

Rado Flajs

**Rešene naloge iz STATIKE**

Zadnja sprememba: 8. oktober 1999

# 1 Uvod

## 1.1 Predgovor

V nadaljevanju je podanih nekaj rešenih nalog iz STATIKE. Pri nekaterih nalogah so podani namigi, pri drugih celoten postopek, pri večini pa samo rešitev.

Vse naloge so bile rešene z uporabo programa MATLAB. Več o MATLABU lahko bralec najde na spletnem naslovu <http://www.mathworks.com>. Program MATLAB moremo s pridom uporabiti pri reševanju vseh nalog iz STATIKE, kot tudi pri reševanju nalog pri ostalih strokovnih predmetih, kadar nimamo na razpolago specialnih programov za re sevanje le teh. Na nekaj primerih je prikazana uporaba MATLAB-a pri reševanju izbranih nalog.

Literatura: Egon Zakrajšek: MATLAB, Ljubljana, 1998 (2. poglavje v knjigi "Matematične metode" ki se nahaja na datotekah <http://valjhun.fmf.uni-lj.si/~egon> mm.ps v Postscript formatu in mm.dvi v DVI formatu).

Pomen nekaterih oznak:

PI = pisni izpit

DN = domača naloga

VSŠ = visokošolski strokovni študij

UNI = univerzitetni študij

## 1.2 Globalni koordinatni sistemi

V ravninskih primerih namesto običajnega  $XY$  koordinatnega sistema uporabljamo  $XZ$  koordinatni sistem, ki je podrobneje predstavljen v učbeniku za STATIKO avtorjev Marjana Staneka in Gorana Turka. V prostoru uporabljamo običajen  $XYZ$  koordinatni sistem.

## 1.3 Nove naloge, popravki in druge spremembe

Ker je dokument "živ" (avtor dodaja nove naloge, odpravlja morebitne napake in vnaša druga dopolnila kot so namigi, postopki itd...) so spodaj so podani kazalci na vse spremembe v dokumentu.

Avtor se lepo zahvaljuje vsem, ki bi ga opozorili na kakršnekoli napake ali pomankljivosti.

Okrajšave:

- DNS = diagram notranjih sil
- N = paličje
- RE = ravnotežne enačbe, reakcije
- KE = kinematične enačbe
- T = težišče – uporabne naloge

### 1.3.1 Nove naloge

7. 6. 99 N PI 19.11.98/2, PI 15.12.98/2,

DNS PI 27.03.97/3, PI 15.05.97/2, PI 16.06.97/2 PI 30.06.97/2 PI 15.12.97/2, PI 15.12.97/3, PI 16.06.98/2, PI 30.06.98/2, PI 04.09.98/2a, PI 04.09.98/2b, PI 04.09.98/2c, PI 04.09.98/2d, PI 04.09.98/3, PI 17.09.98/2b, PI 17.09.98/3, PI 19.11.98/3, PI 19.11.98/4, PI 15.12.98/1, PI 15.12.98/3,

T PI 15.12.98/4

2. 10. 99 N PI 18.06.96/1, PI 28.06.96/1, PI 05.09.96/1, PI 27.03.97/1, PI 26.03.99/2, KOL 24.05.99/1,  
PI 08.06.99/2, PI 09.09.99/2, PI 23.09.99/1, PI 23.09.99/2, DN 99/3/1a, DN 99/3/3,  
DNS PI 26.03.99/1 PI 26.03.99/3 PI 09.09.99/1 PI 09.09.99/3 PI 23.09.99/3  
T PI 23.09.99/4

### **1.3.2 Popravki pri starih nalogah**

### **1.3.3 Druge spremembe**

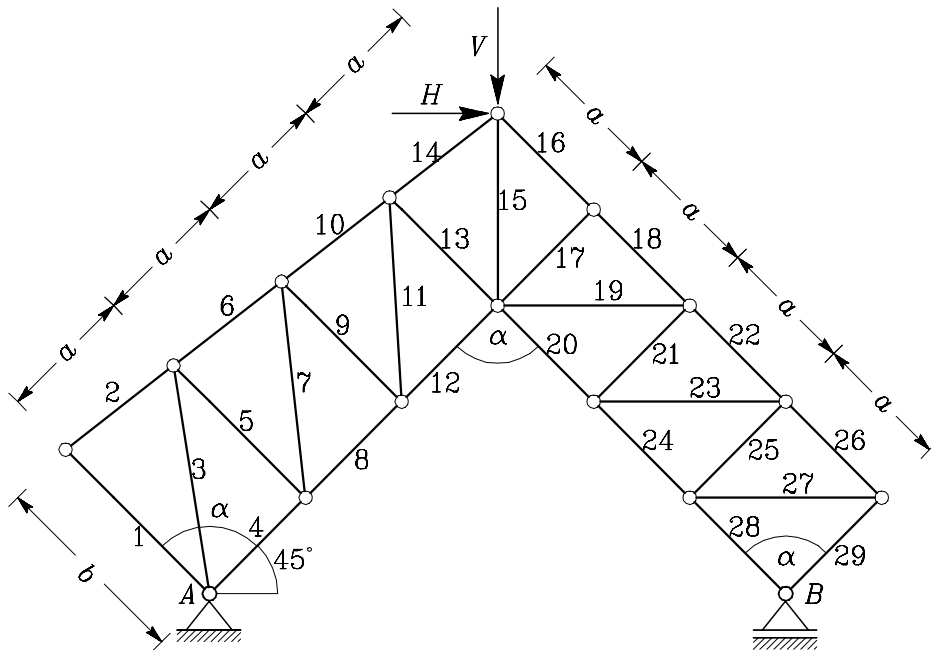
## 2 Paličja

### 2.1 PI 18.06.96/1

Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno z horizontalno silo  $H$  in z vertikalno silo  $V$  kot prikazuje slika. Palice 1, 5, 9, 13 in 16 so vzporedne. Palice 2, 6, 10 in 14 ležijo na isti premici. Palice 4, 8, 12 in 17 ležijo na isti premici.

- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osne sile v palicah 7, 11 in 19.

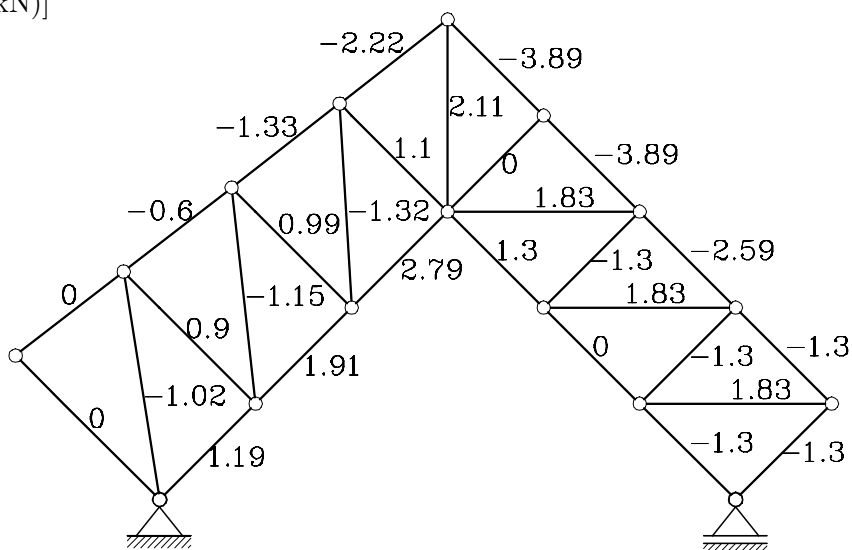
Podatki:  $a = \sqrt{2}$  m,  $b = \frac{3}{2}\sqrt{2}$  m,  $H = 1$  kN,  $V = 2$  kN.



