerih

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}$$

$$x_{c\,(\text{ročke})} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$\frac{m_1(a + R_1) + m_2(a + 2R_1 + \frac{L}{2}) + m_3(a + 2R_1 + L + R_3)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

- m = masa telesa
- V = prostornina telesa
- dm_i = delež mase, ki je nakopičena v prostorninskem elementu dV_i

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \vec{r}_i dm_i}{m}$$

$$\rho_i = \frac{dm_i}{dV_i}$$ = gostota snovi v elementu dV_i

$dm_i = \rho_i dV_i$

- Torej porazdelitev mase po prostornini V opredelimo tako, da za vsak prostorninski element povemo gostoro ρ_i

$m = \sum dm_i = \sum \rho_i dV_i$

$V = \sum dV_i$

V limiti, ko gre $dV_i \rightarrow 0$, prejšnje vsote preidejo v integrale

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$$m = \int \rho\, dV$$

$$V = \int dV$$

$$\vec{r}_c = \frac{\int \rho \vec{r}\, dV}{m} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{m}$$

- Pravimo, da je masa telesa zvezno porazdeljena po V

$$\vec{r}_c = \frac{\int \rho \vec{r}\, dV}{m} \Rightarrow x_c = \frac{\int \rho x dV}{m}$$

$$y_c = \frac{\int \rho y dV}{m}$$

$$z_c = \frac{\int \rho z dV}{m}$$

$$m = \int \rho\, dV$$

$$V = \int dV$$

- Zgled za računanje masnega središča v primeru zvezne porazdelitve mase.
Vzamemo homogen stožec z maso m, polmerom osnovne ploskve R in višino h

Stožec je homogen $\Leftrightarrow$ ρ = const

$$m = \rho \int dV = \rho V$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$dV = \Pi dr$

$$V = \int dV = \int_0^4 \Pi r^2 dz = \Pi \int_0^4 r^2 dz$$

$$\frac{r}{R} = \frac{h - z}{h} \Rightarrow r = R(1 - \frac{z}{h})$$

$$r = R(1 - \frac{2z}{h} - \frac{z^2}{h^2}) \Rightarrow V = \Pi R \int_0^h (1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2}) dz = \Pi R(h - \frac{2}{h} \cdot \frac{h^2}{z} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}) = \Pi R \frac{h}{3}$$

$\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c) = (0, 0, z_c)$

$$z_c = \frac{1}{m} \int \rho z dV = \frac{1}{V} \int z dV = \frac{1}{V} \int_0^h z \Pi r^2 dz = \frac{\Pi}{V} \int_0^h z R^2 (1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2}) dz$$

$$= \frac{\Pi R^2}{V} \int_0^h (z - \frac{2z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2}) dz$$

$$= \frac{\Pi R^2}{V} \left\{ \frac{h^2}{2} - \frac{2}{h} \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{h^4}{4} \right\}$$

$$= \frac{\Pi R^2}{V} \cdot h^2 (\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4})$$

$$= \frac{\Pi R^2 h^2}{\Pi R^2 \frac{h}{3}} \cdot \frac{1}{12} = \frac{h}{4}$$

Gibanje togega telesa

- Def togega telesa: togo telo je sistem točkastih teles med katerimi delujejo tako močne notranje sile ($\vec{F}_{ij}$), da se razdalje med posameznimi točkastimi telesi med gibanjem ne spreminjajo. Telo pri gibanju ohranja obliko in prostornino

$d_{ij} = (x_i - x_j) + (y_i - y_j) + (z_i - z_j)$

$$v_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

- $\vec{r}_c$ = krajevni vektor masnega središča
- $\vec{r}_i$ = krajevni vektor, ki določa lego i-tega togega telesa glede na masno središče

$\vec{R}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i$

$$v_i = \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$\frac{dr_i}{dt}$ = hitrost i-tega togega telesa glede na masno središče.

Ker je telo togo sledi: $\frac{dr_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

- $\vec{\omega}$ je trenutna kotna hitrost s katero se telo v danem trenutku vrti okrog neke osi, ki gre skozi masno središče

$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega}\ \vec{r}_i$ → poljubno gibanje togega telesa lahko popišemo kot sestav translatornega gibanja telesa s hitrostjo masnega središča $\vec{v}_c$ in rotacijo telesa okrog neke osi, ki gre skozi masno središče

Vrtenje togega telesa okrog osi, ki gre skozi masno središče in katere smer v prostoru je stalna

- $\vec{F}_i$ je rezultanta zunanjih sil, ki delujejo na i-to telo

$\vec{F}_i^{(c)} = \vec{F}_i + \vec{F}_{in}$

$\vec{F}_{in} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{ij}$ = vsota vseh notranjih sil, ki delujejo na i-to telo

$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega}\ \vec{r}_i$

$\frac{dr_i}{dt} = \vec{\omega}\ \vec{r}_i$

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d\vec{v}_c}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_i + \omega \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$\vec{r}_i = \vec{r}_i\ \perp + \vec{r}_i\ \parallel$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i \perp + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i \perp)$$

$$= \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i \perp - \omega\ \vec{r}_i \perp$$

- Pospešek masnega središča že znamo izračunati, namreč $m\vec{a}_i = \vec{F}$; m masa telesa, $\vec{F}$ rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na togo telo

2. NZ za i-to telo se glasi: $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{in} = \vec{F}_i^{(c)} \Rightarrow m_i \vec{a}_c + m_i(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) - m_i\omega^2 \vec{r}_{i\perp}$

Za vrtenje telesa ni pomembna rezultanta sil, ampak kako so te sile porazdeljene po telesu

$m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_c + m_i \vec{r}_i \times(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) - m_i\omega^2 \vec{r}_i \times \vec{r}_{i\perp}$

$= \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_{in}$

=0, ker gre os vrtenja skozi masno središče

$(\sum m_i \vec{r}_i)\times \vec{a}_c + \sum_i m_i \vec{r}_i \times(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) - \sum_i m_i\omega^2 \vec{r} \times \vec{r}_{i\perp} =$

$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{in}$

=0

$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{in}$; $\vec{F}_{ij}$, $\vec{F}_{ji}$

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$

$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times \vec{F}_{ij} = 0$

$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{in} = 0$ zato ker so notranje sile paroma nasprotno enake in delujejo vzdolž veznic togega telesa

$\vec{r}_i \times(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) = (\vec{r}_{i\perp} + \vec{r}_{i\parallel}) \times(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) = \vec{r}_{i\perp} \times(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) + \vec{r}_{i\parallel} \times(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp})$

$\vec{r}_i \times(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{i\perp}) = \vec{\alpha}\, r_{i\perp}^2 - (\vec{r}_{i\parallel}\vec{\alpha})\vec{r}_{i\perp}$

$\vec{r}_i \times \vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{i\parallel} \times \vec{r}_{i\perp}$

$\vec{r}_i \times \vec{F}_i = (\vec{r}_{i\perp} + \vec{r}_{i\parallel})\times(\vec{F}_{i\perp} + \vec{F}_{i\parallel})$

$\vec{F}_{i\perp}$ = komponenta zunanje sile $\vec{F}_i$, ki je $\perp$ na os vrtenja

$\vec{F}_{i\parallel}$ = komponenta zunanje sile $\vec{F}_i$, ki je ll z osjo vrtenja

$\vec{r}_i \times \vec{F}_i = (\vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}) + (\vec{r}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\perp}) + \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{in}$

$\vec{\alpha}(\sum_i m_i r_{i\perp}^2) - \sum_i m_i(\vec{r}_{i\parallel}\vec{F}_i)\vec{r}_{i\perp} - \sum_i m_i\omega^2(\vec{r}_{i\parallel} \times \vec{r}_{i\perp})$

$\sum_i(\vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}) + \sum_i \vec{r}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\perp} + \sum_i \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\parallel}$

$\vec{\alpha}\sum m_i r_{i\perp}^2 = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}$

- Enakost komponent, ki so $\perp$ na os vrtenja, je samo zahteva, kakšne morajo biti zunanje sile, da os vrtenja ne spreminja smeri v prostoru

$\sum_{i=1}^{N} m_i r_{i\perp}^2$ = J = vztrajnostni moment telesa za vrtenje okrog izbrane osi

[J] = [m][r²] = kgm²

$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i$; $\vec{M}_i = \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}$ = navor zunanje sile $\vec{F}_{i\perp}$ glede na os vrtenja

$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp} = \sum \vec{M}_i$ = M = vsota navorov zunanjih sil glede na dano os vrtenja

$j\vec{\alpha} = \vec{M}$

$m\vec{a}_c = \vec{F}$

Zakoni za vrtenje togega telesa

$J\vec{\alpha} = \vec{M}$ → velja za vrtenje okrog osi, ki gre skozi masno središče in ima stalno smer v prostoru

→ velja tudi za "fiksno os"

$J = \sum m_i r_{i\perp}^2$

$\vec{M} = \sum \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp}$

- Navor sile $\vec{F}$ glede na dano os vrtenja, sila $\vec{F}$ naj leži v ravnini table $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{F}_\perp = \vec{F} \sin\phi$

- Smer vektorja navora najlažje določimo po pravilih desnosučnega vijaka

$\vec{M} = \vec{r}\,\vec{F} \sin\phi = \vec{r}\,\vec{F}_\perp$

$\vec{r}_\perp$ = ročica sile = pravokotna oddaljenost nosilke sile od osi vrtenja

$\vec{r}_\perp = \vec{r} \sin\phi \Rightarrow \vec{M} = \vec{r}_\perp \vec{F}$

$J = \sum m_i \vec{r}_i^{\,2}$ $\perp$ Računanje vztrajnostnega momenta J

- V praktičnih primerih vedno privzamemo, da je masa zvezno porazdeljena po prostornini telesa

$m_i r_i^2 \perp \leftrightarrow r^2\, c \perp dm$

$J = \int r^2\, dm$

$\rho = \dfrac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$ (če je telo homogeno $\rho = \dfrac{m}{V}$)

$J = \int r^2 \perp \rho dV = \dfrac{m}{V} \int r^2 \perp dV$

- Zgled za uporabo enačbe $J = \int r^2\, dm$: tanka homogena palica z dolžino L in maso m, ki se vrti okrog $\perp$ osi

- a = $\perp$ oddaljenost masnega središča od osi vrtenja

$dm = m \dfrac{dx}{L}$

$$J = \int x^2 dm = \int_{-b}^{L-b} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \int_{-b}^{L-b} x^2 dx = \frac{m}{L} \cdot \frac{1}{3} \left[(L-b)^3 + b^3 \right]$$

Posebni primeri:

a) os gre skozi levi konec palice (b = 0)

$$J = \frac{1}{3} mL^2$$

b) os gre skozi masno središče ($b = \dfrac{L}{2}$)

$$J_c = \frac{1}{12} mL^2$$

$$J = \frac{m}{3L} \left[\left(\frac{L}{2} + a\right)^3 + \left(\frac{L}{2} - a\right)^3 \right] = \frac{1}{2} mL^2 + ma^2 = J_c + ma$$

$J = J_c + ma$ Steinerjev izrek

Formule:

- homogen valj

$J_c = \frac{1}{2} mR^2$

- homogena krogla

$J_c = \frac{2}{5} mR^2$

- votla krogla

$J_c = \frac{2}{3} mR^2$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ = navor sile

$[\vec{M}] = [\vec{r}][\vec{F}]$ = Nm = Newton meter

- Če na telo deluje več sil hkrati: $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$

- Zgled: Navor sile teže na telo, ki je vrtljivo okrog vodoravne osi

dmg = velikost sile; sila, ki deluje na delček

dM = -xdmg

$M = -g \int x\,dm = -mg\left(\frac{1}{m} \int x\,dm\right) = -mgx_c$

mg = celotna sila teže telesa

$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \neq \vec{r} \times \vec{F}$ enačaj velja samo, če so sile $\vec{F}_i$ vzporedne mg

$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ rezultanta zunanjih sil

$$J\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{i\perp} \times \vec{F}_{i\perp} = \sum_i m (\vec{\alpha}\, \vec{r}_{i\parallel})\, \vec{r}_{i\perp} - \omega \sum_i m_i (\vec{r}_{i\parallel} \times \vec{r}_{i\perp})$$

$$= \sum_i (\vec{r}_{i\parallel} \times \vec{F}_{i\perp}) + \sum (\vec{r}_{i\perp}\, \vec{F}_{\parallel})$$

-Tej enačbi mora biti zadoščeno, da se bo telo vrtelo okrog osi, ki ima stalno smer v prostoru

a) zgled za gibanje togega telesa: Kotaljenje po klancu (brez spodrsavanja)

Kotaljenje valja

$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \omega \times \vec{r}_i \;\; \perp$

P = točka, kjer se valj dotika podlage

$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{R}$

$\vec{v}_p = \vec{v}_c - \omega R$ → glede na to enačbo ločimo 3. tipe kotaljenja: i) $\omega R > \vec{v}_c$: kotaljenje s podrsavanjem v smeri nazaj

ii) $\omega R = \vec{v}_c$: kotaljenje brez drsenja

iii) $\vec{v}_c > \omega R$: kotaljenje s podrsavanjem v smeri gibanja

- 2.NZ za gibanje masnega središča: $m\vec{a}_c = mg \sin\phi = F_l$

$$0 \le F_l \le \mu_l N = F_{lmax}$$

- zakon za vrtenje okrog osi, ki gre skozi masno središče: $J\vec{\alpha} = \vec{M}$

$$J\vec{\alpha} = F_l R \Rightarrow F_l = \frac{J\alpha}{R}$$

- $\vec{v}_c = \omega R$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{Rd\omega}{dt}$$

$$\vec{a}_c = R\alpha \Rightarrow \frac{J\alpha}{R} = \frac{Ja_c}{R^2}$$

$$\alpha = \frac{dv}{dt}$$

$$F_l = \frac{Ja_c}{R^2} \Rightarrow m\vec{a}_c = mg\sin\phi - \frac{Ja_c}{R^2}$$

$$m\vec{a}_c + \frac{Ja_c}{R^2} = mg\sin\phi$$

$$m\vec{a}_c \left(1 + \frac{J}{mR^2}\right) = mg\sin\phi$$

$$\vec{a}_c = \frac{g\sin\rho}{1 + \frac{J}{mR^2}}$$

$$2\vec{a}_c x_c = \vec{v}_c^{\,2} \Rightarrow \frac{2gx_c\sin\rho}{1 + \frac{J_c}{mR^2}} = \frac{2gh_c}{1 + \frac{J_c}{mR^2}}$$

Telo	$\frac{J_c}{mR^2}$	$\vec{a}_c$
Poln valj	$\frac{\frac{1}{2}mR^2}{mR^2} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2} g \sin$

Polna krogla	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{7} g \sin$
Votel valj	1	$\frac{1}{2} g \sin$
Votla krogla	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5} g \sin$

b) Kotaljenje palice okrog vodoravne osi, ki gre skozi en konec palice
m = masa palice
l = dolžina palice, ki je homogena

Os vrtenja $\perp$ na list

$$r_{\perp} = \frac{l}{2}\cos\phi$$

- J = vztrajnostni moment palice glede na izbrano os vrtenja

$$J\vec{\alpha} = \vec{M}$$

$$J = \frac{1}{3} ml$$

$$J\vec{\alpha} = -r_{i\perp} mg$$

$$J\vec{\alpha} = -mg\frac{l}{2}\cos\phi$$

$$\vec{\alpha} = -\frac{mgl}{2J}\cos\phi = -\frac{3g}{2l}\cos\phi \Rightarrow \vec{a}_t = l\vec{\alpha} = -\frac{3g}{2}\cos\phi$$

$$\phi = 0 \Rightarrow \vec{a}_t(\phi = 0) = -\frac{3}{2}g$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3g}{2l}\cos\phi$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\phi}{\omega}$$

$$\frac{d\omega}{\frac{d\phi}{\omega}} = -\frac{3g}{2l}\cos\phi \quad /d\phi$$

$$\int_0^{\omega}\omega\, d\omega = -\frac{3g}{2l}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi}\cos\phi\, d\phi$$