#### Rešitev:

Reakcije:  $A_x = -1$  kN,  $A_z = -0.167$  kN,  $B_z = -1.833$  kN,  
 $N_7 = -1.1525$  kN,  $N_{11} = -1.3245$  kN,  $N_{19} = 1.8333$  kN.

[N(kN)]

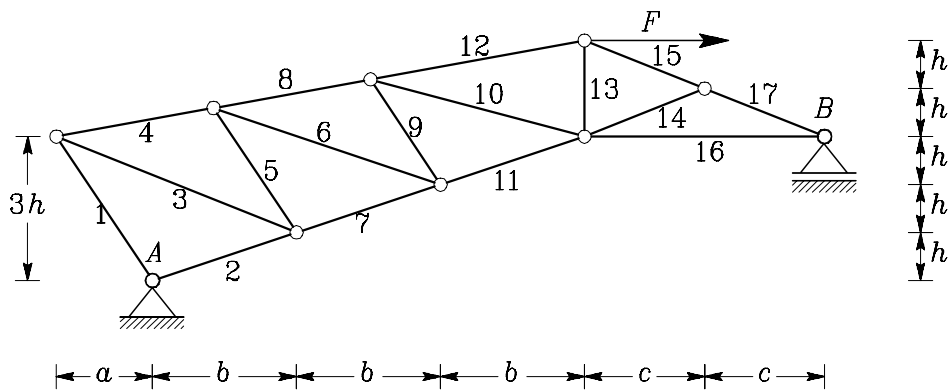


## 2.2 PI 28.06.96/1

Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno z horizontalno silo  $F$  kot prikazuje slika. Palice 1, 5 in 9 so vzporedne. Palice 4, 8 in 12 ležijo na isti premici. Palice 2, 7 in 11 ležijo na isti premici.

- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osne sile v palicah 6, 10 in 13.

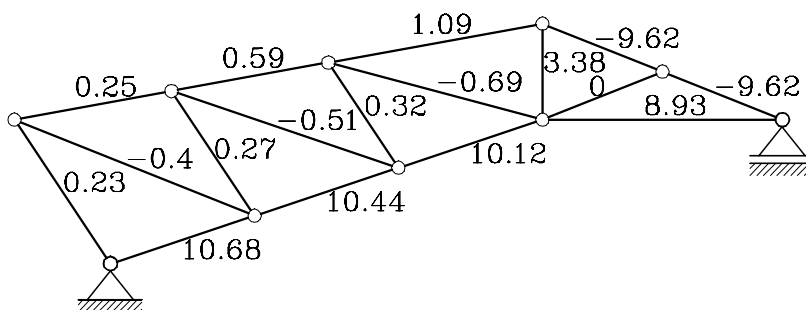
Podatki:  $a = 1\text{ m}$ ,  $b = 1.5\text{ m}$ ,  $c = 2.5\text{ m}$ ,  $h = 0.5\text{ m}$ ,  $F = 10\text{ kN}$ .



## Rešitev:

Reakcije:  $A_x = -10\text{ kN}$ ,  $A_z = 3.571\text{ kN}$ ,  $B_z = -3.571\text{ kN}$ ,  
 $N_6 = -0.5135\text{ kN}$ ,  $N_{10} = -0.6907\text{ kN}$ ,  $N_{13} = 3.3766\text{ kN}$ .

[N(kN)]

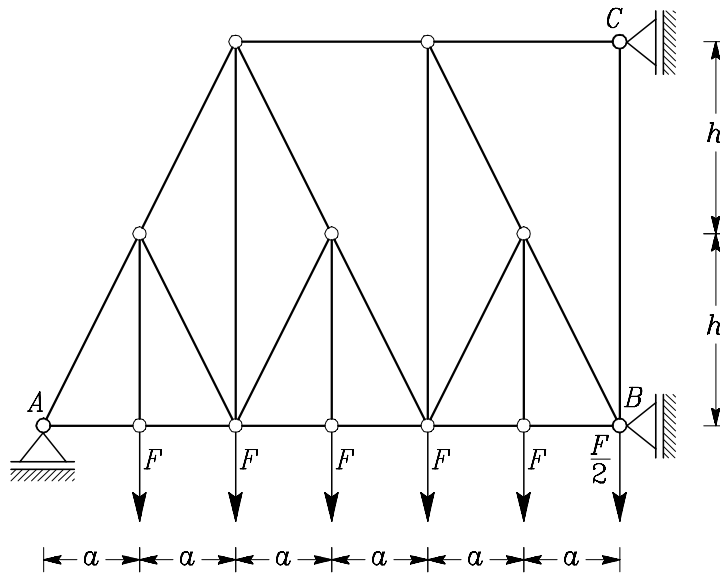


## 2.3 PI 05.09.96/1

Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno s silami, kot prikazuje slika.

- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osni sile.

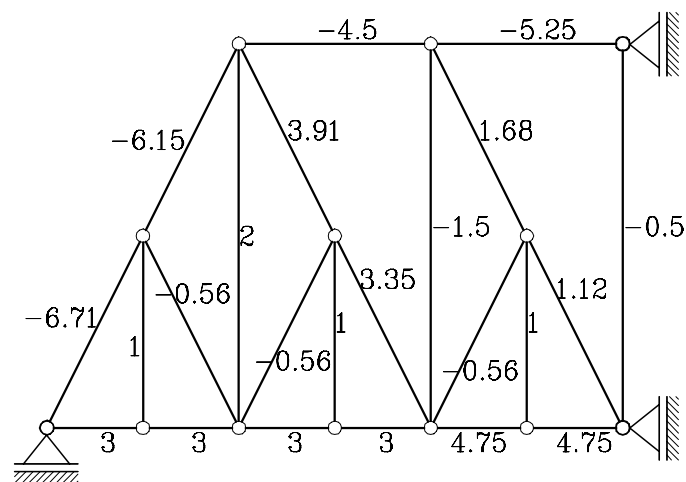
Podatki:  $a = 1\text{ m}$ ,  $h = 2\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .



**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = -6\text{ kN}$ ,  $B_x = 5.25\text{ kN}$ ,  $C_x = -5.25\text{ kN}$ .

[N (kN)]

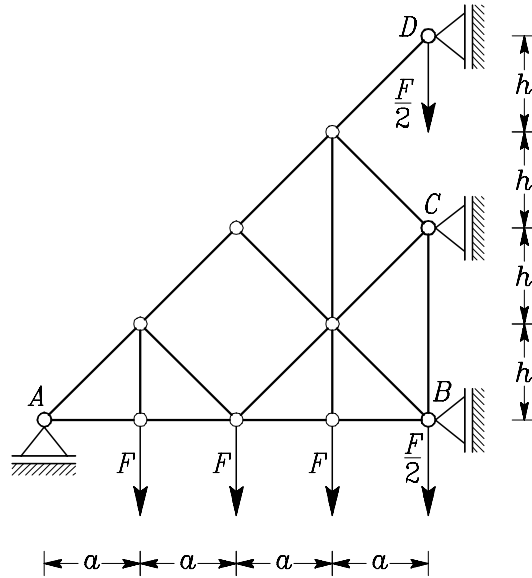


## 2.4 PI 27.03.97/1

Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno s silami, kot prikazuje slika.

- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osne sile.

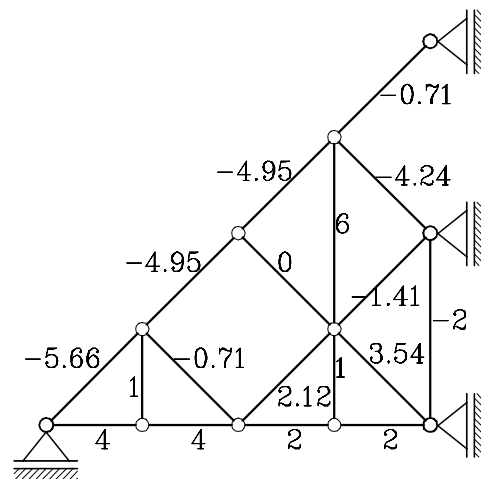
Podatki:  $a = 1\text{ m}$ ,  $h = 1\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .



**Rešitev:**

Reakcije:  $A_z = -4\text{ kN}$ ,  $B_x = 4.5\text{ kN}$ ,  $C_x = -4\text{ kN}$ ,  $D_x = -0.5\text{ kN}$ .

[N(kN)]

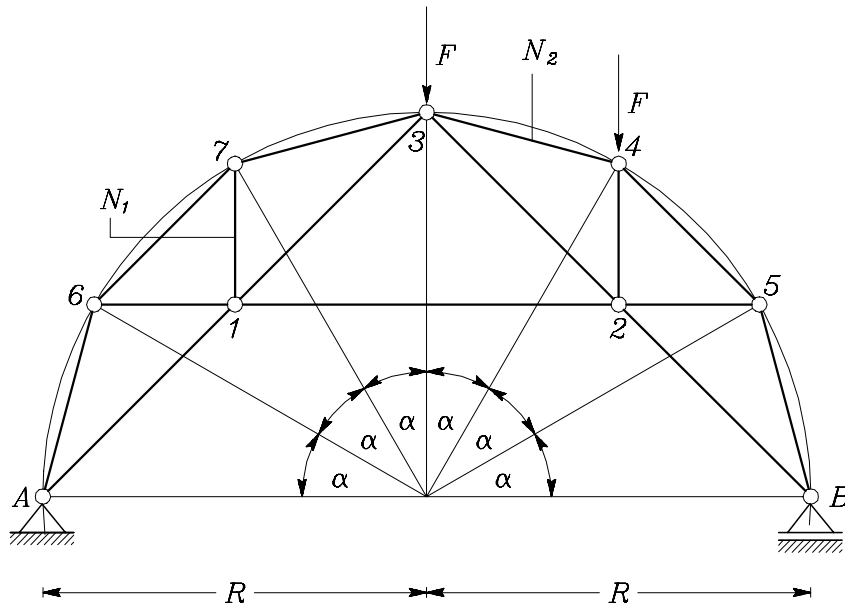


## 2.5 PI 19.11.98/2

Ravninsko paličje na sliki je v vozliščih 3 in 4 obremenjeno s silama  $F$ .

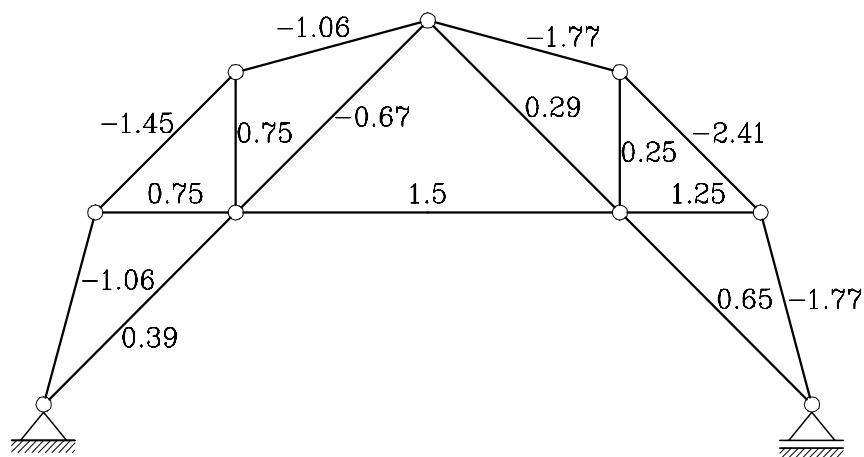
1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za paličje.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj osni sili  $N_1$  v palici 1 – 7 in  $N_2$  v palici 3 – 4.

Podatki:  $F = 1 \text{ kN}$ ,  $R = 4 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0 \text{ kN}$ ,  $A_z = -0.7500 \text{ kN}$ ,  $B_z = -1.2500 \text{ kN}$   
 $N_1 = 0.7500 \text{ kN}$ ,  $N_2 = -1.7678 \text{ kN}$ .

[ $N$ (kN)]



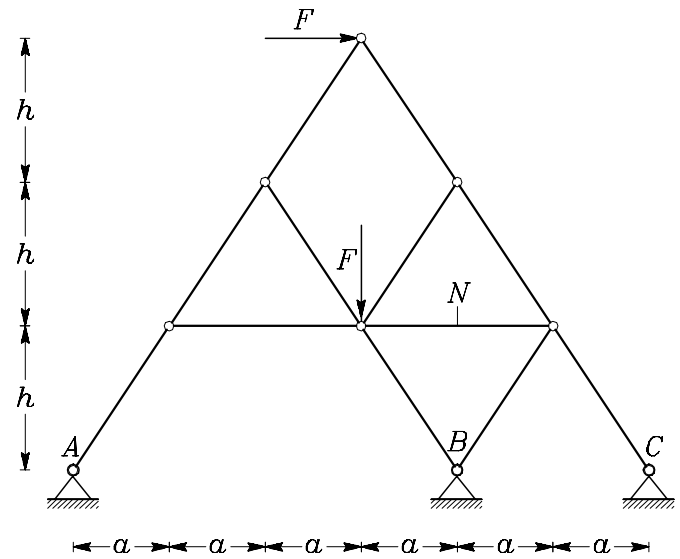


## 2.6 PI 15.12.98/2

Ravninsko paličje je obremenjeno s silama  $F$ , kot prikazuje slika.

1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za paličje.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj osno silo  $N$  (glej sliko).

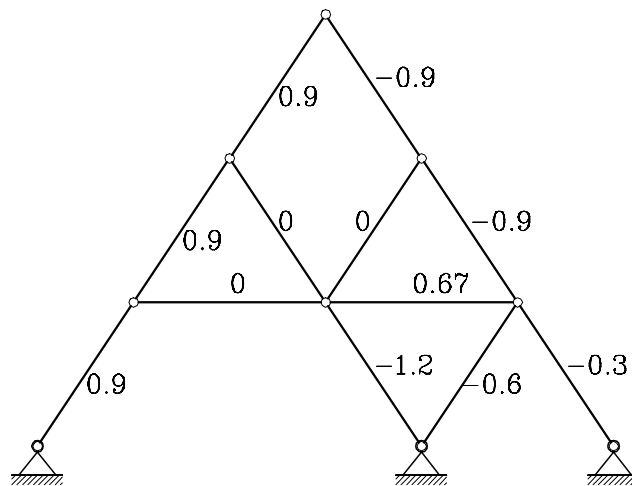
Podatki:  $F = 1 \text{ kN}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ .



### Rešitev:

Reakcije:  $A_x = -0.5 \text{ kN}$ ,  $A_z = 0.7500 \text{ kN}$ ,  $B_x = -0.3333 \text{ kN}$ ,  $B_z = -1.5000 \text{ kN}$   
 $C_x = -0.1667 \text{ kN}$ ,  $C_z = -0.2500 \text{ kN}$ ,  $N = 0.6667 \text{ kN}$ .

[ $N$ (kN)]



## 2.7 PI 26.03.99/2

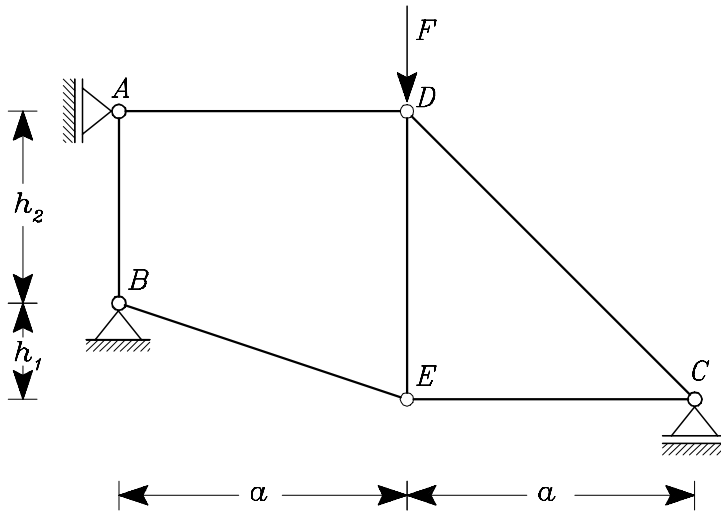
Ravninsko paličje na sliki je obteženo s silo  $F$ .