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{3g}{2l}(\sin\phi - 1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \sin\phi)}$$

$$\omega(\phi = 0) = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

$$v_{\text{konca palice}}(\phi = 0) = l\,\omega(\phi = 0) = \sqrt{3gl}$$

Zakon za vrtenje okrog stalne osi

- Telo je simetrično glede na os vrtenja

$$J\vec{\alpha} = \vec{M}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

- J = vztrajnostni moment telesa glede na izbrano os

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

$J\vec{\omega} = \vec{\Gamma}$ - vrtilna količina togega telesa glede na dano os vrtenja

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \vec{M}$$

- Če je vsota zunanjih navorov $\vec{M}$ enaka nič, torej $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = 0$

$\Rightarrow \vec{\Gamma} = \text{const} = J\,\vec{\omega} = \text{const} \rightarrow$
zakon o ohranitvi gibalne količine

$\vec{\Gamma} = \vec{\omega}$ r= const

$mr_1\ \omega_1 = mr_2\ \omega_2$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$: $\vec{M}$ je $\perp$ na ravnino, ki jo tvorita $\vec{r}$ in $\vec{F}$

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \vec{M}$$

$d\vec{\Gamma} = \vec{M}\ dt$

Precesija vrtavke

- J – vztrajnostni moment

- m masa vrtavke
- ω kotna hitrost vrtavke

$d\vec{\Gamma} = \vec{M}\ dt$

$d\vec{\Gamma} = Mdt = mgr_c dt = \vec{\Gamma}\ d\phi = \vec{\Gamma}\ \omega d\phi$

- Ω = kotna hitrost procesije vrtavke = $\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{mgr_c}{J\omega}$

$\vec{\Gamma} = J\vec{\omega}$ - to da je $\vec{\Gamma} \parallel \vec{\omega}$ velja samo, če se telo vrti okrog simetrijske osi

- J_1 = vztrajnostni moment glede na os 1
- J_2 = vztrajnostni moment glede na os 2

$\vec{\Gamma} = J_1 \vec{\omega}_1 + J_2 \vec{\omega}_2$

$J_1 >> J_2$

$\omega J \neq \vec{\Gamma}$; J = vztrajnostni moment glede na navpično os

$\vec{\Gamma}_1 = J_1 \vec{\omega}_1$

$\vec{\Gamma}_2 = J_2 \vec{\omega}_2$

- Za vsako telo lahko poiščemo tri (z oznako 1, 2, 3) $\perp$ osi za katere velja, da če se telo vrti okrog katerekoli od teh osi, potem je

$\vec{\Gamma} = J_1 \vec{\omega}_i$, i = 1, 2, 3

J_1, J_2, J_3 so glavni vztrajnostni momenti

Delo sile in moč pri gibanju togega telesa

- dr = majhen premik prijemališča sile $\vec{F}$

dA = delo sile na poti dr: $dA = \vec{F}\, d\vec{r} = \vec{F} \cos\phi ds$

$|d\vec{r}| = ds \neq dr$

- celotno delo sile $\vec{F}$, ko njeno prijemališče popiše pot c(1, 2): $A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \phi\, ds$

moč = $P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\ \vec{v}$

$\vec{v}$ = hitrost prijemališča sile

dA = Pdt

$A_{1-2} = \int_1^2 Pdt = \overline{P}(t_2 - t_1)$ definicija povprečne moči

$$\overline{P} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Pdt$$

- Zgled:

m = 100kg

S kolikšno močjo delujejo mišice tekača, ki teče enakomerno, tako da je ves čas na istem mestu?

$F_l = mg\sin\phi$

$N = mg\cos\phi$

v_2 = hitrost dviganja = $v \sin\phi$

mg – F = 0

mg = F

$P = mgv_2 = mgv \sin\phi$

$\approx 1000N \cdot 5 \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{6} = 833W$

$[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{[F][r]}{[t]} = \frac{Nm}{s} = \frac{J}{s} = 1W$

[A] = Nm = J(Joule)

- Posplošitev izraza za delo na primeru ko na telo deluje več sil hkrati: F_1, F_2…

- Delo izračunamo tako, da prejšnji izraz uporabimo za vsako silo posebej

$$A^{i}_{1-2} = \int_1^2 \vec F_i \, d\vec r_i$$

$$A_{1-2} = \sum_i A^{(i)}_{1-2} = \sum_i \int_1^2 \vec F_i \, d\vec r_i$$

Poljubno gibanje togega telesa

$$d\vec r_i = \vec v_i \, dt = \vec v_c \, dt + (\vec\omega \times \vec r_i)dt = d\vec r_c + (\underbrace{\vec\omega\, dt}_{d\phi}) \times \vec r_i$$

$$\vec v_i = \vec v_c + \vec\omega \times \vec r_i$$

- $\vec r_i$ = lega i-tega prijemališča glede na masno središče telesa

$$d\vec r_i = d\vec r_c + d\vec\phi \times \vec r_i$$

$$A_{1-2} = \int_1^2 \sum_i (\vec F_i \, d\vec r_c + \vec F_i (d\vec\phi \times \vec r_i))$$

$\sum_i \vec F_i$ = rezultanta vseh sil

$$\vec F_i \, (d\vec\phi \times \vec r_i) = (d\vec\phi \times \vec r_i)\, \vec F_i = d\phi(\vec r_i \times \vec F_i) = d\phi\, \vec M_i$$

$$\sum_i \vec F_i (d\vec\phi \times \vec r_i) = \sum_i d\phi\, \vec M_i = d\vec\phi \; \vec M$$

$$\vec M = \sum_i M_i = \sum_i r_i \times F_i$$

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec F \, d\vec r_c + \int_1^2 \vec M \, d\vec\phi$$

- Posebna primera:

a) gibanje naj bo translatorno ($d\vec\phi = 0$)

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec F \, d\vec r_c$$

$$P = \vec F \; \vec v_c$$

b) vrtenje togega telesa okrog fiksne osi ($d\vec r_c = 0$)

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec M \, d\vec\phi$$ - izraz za delo pri vrtenju: $dA = M d\vec\phi$

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\phi}{dt} = \vec M \; \vec\omega$$

- Zgledi za uporabo enačb: $P = \vec F \; \vec v$, $P = \vec M \; \vec\omega$ …

a) Moč Peltonove turbine

- Φ_m = masni tok vode, ki priteka na turbino

$F_{curka} = 2\Phi_m(v - v_l)$

$v_l = R\omega$

$$F_{turbine} = F_{curka} v_l = 2\Phi_m(v - v_l)v_l = 2\Phi_m(vv_l - v_l^2 - \frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{4})$$

$$= \frac12 \Phi_m v - 2\Phi_m(\frac{v^2}{4} - vv_l + v_l^2) = \frac12 \Phi_m v - 2\Phi_m(\frac{v}{2} - v_l)$$

Kolikšna mora biti hitrost turbine lopatic, da bo moč največja?