Izračunaj računsko število prostostnih stopenj za konstrukcijo  $\tilde{n}_{ps}$ .

Izračunaj reakcije.

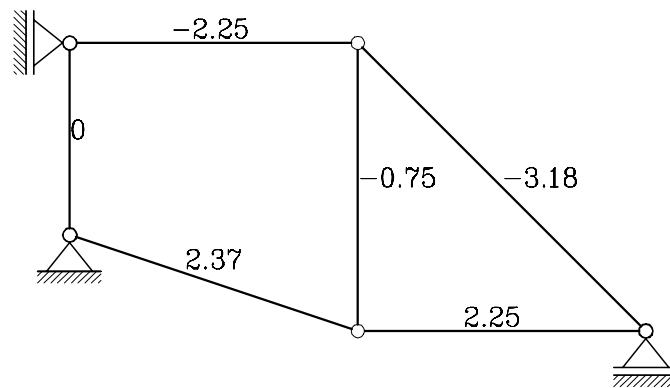
Izračunaj osno silo v palici  $DE$ .

Podatki  $a = 3\text{ m}$ ,  $h_1 = 1\text{ m}$ ,  $h_2 = 2\text{ m}$ ,  $F = 3\text{ kN}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 2.25\text{ kN}$ ,  $B_x = -2.25\text{ kN}$ ,  $B_z = -0.75\text{ kN}$ ,  $C_z = -2.25\text{ kN}$ ,  $N_{DE} = -0.75\text{ kN}$ .

[N(kN)]

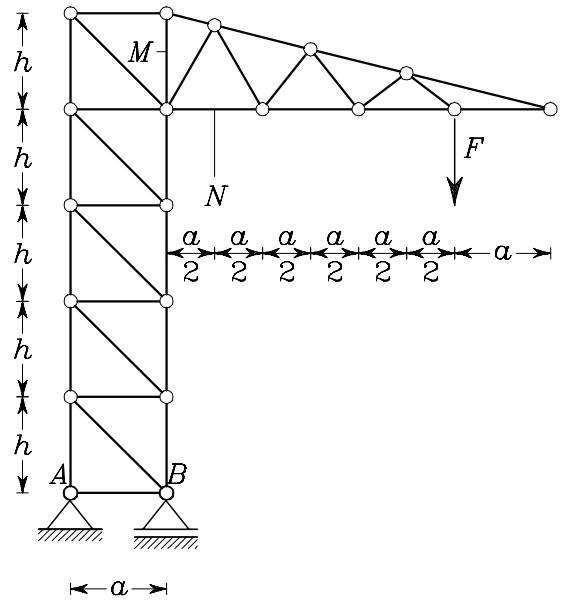


## 2.8 KOL 24.05.99/1

Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno s silo  $F$ , kot prikazuje slika.

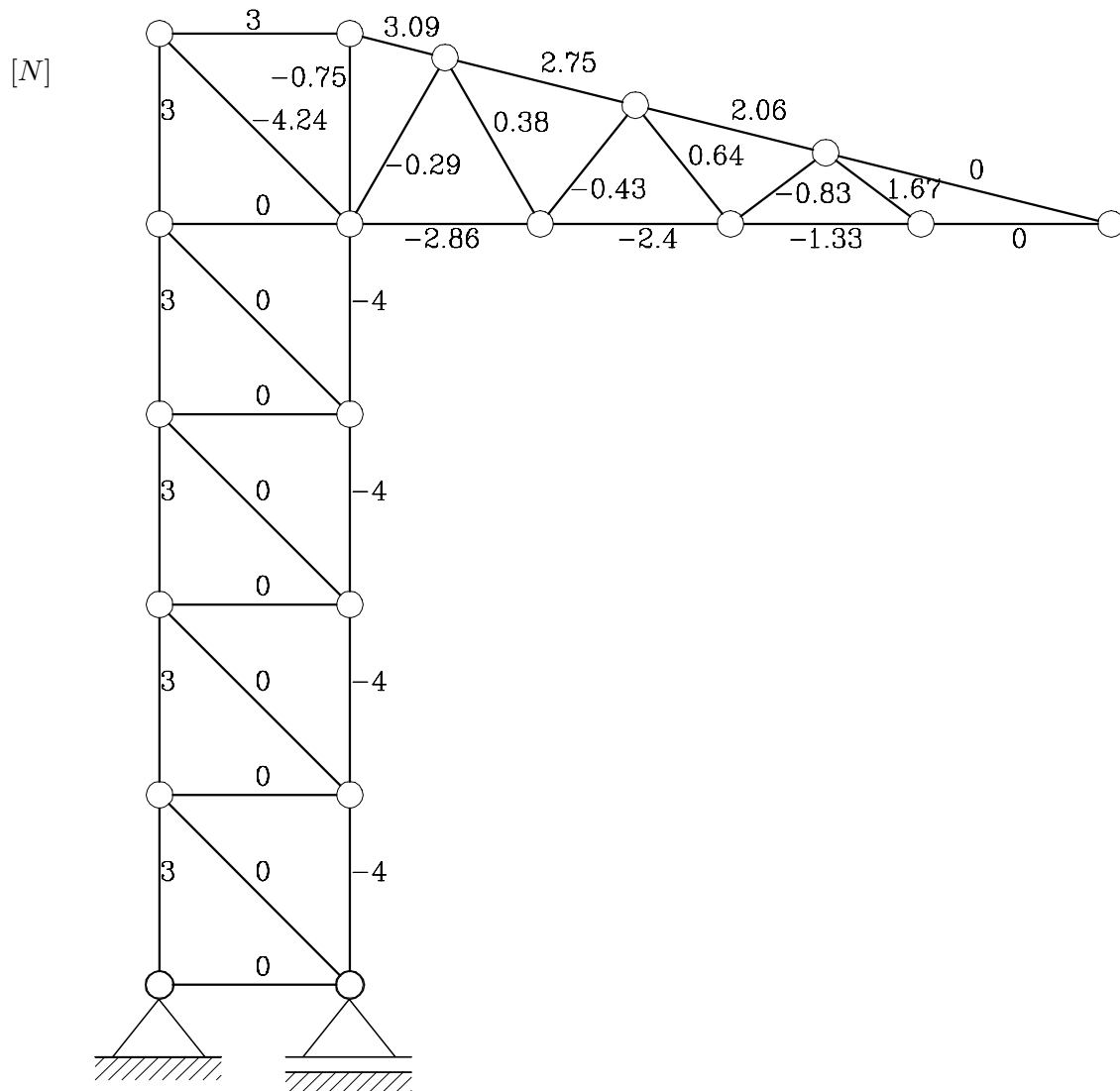
- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osni sili v palicah  $M$  in  $N$ .

Podatki:  $a = 2\text{ m}$ ,  $h = 2\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .



### Rešitev:

Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = 3\text{ kN}$ ,  $B_z = -4\text{ kN}$ ,  $M = -0.7500\text{ kN}$ ,  $N = -2.8571\text{ kN}$ .