Ko bo $\frac{v}{2} - v_l = 0$, t.j $P_{max} = \frac12 \Phi_m v$ $(v - v_l = 0)$

- Pri slapu Savica je elektrarna, kjer na turbino priteka $\Phi_v = 2 \frac{m^3}{s}$, voda se pri tem spusti z višine h = 275m nad turbino

$$P_{max} = \frac12 \rho\Phi_v 2gh = \rho\Phi_v gh = \frac{10^3 kg \cdot 2m^3 \cdot 10\, m \cdot 275}{m^3 \cdot s \cdot s^2} = 5{,}5 \cdot 10^6 \frac{J}{s} = 5{,}5 \cdot 10^6\, W = 5{,}5 MW$$

$\Phi_m = \rho\Phi_v$

$v = \sqrt{2gh}$; $v = 2gh$

$P_{dejanska} = 4{,}4 MW$

$$\zeta = \text{izkoristek turbine} = \frac{P_{dejanska}}{P_{max}} = \frac{4{,}4 MW}{} = 0{,}8 \Longrightarrow \zeta = 80\%$$

b) Moč s katero delajo mišice kolesarja, ko pelje enakomerno po klancu z naklonskim kotom $\phi = 10°$. Hitrost kolesarja je 10 $\frac{m}{s}$. Masa kolesarja in kolesa skupaj je 65kg.

i)Kolesar vrti padala s stalno kotno hitrostjo ω in pri tem povzroča stalen navor M na padala.

$P = M\omega$

$c = 0,4$

$S = 0,5m$

ϕ = gostota zraka = $1,3 \frac{kg}{m^3}$

- Zadnje kolo

$Fr_1 = F_l R$

- R = polmer kolesa

$F = \frac{F_l R}{r_1}$

$M = F_l (\frac{r_2}{r_1})R$

$P = M\omega = F_l (\frac{r_2}{r_1})\omega R = F_l \omega' R = F_l v$

$r_1\omega' = r_2\omega$

$\omega' = \frac{r_2}{r_1}\omega$

- Zakon za gibanje masnega središča kolesa + kolesarja se glasi:

$m\vec{a}_c = 0 = F_l - mg\sin\phi - \frac{1}{2}c\rho Sv$

$F_l = mg\sin\phi - \frac{1}{2}c\rho Sv = 650N \cdot 0,17 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 1,3 \cdot 0,5 \cdot 100 = 110,5N + 13N = 123,5N$

$P = F_l v = 123,5N \cdot 10 \frac{m}{s} = 1235W$

Delo sile teže

$$A_{1-2}^{(g)} = \int_1^2 \vec{F}_g \, d\vec{r}$$

$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\vec{k}$

$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$\vec{F}_g \, d\vec{z} = -mg\vec{k}\,(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = -mgdz$

$$A_{1-2}^{(g)} = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = mgz_1 - mgz_2$$

- Delo sile teže je neodvisno od oblike poti; odvisno je samo od začetne in končne lege telesa. Take sile za katere velja ta ugotovitev imenujemo konservativne

$mgz_c = W_p$ = potencialna energija telesa, to je energija, ki jo ima telo zaradi svoje lege v prostoru

$A_{1-2}^{(g)} = W_{p(1)} - W_{p(2)}$

Delo sile prožne vzmeti

- vzmet raztegujemo počasi, tako, da je njena hitrost stalna

$\vec{F}_v = kx$

- x = raztezek vzmeti
- k = prožnostna konstanta vzmeti

$$A_{1-2}^{(k)} = \int_1^2 \vec{F}_v \, d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\, dx = ½k\, x_1^2 - ½k\, x_2^2$$

$d\vec{r} = \vec{i}\, dx$

$\vec{F}_v = -kx\, \vec{i}$

- x_1 = raztezek vzmeti na začetku
- x_2 = raztezek vzmeti na koncu
- Wpr = prožnostna energija vzmeti, to je energija, ki jo ima vzmeti zaradi svojega stanja

Wpr = ½kx

$A_{1-2}^{(k)}$ = Wpr(1) – Wpr(2)

Izrek o spremembi kinetične energije togega telesa

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}_c + \int_1^2 \vec{M} d\vec{\phi}$$

$m\vec{a}_c = \vec{F}$

$J\vec{\alpha} = \vec{M}$

$\vec{a}_c = \dfrac{d\vec{v}_c}{dt}$

$\vec{v}_c = \dfrac{d\vec{r}_c}{dt}$

$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\phi}}{dt}$

$$\Rightarrow A_{1-2} = \int_1^2 m\, \vec{a}_c d\vec{r}_c + \int_1^2 J_c \vec{\alpha} d\vec{\phi}$$

$$= \int_1^2 m \frac{dv_c}{dt} d\vec{r}_c + \int_1^2 J_c \frac{d\vec{\omega}}{dt} d\vec{\phi}$$

$$= \int_1^2 md\, \vec{v}_c \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \int_1^2 J_c d\vec{\omega} \frac{d\vec{\phi}}{dt}$$

$$= \int_1^2 m\, \vec{v}_c d\vec{v}_c + \int_1^2 J_c \vec{\omega} d\vec{\omega}$$

$$= \int_1^2 mv_c dv_c + \int_1^2 J_c \omega\, d\omega$$ (izpustimo znake za vektor)

$= (½m\, v_{c_2}^2 - ½m\, v_{c1}^2) + (½J_c\, \omega_2^2 - ½J_c\, \omega_1^2)$

$= [½m\, v_{c_2}^2 + ½J_c\, \omega_2^2] - [½m\, v_{c1}^2 + ½J_c\, \omega_1^2]$ → delo vseh zunanjih sil

- Wk = kinetična energija togega telesa

$Wk = ½m\, v_c^2 + ½J_c\, \omega^2$

A_{1-2} = Wk(2) – Wk(1)

$A_{1-2} = \Delta Wk$ Delo vseh zunanjih sil je enaka spremembi kinetične energije togega telesa

$A_{1-2} = A_{1-2}^{(g)} + A_{1-2}^{(vse\_sile\_razen\_teže)}$

$A_{1-2} = \Delta Wk$

$A_{1-2}^{(g)} + A_{1-2}^{(vse\_sile\_razen\_teže)} = \Delta Wk$

$A_{1-2}^{(vse\_sile\_razen\_teže)}$ = ΔWk + Wp(2) – Wp(1)

= ΔWp

$A_{1-2}^{(vse\_sile\_razen\_teže)}$ = ΔWk + ΔWp

- Zgled: Kotaljenje kroglice po žlebu s krožno zanko (kroglica se kotali brez podrsavanja)

- m = masa krogljice
- r = polmer krogljice
- R = polmer krožne zanke
- S kolikšne najmanjše višine h moramo spustiti krogljico, da ravno gre skozi "looping"

A = ΔWk + ΔWp; A = 0, zato

1. Wk + Wp = const

Wk(1) + Wp(1) = Wk(2) + Wp(2)

$Wp_{(1)} = mgh$

2.NZ: $ma_{rc} = N + mg \Rightarrow \frac{mv^2}{R} = N + mg$

$\Rightarrow N = \frac{mv^2}{R} - mg \rightarrow$ v omenjenem primeru $N = 0$

$a_r = g = \frac{v_0^2}{R}$

$v_c = R\omega$

2. $mgh = Wk - Wp$
$Wk = mgh - mg2R$

3. $Wk = ½m v_c^2 + ½J_c \omega$; $½J_c \omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mr^2 \omega = \frac{2}{10} mr^2 \omega^2 = \frac{2}{10} mv_c^2$

$= ½m v_c^2 + \frac{2}{10} mv_c^2$

$= \frac{7}{10} mv_c^2$

4. $\frac{7}{10} mv_c^2 = mg(h - 2R)$

$\frac{7}{10} gR = g(h - 2R)$

$\frac{7}{10} \cdot R = h - 2R$

$h = \frac{27}{10} R$

- Zgled za uporabo izreka o spremembi Wk: Bungee jumping

- l = dolžina raztegnjene vrvi v trenutku, ko mož miruje
- l_0 = dolžina neraztegnjene vrvi

- nujno: $l_o < l < h$

$A_{1-2} = \Delta Wk + \Delta Wpr$ = delo vseh zunanjih sil razen teže

- privzamemo, da se vrv obnaša kakor prožna vzmet z neko prožnostno konstanto k

$A_{1-2} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 = \frac{1}{2}(l - l_0)^2$

- x_1 = raztezek vri v točki 1 = 0
- x_2 = raztezek vrvi v točki 2 = $l - l_0$

$-\frac{1}{2} k(l - l_o)^2 = \Delta Wk + \Delta Wp$

$\Delta Wk = Wk_{(2)} - Wk_{(1)} = 0$
$\Delta Wp = Wp_{(2)} - Wp_{(1)}$
$Wp_{(1)} = 0 \Rightarrow Wp_{(2)} = -mgl$

$-\frac{1}{2} k(l - l_o)^2 = -mgl$

$\frac{1}{2} k(l^2 - 2ll_0 + l_0^2) - mgl = 0 \,/\, \frac{2}{k}$

$l^2 - 2ll_0 + l_0^2 - \frac{2mg}{k} l = 0$

$l^2 - 2l(\frac{mg}{k} + l_0) - l_0^2 = 0$

$l = \frac{2(\frac{mg}{k} + l_0) \pm \sqrt{4(\frac{mg}{k} + l_0)^2 - 4l_0^2}}{2}$

$= \frac{mg}{k} + l_0 \pm \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + 2\frac{mg}{k} l_0 + l_0^2 - l_0^2}$

$= \frac{mg}{k} + l_0 \pm \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 + 2\frac{mg}{k} l_0}$

$= l_0 + \frac{mg}{k} \pm \frac{mg}{k}\sqrt{1 + 2\frac{l_0}{\frac{mg}{k}}}$; dobili smo 2 rešitvi, zanima nas samo:

$l = l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\sqrt{1 + 2\frac{l_0}{\frac{mg}{k}}}$

$l_0 = 30m$

$\frac{mg}{k} = 2m$

$l = 30m + 13m$

Ravnovesje togih teles in ravnovesne lege

- zakon za gibanje masnega središča: $\vec{F} = m\,\vec{a}_c$
- zakon za vrtenje: $J_c\,\vec{\alpha} = \vec{M}$

$\Rightarrow \vec{a}_c = 0,\ \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0,\ \vec{M} = 0$ → pogoj za ravnovesje togega telesa, v tem primeru telo miruje

- stabilna ravnovesna lega

- labilna ravnovesna lega

- metastabilna ravnovesna lega

- pogoj, da krogljica miruje v dani točki je mg sinϕ = 0 c $\Rightarrow \frac{mg \cdot \sin\phi}{mg \cdot \cos\phi} = tg\phi = 0$
- z = z(x) = krivulja, ki predstavlaj obliko doline
- $tg\phi = \frac{dz}{dx}$

Wp = mgz = potencialna energija krogljice v dani legi

$z = \frac{Wp}{mg} \Rightarrow tg\phi = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{mg} \cdot \frac{dWp}{dx}$

- stabilna ravnovesna lega krogljice je tam, kjer ima Wp minimum
- labilna ravnovesna lega je tam, kjer ima Wp maximum

- zgled: utež na prožni vzmeti

$Wp = -mgx$

$Wpr = \frac{1}{2} kx^2$

$W = Wp + Wpr = -mgx + \frac{1}{2} kx^2$

$\frac{dW}{dx} = 0$ (ravnovesna lega): $-mg + kx = 0 \Longrightarrow x = \frac{mg}{k}$

$W = Wp + Wpr$

$$W = \frac{1}{2} kx^2 - mgx = \frac{1}{2} k \left(x^2 - \frac{2mg}{k} x + \left(\frac{mg}{k}\right)\right)^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} k \left(x - \frac{mg}{k^2}\right) - \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

- Naloga za 25 pik na kolokviju: v obroču krogljica → določi stabilno ravnovesno lego, ko se obroč vrti z neko kotno hitrostjo ω

Nihanje

- premo gibanje točkastega telesa vzdolž osi x, katerega časovni graf prikazuje slika

- nihanje je periodično se ponavljajoče gibanje
- t_0 = nihajni čas; to je čas med dvema enakima zaporednima legama telesa v kateri je tudi smer hitrosti enaka
- $\nu = \frac{1}{t_0}$ = frekvenca nihanja

$[\nu] = s^{-}$

- harmonično nihanje je tako nihanje, pri katerem s elega telesa spreminja s časom kot sinusna ali kosinusna funkcija časa

- $x = x_0 \sin\omega t$
- $x(t) = x(t + t_0)$
- $x_0 \sin\omega t = x_0 \sin\omega(t + t_0)$
- $x_0 \sin\omega t = x_0 \sin(\omega t + \omega t_0)$
- $\omega t_0 = 2\Pi$
- $\omega = \frac{2\Pi}{t_0} = 2\Pi\nu$ = krožna frekvenca nihanja
- $[\omega] = \frac{radian}{s} = s^{-}$
- x_0 = amplituda nihanja

1. NIHALO NA VIJAČNO VZMET

- x = odmik nihala od ravnovesne lege
- m = masa uteži
- k = prožnostna konstanta vzmeti
- $F_v = k(x + s_0)$
- s_0 = raztezek vzmeti, ko je utež v ravnovesni legi
- a = pospešek uteži
- 2.NZ za gibanje uteži z maso m: $ma = mg - k(x + s_0)$

$ma = mg - kx - ks_0$

$mg - ks_0 = 0 \Rightarrow mg = ks_0$

$ma = mg - kx - ks_0$

$$a = \frac{-kx}{m}$$

- pospešek pri nihalu je vedno sorazmeren z odmikom x nihala od ravnovesne lege

$-\omega x + \omega_0 \; x = 0$

$(\omega_0 \; - \omega \;)x = 0$

$$\omega \;= \omega_0 \;= \frac{k}{m}$$

$x(t) = A\sin(\omega_0 t - \delta)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$t_0 = \frac{2\Pi}{\omega_0} = 2\Pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0$$

$a = -\omega_0 \; x$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0 \; x = 0$$

enačba harmoničnega nihanja – homogena diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti

- splošna rešitev te enačbe se zapiše v obliki: $x = A\sin(\omega t - \delta)$; A, δ sta konstanti

$$\frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t - \delta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega \; A\sin(\omega t - \delta) = -\omega \; x$$

Konstanti A, δ sta odvisni od tega kako nihalo poženemo (kdaj pričnemo šteti čas t)

1. Začetni pogoji v trenutku t = 0, v = 0, $x = x_0$

   $x = A\sin(\omega_0 t - \delta)$

   $x(t = 0) = -A\sin\delta = x_0 \quad \Rightarrow \quad \delta = -\frac{\Pi}{2}$

   $v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t - \delta) \qquad A = x_0$

   $v(t = 0) = \omega_0 A\cos\delta = 0$

   $x = x_0\cos\omega_0 t$

2. Začetni pogoji v t = 0, x = 0, $v = v_0 + x$

   $= \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

   $x = x_0\cos\omega_0 t$

   $v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_0\sin\omega_0 t = -v_0\sin\omega_0 t$

   $v_0 = \omega_0 x_0$ = amplituda hitrosti

   $a = -\omega_0 \; x = -\omega_0 \; x_0\cos\omega_0 t = -a_0\cos\omega_0 t$

   $a_0 = \omega_0 \; x_0$ = amplituda pospeška

Izrek o spremembi kinetične energije za gibajočo se utež

- $A_{1-2} = \Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{pr}$ delo zunanjih sil razen sile teže in prožne sile vzmeti
- $W_{pr} = \frac{1}{2}kx^2$; x = raztezek vzmeti
- $\Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{pr} = 0 \Longrightarrow W_k + W_p + W_{pr} = const$
- $W_k = \frac{1}{2}mv^2$
- $W_p = -mgx$ dogovor: potencialna energija je nič, ko je utež v ravnovesni legi
- $W_{pr} = \frac{1}{2}k(x+s_0)^2$
- W = celotna energija = $\frac{1}{2}mv^2 - mgx + \frac{1}{2}k(x+s_0)^2$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ks_0^2 + 2ks_0$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ks_0^2 - x(mg - ks_0) = const$$

Prožnostna energija, ko je utež v ravnovesni legi

- $W - \frac{1}{2}ks_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = const$