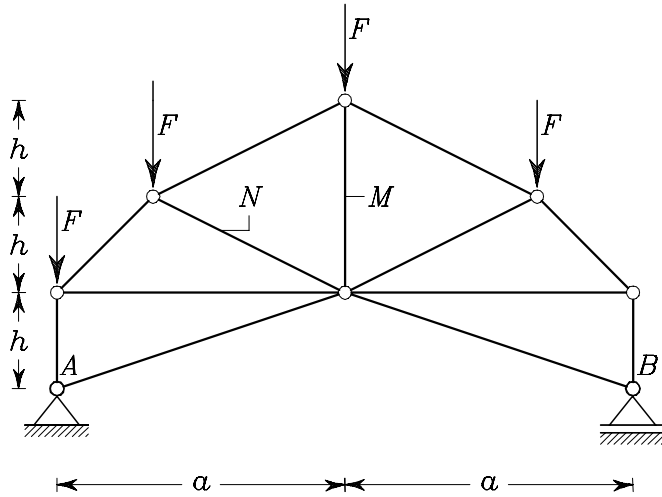


## 2.9 PI 08.06.99/2

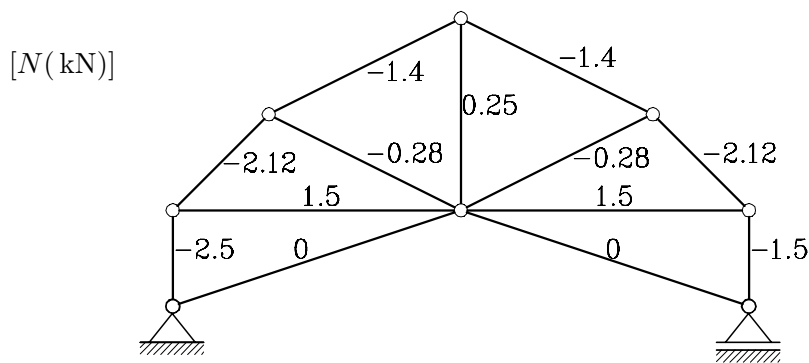
Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno s silami  $F$ , kot prikazuje slika.

- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osni sili v palicah  $M$  in  $N$ .

Podatki:  $a = 3\text{ m}$ ,  $h = 1\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = -2.5\text{ kN}$ ,  $B_z = -1.5\text{ kN}$ ,  
 $M = 0.250\text{ kN}$ ,  $N = -0.280\text{ kN}$ .

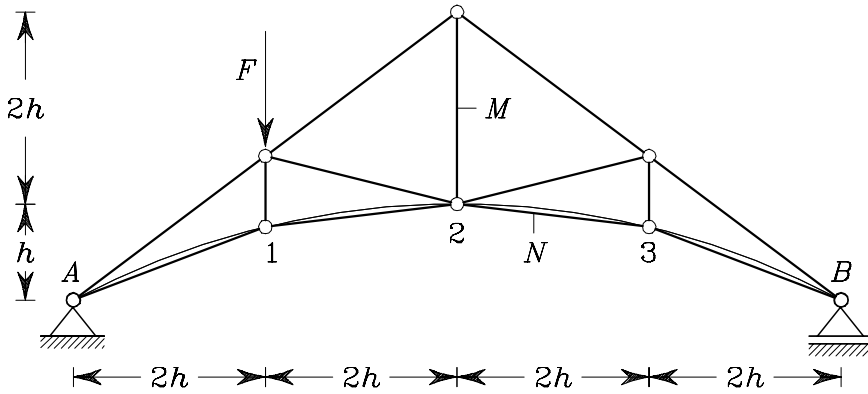


## 2.10 PI 09.09.99/2

Simetrično ravninsko paličje na sliki je obremenjeno s silo  $F$ , kot prikazuje slika. Vozlišča  $A$ , 1, 2, 3 in  $B$  ležijo na krožnici.

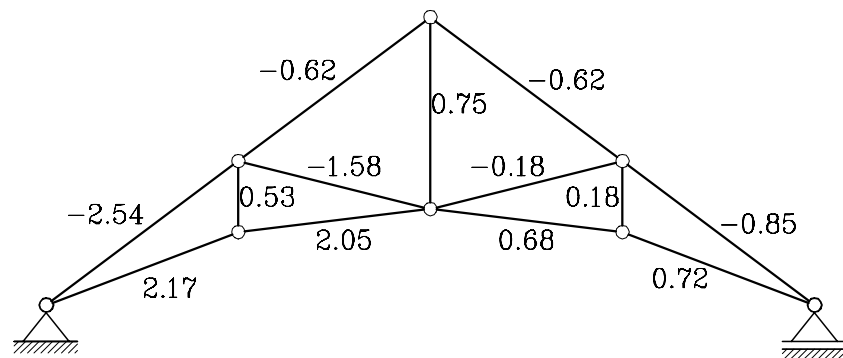
- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osni sili v palicah  $M$  in  $N$ .

Podatki:  $h = 1$  m,  $F = 1$  kN.

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0$  kN,  $A_z = -0.750$  kN,  $B_z = -0.250$  kN,  
 $M = 0.750$  kN,  $N = 0.682$  kN.

[N (kN)]

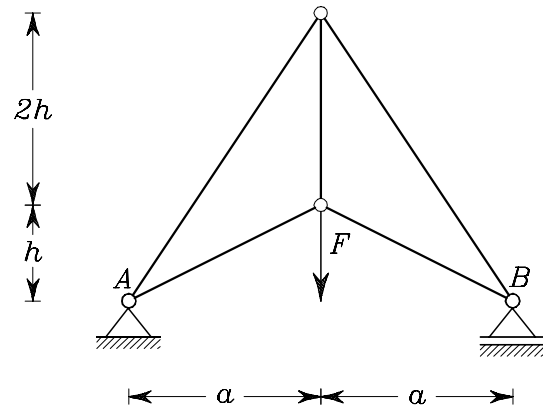


**2.11 PI 23.09.99/1**

Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno s silo, kot prikazuje slika.

- Izračunaj reakcije in osne sile v palicah.

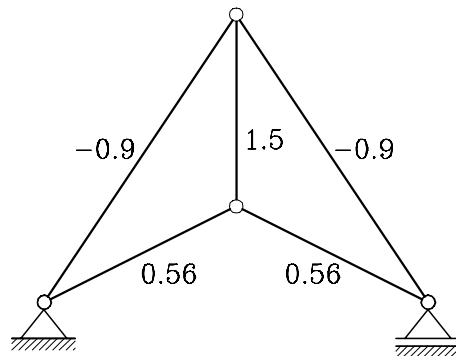
Podatki:  $a = 2\text{ m}$ ,  $h = 1\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = -0.5\text{ kN}$ ,  $B_z = -0.5\text{ kN}$

Točnejše vrednosti sil v palicah (glej sliko): 0.5590,  $-0.9014$ , 1.5.

[N(kN)]

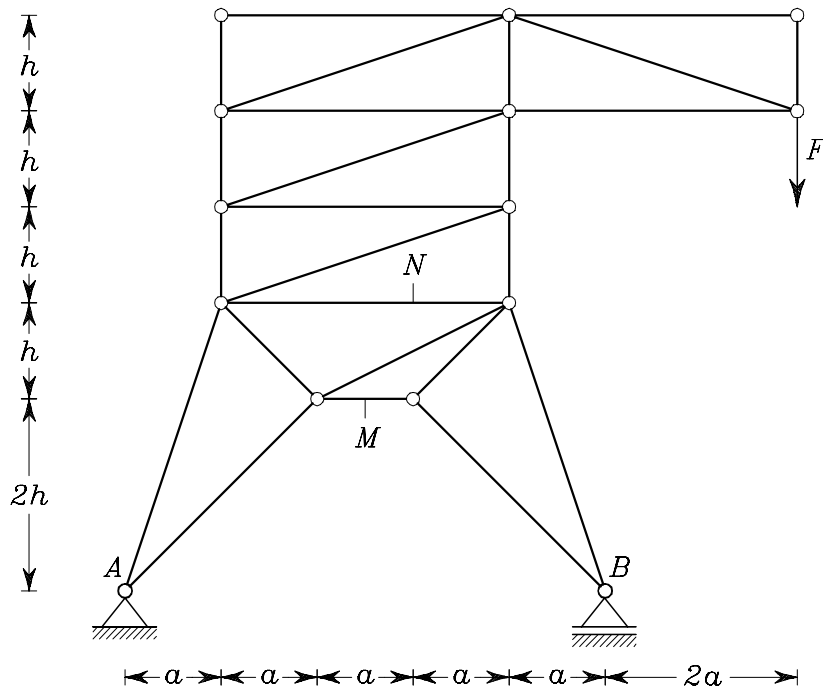


## 2.12 PI 23.09.99/2

Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno s silo  $F$ , kot prikazuje slika.