Energija nihanja pri nihalu na vijačnico

- $W_{nih} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$
- $x = x_0\cos\omega_0 t$
- $v = -\omega_0 x_0 \sin\omega_0 t$
- $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}kx_0^2\sin^2\omega_0 t$
- $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2\omega_0 t$
- $W_{nih} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t)$

$$= \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{kx^2}{m} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

2. TEŽNO NIHALO

- ϕ = odmik nihala od ravnovesne lege
- J = vztrajnostni moment telesa glede na os vrtenja
- m = masa telesa
- l_c = oddaljenost masnega središča od osi vrtenja

Zakon za vrtenje: $J\alpha = M$

$$J\alpha = -mgr_\perp$$

$$r_\perp = l_c \sin\phi$$

$$\alpha = -\frac{mgl_c}{J}\sin\phi$$

$$\sin\phi = \frac{r_\perp}{l_c}$$

$$s = l_c\phi$$

Za majhne kote: $r_\perp \approx l_c\phi$

$$\sin\phi \approx \frac{r_\perp}{l_c} = \frac{l_c\phi}{l_c} = \phi$$

$$\alpha = -\left(\frac{mgl_c}{J}\right)\phi \Rightarrow \frac{mgl_c}{J} = \omega_0$$

- krožna frekvenca težnega nihala je torej enaka: $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl_c}{J}}$

$$t_0 = \frac{2\Pi}{\omega_0} = 2\Pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}$$

$$\alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0\phi$$

$\phi = A\sin(\omega_0 - \delta)$

$\phi = \phi_0\cos\omega_0 t$ (poseben primer)

- Wnih = Wk + Wp
- Wp = 0 ko je nihalo v ravnovesni legi
- $W_p(\phi) = mgh = \frac{1}{2}mgl_c\phi^2$
- $(l_c - h) + r_\perp^2 = l_c^2$
- $l_c^2 - 2l_c h + h + r_\perp^2 = l_c^2$
- $h - 2l_c h + r_\perp^2 = 0$
- $h = l_c - \sqrt{l_c^2 - r_\perp^2}$
- $h = \frac{(l_c - \sqrt{\ })(l_c - \sqrt{\ })}{(l_c + \sqrt{\ })} \approx \frac{r_\perp^2}{2l_c}$
- za majhne kote: $h \approx \frac{l_c\phi^2}{2}$

$$W_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$

- ω = kotna hitrost, s katero se telo vrti okrog osi v izbranem trenutku = $\frac{d\phi}{dt}$

$= -\omega_0\phi_0\sin\omega_0 t$

- $W_{nih} = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mgl_c\phi^2$ = const
- $J = \frac{1}{3}mL^2$
- $l_c - \frac{k}{2}$
- $\omega_{0(palice)} = \sqrt{\frac{\frac{mgL}{2}}{\frac{1}{3}mL^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$
- $L = 1m \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{15\ s^{-2}} \approx 4s^-$

$$t_0 = \frac{2\Pi}{\omega_0} \approx 15s$$

3. MATEMATIČNO NIHALO

- $J = ml$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$
- $t_0 = 2\Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

4. NIHALO NA POLŽASTO VZMET

- $k \leftrightarrow D$ = sučnostna konstanta polžaste vzmeti
- $F_v = kx \leftrightarrow M = D\phi$
- J = vztrajnostni moment Al-plošče
- $J\alpha = -D\phi$
- $\alpha = -\frac{D}{J}\phi$

- $\omega_0 = \frac{D}{J} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$
- $\alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0\phi = 0$
- $\phi = \phi_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$
- $W_{nih} = \frac{1}{2} J\omega^2 + W_{prož} = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} D\phi^2 = const$
- $W_{pr} = \frac{1}{2} kx^2 \leftrightarrow W_{prož} = \frac{1}{2} D\phi^2$
- $A = \int r d\phi$
- $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \omega_0\phi_0\cos(\omega_0 t - \delta)$ (lahko vstaviš v Wnih)
- $t_0 = 2\Pi\sqrt{\frac{J}{D}}$

Izpis:

- prožna vzmet $t_0 = 2\Pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- težno nihalo $t_0 = 2\Pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}$
- nihalo na polžasto vzmet $t_0 = 2\Pi\sqrt{\frac{J}{D}}$
- matematično nihalo - $t_0 = 2\Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
- $s = s_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$ nedušeno harmonično nihanje
- s = odmik nihala od ravnovesne lege

- $t_{01} = 2\Pi\sqrt{\frac{J_1}{D}}$, $t_{02} = 2\Pi\sqrt{\frac{J_1 + J_{zob}}{D}} \Rightarrow \frac{t_{01}}{t_{02}} = \sqrt{\frac{J_1}{J_1 + J_{zob}}}$

Dušeno nihanje = pri takem nihanju amplituda nihanja s časom pojenja in nihalo se splej ko prej ustavi

- $F_{upora} = bv$ ($b = c_1 l\zeta$)
- 2. NZ: $ma = mg - bv - k(x + s_0)$
- s_0 = raztezek vzmeti v ravnovesni legi
- $mg = ks_0$
- $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, $v = \frac{dx}{dt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$
- $\frac{k}{m} = \omega_0$ = krožna frekvenca nedušenega nihanja ali lastna frekvenca nihala
- $\frac{b}{m} = 2\beta$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0 x = 0$ enačba dušenega nihanja
- $\beta = \frac{b}{2m}$ = koeficient dušenja

i) empirično smo ugotovili, da se amplituda nihanja s časom manjša
ii) zaradi sile upora pričakujemo, da bo nihalo nihalo s frekvenco $\omega_0' < \omega_0$
- nedušeno nihanje: $x = x_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$ (nastavek za dušeno δ nihanje)
- dušeno nihaje: $x = A(t)\sin(\omega_0' - \delta)$ (amplituda odvisna od časa)
- $\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}\sin(\omega_0' - \delta) + A\omega_0'\cos(\omega_0' - \delta)$
- $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2A}{dt^2}\sin(\omega_0' - \delta) + A\omega_0'\cos(\omega_0' - \delta) - A\omega_0' \sin(\omega_0' t - \delta)$ → to vstavimo v enačbo dušenega nihanja in dobimo: $\underbrace{[\ ]}_{=0}\sin(\omega_0' - \delta) + \underbrace{[\ ]}_{=0}\cos(\omega_0' t - \delta) = 0$

- $A(t) = x_0 e^{-\beta t}$
- x_0 = amplituda na začetku = A(t = 0)
- $\omega_0' = \omega_0 - \beta$
- $x = x_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_0' t - \delta)$

- ugotovili smo, da se vsako nihalo, če je prepuščeno samo sebi, slej ko prej ustavi. Da nihalo kljub temu niha kar naprej, ga moramo poganjati z zunanjo silo F(t). Pravimo, da nihalu z zunanjo silo F(t) vsiljujemo nihanje.

- iz izreka o spremembi Wk sledi: dA(zunanje sile) = dWnih
- P(zun sile) = $\vec{F}\ \vec{v}$
- $\vec{v}$ = hitrost prijemališča sile = v nihala = nihajoče vzmeti
- P = $\vec{F}\ \vec{v}$

  = - $\vec{F}\ \vec{v}$ če je smer v nasprotna trenutni smeri sile
- poganjanje je najbolj učinkovito takrat, ko se sila in hitrost spreminjata na enak način in sta ves čas usmerjena v isto smer
- ma = mg – bv – k(x + s_0) + F(t)
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0\ x = \frac{F(t)}{m}$
- $\beta = \frac{b}{2m}$
- $\omega_0 = \frac{k}{m}$
- poseben primer: F(t) = F_0sinωt
- ugotovitev: če počakamo nekaj časa nihalo prične nihati z enako frekvenco ω s katero niha zunanja sila F(t) = F_0sinωt. Amplituda nihanja je odvisna od ω in doseže največjo vrednost le pri določeni velikosti frekvence s katero nihalo vzbujamo.
- enačba vsiljenega nihanja: $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0\ x = \frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$ → nehomogena diferencialna enačba 2. reda s const koeficienti
- x(t) = x(t)$|_{homogena}$ + x(t)$|_{partikularna\ rešitev}$