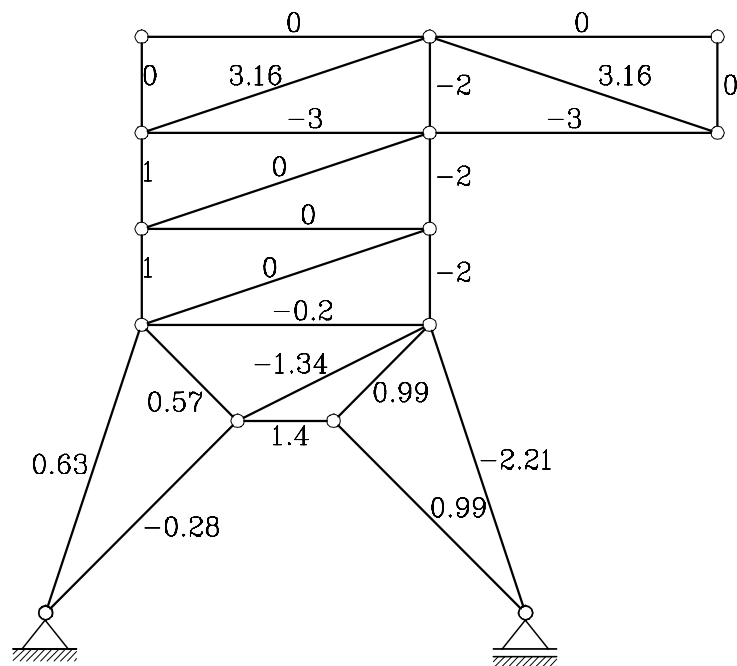
- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osni sili v palicah  $M$  in  $N$ .

Podatki:  $a = 1\text{ m}$ ,  $h = 1\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = 0.4\text{ kN}$ ,  $B_z = -1.4\text{ kN}$ ,  $M = 1.4\text{ kN}$ ,  $N = -0.2\text{ kN}$ .

[ $N$ (kN)]

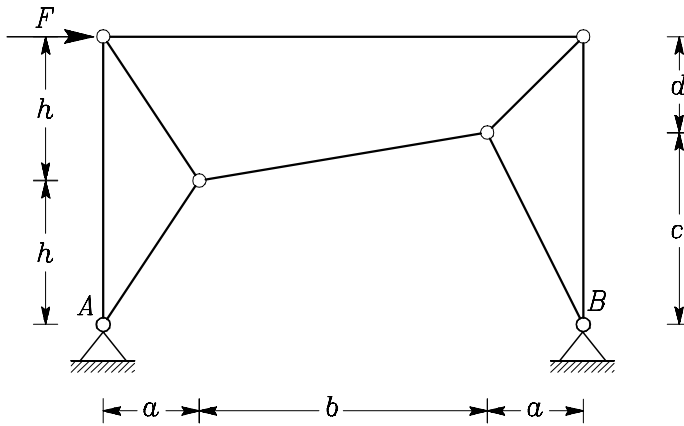


## 2.13 DN 99/3/1a

Ravninsko paličje na sliki je obremenjeno s silo  $F$ , kot prikazuje slika.

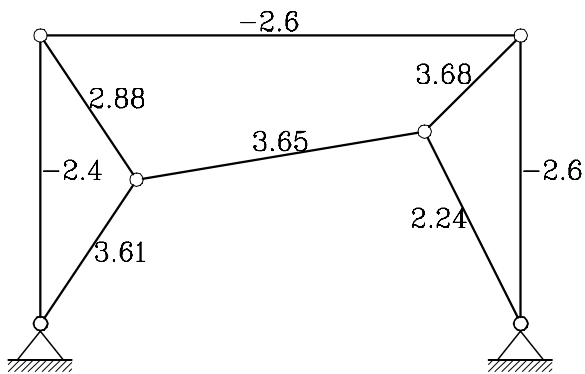
- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za ravninsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osne sile.

Podatki:  $a = 1\text{ m}$ ,  $b = 3\text{ m}$ ,  $c = 2\text{ m}$ ,  $d = 1\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = -2\text{ kN}$ ,  $A_z = 0.6\text{ kN}$ ,  $B_x = 1\text{ kN}$ ,  $B_z = -0.6\text{ kN}$ .

[N (kN)]





## 2.14 DN 99/3/3

Podane so točke (vozlišča prostorskega paličja na sliki)  $A(x_A, y_A, 0)$ ,  $B(x_B, y_B, 0)$ ,  $C(x_C, y_C, 0)$  in  $D(x_D, y_D, d)$ , kjer velja

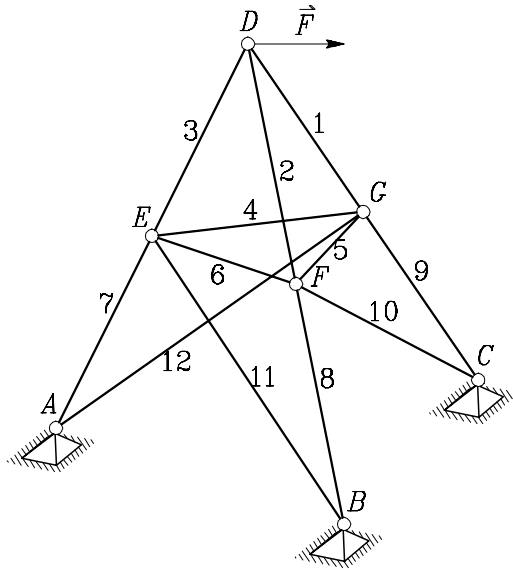
$$x_D = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{in} \quad y_D = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Točke  $E$ ,  $F$  in  $G$  ležijo na razpoloviščih stranic  $AD$ ,  $BD$  in  $CD$ .

Podatki:  $x_A = 0$ ,  $y_A = 0$ ,  $z_A = 0$ ,  $x_B = a$ ,  $y_B = 0$ ,  $z_B = 0$ ,  $x_C = b$ ,  $y_C = c$ ,  $z_C = 0$ . Prostorsko paličje na sliki je obremenjeno s silo  $\vec{F}$ , kot prikazuje slika.

- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za prostorsko paličje na sliki.
- Izračunaj reakcije in osne sile v palicah.

Podatki:  $a = 5$  m,  $b = 5$  m,  $c = 5$  m,  $\vec{F} = \{1, 1, 0\}^T$  kN.

**Rešitev:**

Vsi rezultati so podani v kN.

$$N = \begin{pmatrix} -2.1344 \\ 0.0000 \\ 2.1344 \\ 0 \\ -0.0000 \\ -0.0000 \\ 2.1344 \\ -0.0000 \\ -2.1344 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}, \quad R_A = \begin{pmatrix} -0.6667 \\ -0.3333 \\ -2.0000 \end{pmatrix}, \quad R_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_C = \begin{pmatrix} -0.3333 \\ -0.6667 \\ 2.0000 \end{pmatrix}$$

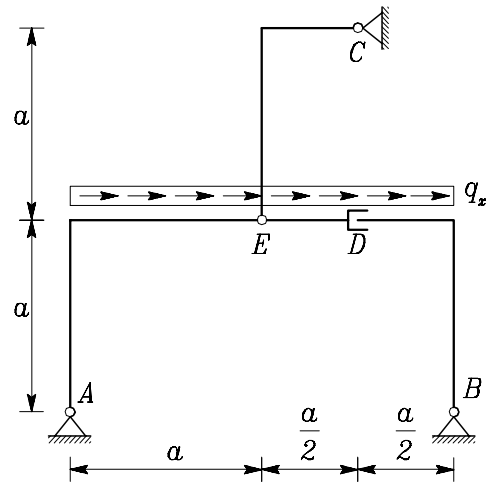
### 3 Ravninski okvirji – diagrami notranjih sil

#### 3.1 PI 27.03.97/3

Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q_x$  na tekoči meter. V točki  $D$  je omogočen medsebojni pomik v smeri  $x$ , medsebojni zasuk in pomik v smeri  $z$  pa sta preprečena.

Pokaži, da je konstrukcija statično določena in izračunaj reakcije, notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

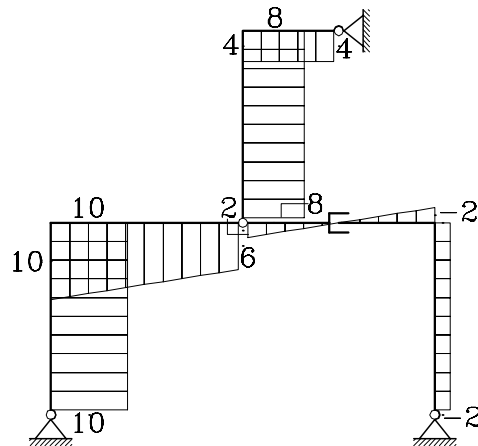
Podatki:  $q_x = 2 \text{ kN/m}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ .



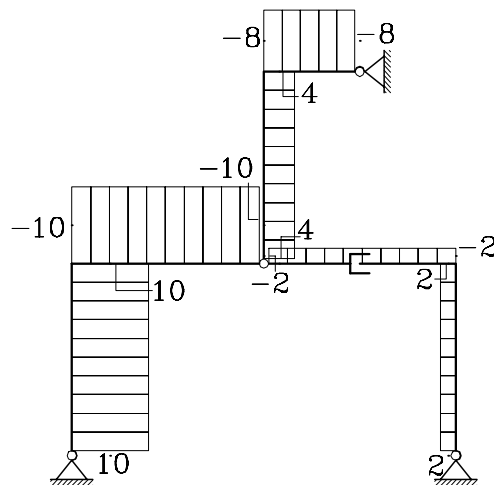
#### Rešitev:

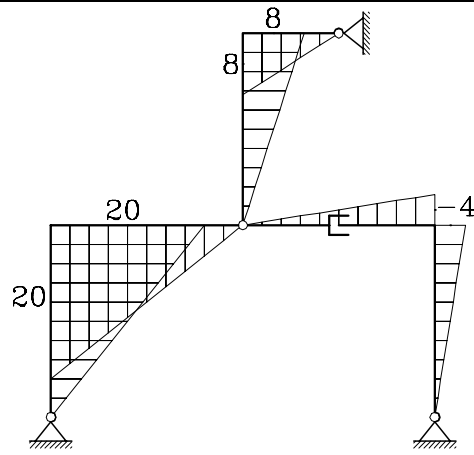
Reakcije:  $A_x = -10 \text{ kN}$ ,  $A_z = 10 \text{ kN}$ ,  $B_x = -2 \text{ kN}$ ,  $B_z = -2 \text{ kN}$ ,  $C_x = 4 \text{ kN}$ ,  $C_z = -8 \text{ kN}$ .

$[N_x (\text{kN})]$



$[N_z (\text{kN})]$



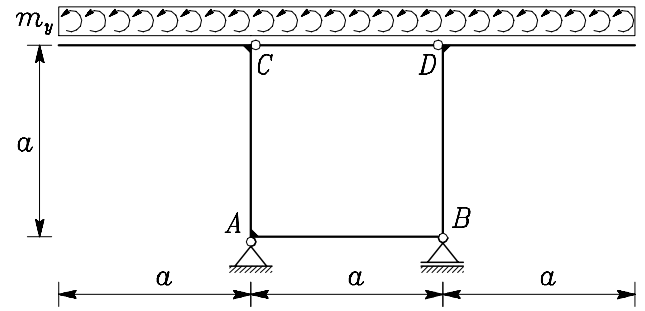
$[M_y \text{ (kNm)}]$ 

### 3.2 PI 15.05.97/2

Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno momentno obtežbo  $m_y$  na tekoči meter.

1. Pokaži, da je konstrukcija statično določena.
2. Izračunaj reakcije.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

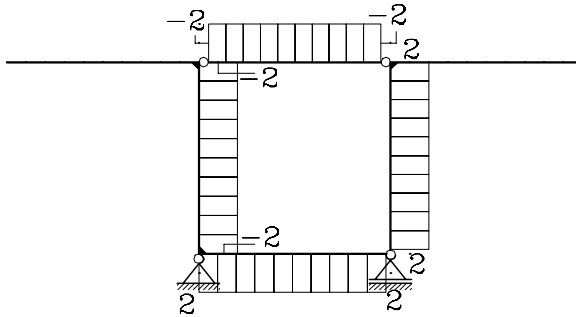
Podatki:  $m_y = 2 \text{ kNm/m}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ .



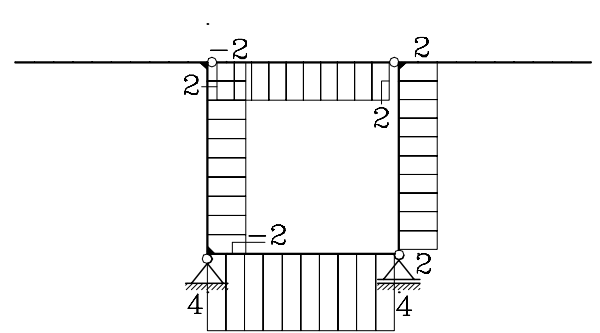
#### Rešitev:

Reakcije:  $A_x = 0 \text{ kN}$ ,  $A_z = -6 \text{ kN}$ ,  $B_z = 6 \text{ kN}$ .

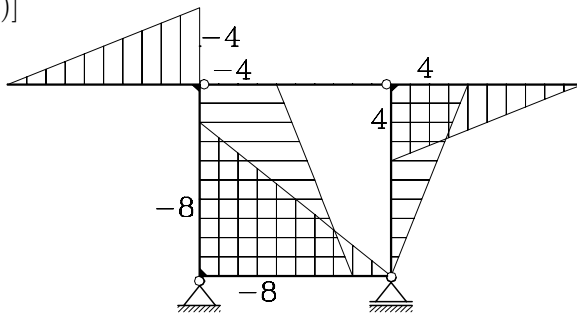
$[N_x (\text{kN})]$



$[N_z (\text{kN})]$



$[M_y (\text{kNm})]$

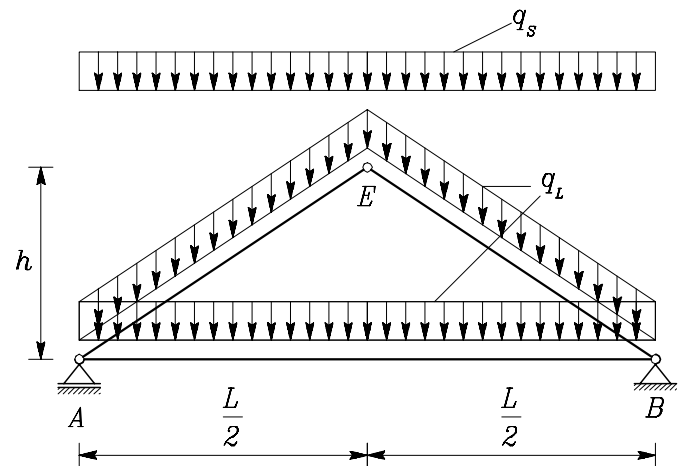


### 3.3 PI 16.06.97/2

Ravninski okvir na sliki je (po elementih  $AE$  in  $EB$ ) obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q_S$  na tekoči meter tlorisa (obtežba z snegom) in z enakomerno zvezno obtežbo na tekoči meter dolžine nosilca  $q_L$  (obtežba zaradi lastne teže). Po elementu  $AB$  je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo na tekoči meter dolžine nosilca  $q_L$ , kot prikazuje slika.