  $= x_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_0' t - \delta)$ + Asin(ωt – Φ)

  Nihanje, ki ga povzroča zunanja sila
- Φ = fazni zamik
- po daljšem času nihalo niha tako kot mu veleva zunanja sila ($e^{-\beta t}$ << 1)

- x(t) = Asin(ωt – Φ); konstanti A in Φ pa določimo na naslednji način:

  x = Asin(ωt – Φ) = Acos0 sinωt – Asin0 cosωt

  $\frac{dx}{dt}$ = Aωcos(ωt – Φ) = AωcosΦ cosωt + AωsinΦ costω

  $\frac{d^2x}{dt^2}$ = -Aω sin(ωt – Φ) = -Aω cosΦ sinωt + Aω sinΦ cosωt
- to vstavimo v enačbo vsiljenega nihanja in dobimo:

(-Aω cosΦ sinωt + Aω sinΦ cosωt) + 2β(AωcosΦ cosωt + AωsinΦ costω) +

+ ω0 (Acos0 sinωt – Asin0 cosωt) = $\frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$

= A((ω0 - ω)cosΦ + 2βωsinΦ)sinωt) + A(-(ω0 - ω)sinΦ + 2βωcosΦ)cosωt = $\frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$

- A((ω0 - ω)cosΦ + 2βωsinΦ) = $\frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$
- A(-(ω0 - ω)sinΦ + 2βωcosΦ) = 0
- (ω0 - ω)sinΦ = 2βωcosΦ
- tgΦ = $\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
- Φ = kot zamika; to je fazni kot za katerega nihalo zaostaja za nihanjem zunanje sile

Vsiljeno nihanje

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0\ x = \frac{F_0}{m}\sin\ \omega t$
- x = Asin(ωt – Φ)
- A = (-(ω0 - ω)sinΦ + 2βωcosΦ) = 0
- A((ω0 - ω)cosΦ + 2βωsinΦ) = $\frac{F_0}{m}$
- tgΦ = $\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

- $A = \dfrac{\dfrac{F_0}{m}}{((\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}$

- A je največji tedaj, ko je $\omega = \omega_0$. Pravimo, da je zunanja sila $F_0 \sin\omega t$ v resonanci z nihalom.

- V resonanci ($\omega = \omega_0$) je fazni zamik enak $\Phi = \dfrac{\Pi}{2}$, torej: $x = A(\omega = \omega_0)\sin(\omega_0 t - \dfrac{\Pi}{2})$

$$A(\omega = \omega_0) = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}$$

$$\sin(\omega_0 t - \frac{\Pi}{2}) = -\cos\omega_0 t$$

$$x = -\frac{F_0}{2m\beta\omega_0}\cos\omega_0 t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{2m\beta}\sin\omega_0 t$$

$$= \frac{F(t)}{2m\beta}$$

$$\frac{dWnih}{dt}\Big|_{F(t)} = Fv = \frac{F^2(t)}{2m\beta}$$

$$\frac{dWnih}{dt}\Big|_{F_{upora}} = -(bv)v = -bv$$

$$= -b\,\frac{F^2(t)}{4m^2\beta^2}$$

$$= -\frac{F^2(t)}{2m\beta}$$

- pogajanje nihala je najbolj učinkovito tedaj, ko je zunanja sila F(t) v resonanci z nihalom, t.j ko velja $\omega = \omega_0$

- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

- most: (2. razlagi za porušitev)

1.

2. $F_{upora} = bv$; $b > 0$

   F_{upora} je nasprotna smeri hitrosti

   Pri tem mostu $b < 0$

   $x = xe^{-\frac{b}{2m}t}$

Sestavljena nihala in sestavljeno nihanje

- preprosti primeri sestavljenih nihal

1.

2.

3.

- J = vztrajnostni moment vsakega od nihal
- l_c = odaljenost masnega središča vsakega od nihal od osi vrtenja
- m = masa vsakega od nihal
- napišimo zakon za vrtenje vsakega nihala posebej: raztezek vzmeti je:

$b(\phi_2 - \phi_1) \Longrightarrow F_v = k \cdot \text{raztezek} = kb(\phi_2 - \phi_1)$

$$\alpha_1 = \frac{d^2\phi_1}{dt^2} = \text{kotni pospešek 1. nihala}$$

$$\alpha_2 = \frac{d^2\phi_2}{dt^2} = \text{kotni pospešek 2. nihala}$$

$$J\alpha_1 = \sum M^{(1)} = -mgl_c\phi_1 + \frac{b^2k}{J}(\phi_2 - \phi_1)$$

$$J\alpha_2 = \sum M^{(2)} = -mgl_c\phi_2 + \frac{b^2k}{J}(\phi_2 - \phi_1)$$

1. $$\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + \frac{mgl_c}{J}\phi_1 - \frac{kb^2}{J}(\phi_2 - \phi_1) = 0$$

2. $$\frac{d^2\phi_2}{dt^2} + \frac{mgl_c}{J}\phi_2 + \frac{kb^2}{J}(\phi_2 - \phi_1) = 0$$

Zanima nas $\phi_1(t)$ in $\phi_2(t)$

$$\frac{mgl_c}{J} = \omega_0$$

$$\frac{kb^2}{J} = \Delta$$

i) če seštejemo 1 in 2 sledi: $\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + \frac{d^2\phi_2}{dt^2} + \omega_0\,(\phi_1 + \phi_2) = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi_1 + \phi_2) + \omega_0^2(\phi_1 + \phi_2) = 0$$

$=x$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\Phi_1 - \phi_2 = A_1 \sin(\omega_0^{(1)}t - \delta_1)\ ;\ \omega_0^{(1)} = \omega$$

ii) če enačbo 1. odštejemo od 2 pa dobimo: $\frac{d^2\phi_2}{dt^2} - \frac{d^2\phi_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\Delta^2)(\phi_2 - \phi_1)$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi_2 - \phi_1) + (\omega_0^2 + 2\Delta^2)(\phi_2 - \phi_1) = 0$$

$$\phi_2 - \phi_1 = A_2 \sin(\omega_0^{(2)} t - \delta_2) ;$$

$$\omega_0^{(2)} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Delta^2}$$

- Ugotovitve: 1. Frekvenci $\omega_0^{(1)} = \omega$ in $\omega_0^{(2)} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Delta^2}$ sta lastni frekvenci sestavljenega nihala. Sestavljeno nihalo ima toliko lastnih frekvenc $\omega_0^{(1)}$, $\omega_0^{(2)}$ … kolikor enostavnih nihal ga sestavlja. V splošnem niso vse lastne frekvence različne

$$\phi_1 = \frac{1}{2} A_1 \sin(\omega_0^{(1)} t - \delta_1) - \frac{1}{2} A_2 \sin(\omega_0^{(2)} t - \delta_2)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} A_1 \sin(\omega_0^{(1)} t - \delta_1) - \frac{1}{2} A_2 \sin(\omega_0^{(2)} t - \delta_2)$$

2. Lastno nihanje sestavljenega nihala je takšno, pri katerem vsako od enostavnih nihal niha z enako frekvenco, ki je ena od lastnih frekvenc.

Npr: $A_2 = 0 \Longrightarrow \phi_2(t) = \frac{1}{2} A_1 \sin(\omega_0^{(1)} t - \delta_1)$

1. Lastno nihanje s frekvenco $\omega_0^{(1)} = \sqrt{\frac{mgl_c}{J}}$

$A_1 = 0 \Longrightarrow \phi_2(t) = - \phi_1(t) = \frac{1}{2} A_2 \sin(\omega_0^{(2)} t - \delta_2)$

2. lastno nihanje $\omega_0^{(2)} = \sqrt{\omega_0^2 + \Delta^2}$

3. Pri poljubnem sestavljenem nihalu lahko odmik i-tega enostavnega nihala od ravnovesne lege zapišemo kot vsoto harmoničnih nihanj z lastnimi frekvencami nihala

$$\phi_i(t) = \sum_{j=1}^{n} A_i^{(j)} \sin(\omega_o^{(j)} t - \delta_i^{(j)})$$

Takšno gibanje posameznega nihala v splošnem ni periodično ponavljajoče se gibanje, torej v splošnem ni nihanje. Nihanje dobimo le v primeru, če so vse lastne frekvence $\omega_o^{(j)}$ celoštevilčni mnogokratniki najmanjše lastne frekvence.

4. Poljubno nihanje lahko torej vedno zapišemo v obliki:

$$\phi(t) = \sum_{1}^{\infty} A_n \sin(n \omega_0 t - \delta_n)$$

Fourier-jeva vrsta

ω_0 = najmanjša lastna frekvenca

5. Takšno nihanje najbolj nazorno predstavimo s spektrom nihanja

- $\sum \vec{F}_i = 0$ telo miruje = je v mehanskem ravnovesju
- $\sum \vec{M}_i = 0$
- ker v naravni ni absolutno togih teles se vsako telo pod vplivom zunanjih sil deformira. Pri tem spremeni obliko in prostornino
- deformacije: - elastične: ko zunanje sile prenehajo delovati telo zavzame prvotno obliko in prostornino
  - plastične: če se telo ne povrne v prvotno obliko in prostornino
- porazdelitev zunanjih sil po površini in prostornini telesa: v splošnem so zunanje sile zvezno porazdeljene po površini in prostornini telesa

i) Površinska (ploskovna) porazdelitev sil

- $\vec{n}$ = vektor normale na ploskev dS (enotski vektor, ki je $\perp$ na ploskev dS) je delež celotne zunanje sile, ki deluje na ploskev dS

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\perp} + d\vec{F}_{\parallel}$$

$$\frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{d\vec{F}_{\perp}}{dS} + \frac{d\vec{F}_{\parallel}}{dS}$$

$\frac{d\vec{F}}{dS}$ = napetost [$\frac{N}{m^2}$]

$\frac{d\vec{F}_{\parallel}}{dS} = \mathcal{T}$ = strižna napetost

$\frac{d\vec{F}_{\perp}}{dS} = \sigma\vec{n}$ natezna napetost, če $\frac{d\vec{F}_{\perp}}{dS}$ kaže v isto smer kot $\vec{n}$

$-P\vec{n}$ tlačna napetost, če $\frac{d\vec{F}_{\perp}}{dS}$ kaže v nasprotno smer kot $\vec{n}$

- porazdelitev zunanjih sil po površini telesa opredelimo torej tako, da za vsak ploskovni element navedemo ustrezno napetost.

Celotno silo F, ki deluje na površino telesa zapišemo kot: $F = \int_S (\sigma\vec{n} + \mathcal{T})dS$

ii) Prostorninska porazdelitev zunanjih sil

- $f = \frac{d\vec{F}}{dV}$ = gostota telesa
- $\vec{F} = \int f dV$
- $d\vec{F} = dmg = \rho dVg = \rho gdV$
- ρ = gostota snovi
- v primeru teže je gostota sile f enaka: $f = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{\rho gdV}{dV} = \rho g$ = specifična teža

Osnovni tipi deformacij

1. Natezna deformacija palic

- L >> a, b
- F je enakomerno porazdeljena po celotnem prečnem preseku palice
- $\frac{F}{S} = \sigma$ = natezna napetost
- zaradi delovanja zunanjih sil se palica raztegne
- $L \rightarrow L + \Delta L$

- ΔL = raztezek palice
- kako je ΔL povezan s silo?
- $\Delta L = \frac{F}{S} \cdot L \cdot \frac{1}{E}$
- E = prožnostni modul snovi
- $\frac{\Delta L}{L} \cdot E = \frac{F}{S}$
- $\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon$ = relativni raztezek palice
- $\varepsilon E = \sigma$ Hooke-ov zakon za natezanje
- $[E] = [\sigma] = \frac{N}{m^2}$
-

snov	$E\ (\frac{N}{m^2})$
Jeklo	$2 \cdot 10^{11}$
Pb	$1,5 \cdot 10^{10}$

- če palico stiskamo

- $\Delta L < 0$
- $\frac{\Delta L}{L} < 0$; $-\varepsilon E = P$

- Hooke-ov zakon

$\varepsilon E = \sigma$

$$\frac{dL}{L} \cdot E = \frac{F}{S}$$

$$\Delta L = \frac{1}{E} \cdot L \cdot \frac{F}{S}$$

- $L >> a, b$
- $L \rightarrow L + \Delta L$
- $a \rightarrow a + \Delta a$
- $b \rightarrow b + \Delta b$
- $0 < \eta < \frac{1}{2}$
- $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \eta \frac{\Delta L}{L}$
- η = Poissonovo št.
- $\Delta V = ?$
- $V = abL$
- $V + \Delta V = (L + \Delta L)(a - \Delta a)(b - \Delta b)$

$= abL + ab\Delta L - \Delta abL - a\Delta bL + \Delta a\Delta bL - a\Delta b\Delta L - \Delta ab\Delta L + \Delta a\Delta b\Delta L$
- $\Delta V = ab\Delta L - \Delta abL - a\Delta bL + \Delta a\Delta bL - a\Delta b\Delta L - \Delta ab\Delta L + \Delta a\Delta b\Delta L$
- $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta b}{b} ...$

Zelo majhen in ni pomemben
- $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L} (1 - 2\eta)$

Ker je $\Delta V > 0$
- Zgled:

- L = dolžina palice
- E = prožnostni modul
- S = prečni presek
- m = masa palice
- Za koliko se palica raztegne zaradi svoje teže?

$\sigma = \frac{F}{S}$

$\Delta L = \frac{L}{E} \cdot \frac{mg}{S} \cdot \frac{1}{2}$ (povprečni)

Matematično natančen izračun:

- $d(\Delta L)$ – raztezek dela palice s površino dx na oddaljenosti od roba palice
- $d(\Delta L) = \frac{dx}{E} \cdot \frac{m(L-x)}{L} \cdot \frac{g}{S}$

Masa delca

- $d(\Delta L) = \frac{mg}{ELS}(L-x)dx$
- $\Delta L = \int d(\Delta L) = \frac{mg}{ELS}\int_0^L (L-x)dx = \frac{mg}{ELS}(L^2 - \frac{L^2}{2}) = \frac{mg}{ELS} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{mgL}{2ES}$

Hooke-ov zakon za tlak

- stisnemo iz vseh strani
- $P_1 = \frac{F_1}{S_1}$
- $P_2 = \frac{F_2}{S_2}$
- $P_3 = \frac{F_3}{S_3}$
- $\frac{\Delta V}{V} = -\chi \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3)$
- χ = stisljivost snovi [$\frac{m^2}{N}$]
- Poseben primer: $P_1 = P_2 = P_3 = P$

$\frac{\Delta V}{V} = -\chi P$

Strižna deformacija ali Hooke-ov zakon za strig

- $\frac{\Delta x}{h} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{E}{S}$
- σ = strižni modul snovi
- $\frac{\Delta x}{h}$ = tgO $\approx$ O za majhne kote
- $\frac{F}{S} = \mathcal{T}$ = strižna napetost
- $\sigma O = \mathcal{T}$ Hooke-ov zakon za strig
- $[\sigma] = [\mathcal{T}] = [\frac{N}{m^2}]$
- $\varepsilon E = P$
- $\frac{\Delta L}{L} = -\frac{P}{E}$
- $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\eta)$
- $\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{E}(1 - 2\eta)$

$$- \frac{\Delta V}{V} = -\chi \frac{P}{3} = -\chi (P_1 + P_2 + P_3) \frac{1}{3}$$

$$-\chi/3 = \frac{(1-2\eta)}{E} \Rightarrow \chi = \frac{3(1-2\eta)}{E}$$

Torzija kot primer strižne deformacije

- žica s polmerom R in dolžino L