1. Določi število prostostnih stopenj  $n_{ps}$ .
2. Določi  $q_S$ , tako da bodo maksimalni upogibni momenti v poljih  $AB$ ,  $BC$  in  $AC$  enaki. Če ne znaš izračunati take obtežbe  $q_S$ , izberi  $q_S = 2$  KN/m. (-15%)
3. Za izračunano (ali izbrano) obtežbo  $q_S$  izračunaj reakcije, notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

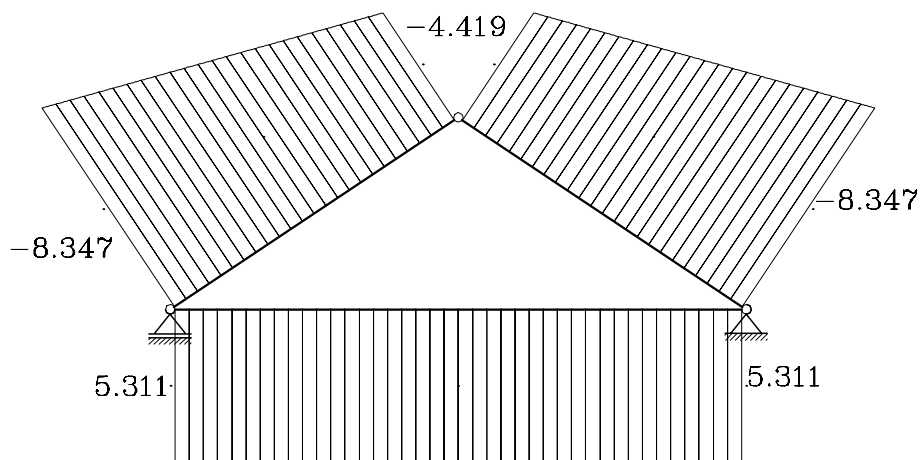
Podatki:  $q_L = 0.3$  KN/m,  $L = 6$  m,  $h = 2$  m.

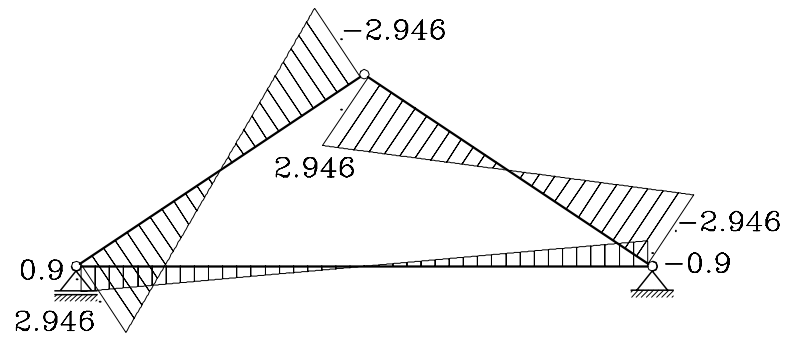
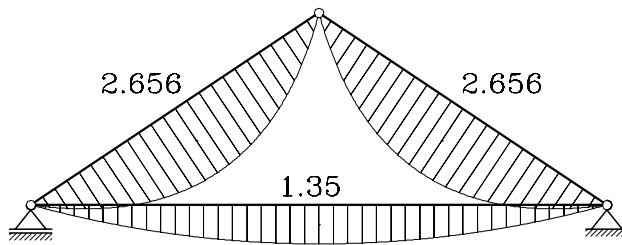


#### Rešitev:

Reakcije:  $A_z = -7.9817$  kN,  $B_x = 0$  kN,  $B_z = -7.9817$  kN,

$[N_x$  (kN)]



$[N_z(\text{kN})]$  $[M_y(\text{kNm})]$ 

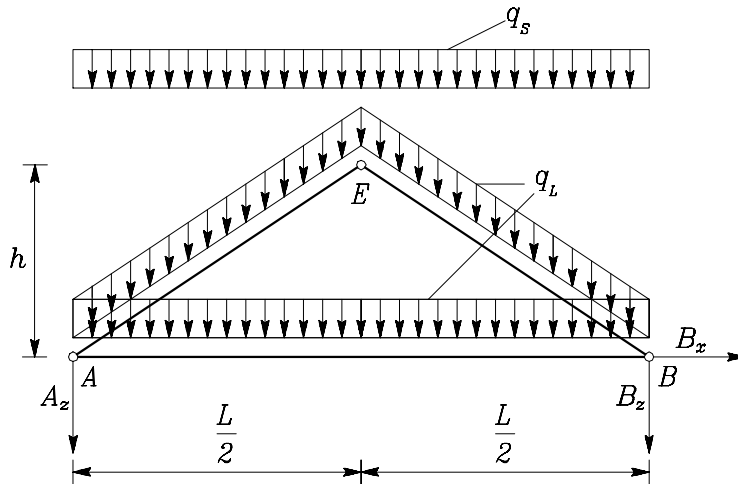
**Postopek reševanja:**

Reakcije izračunamo iz treh ravnotežnih enačb, ki veljajo za konstrukcijo:

$$\sum X = B_x = 0 \text{ kN}, \quad (1)$$

$$\sum Z = A_z + B_z + q_S L + q_L (2l + L) = 0 \implies A_z = -7.9817 \text{ kN}, \quad (2)$$

$$\sum M_Y^A = B_z L + q_S \frac{L^2}{2} + q_L (2l + L) \frac{L}{2} = 0 \implies B_z = -7.9817 \text{ kN}. \quad (3)$$

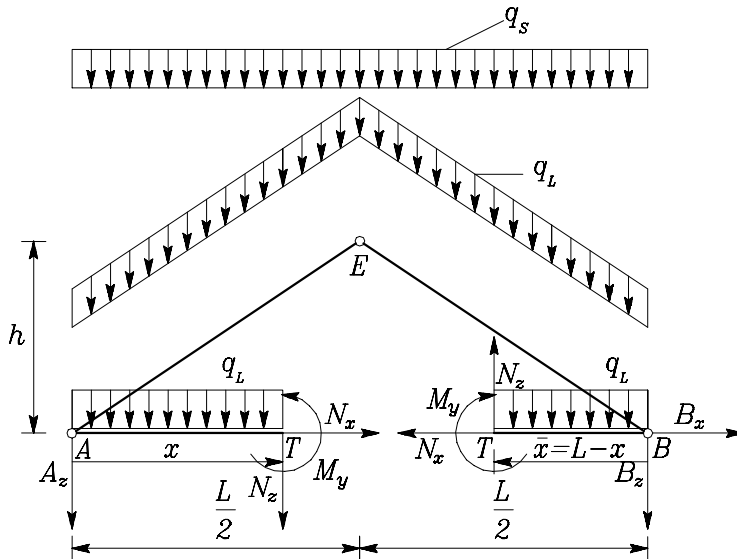


Poskusimo izračunati notranje sile brez predhodnega razreza konstrukcije. Konstrukcijo prerežimo na mestu, kjer iščemo notranje sile in vpliv odstranjenega dela nadomestimo z (notranjimi) silami, kot kaže slika. Pri tem seveda upoštevamo še zakon akcije in reakcije. Enačbe  $\sum X = 0$ ,  $\sum Z = 0$  in  $\sum M_Y^T = 0$  preidejo v enačbe za izračun reakcij, katerim smo že zadostili. Notranje sile  $N_x$ ,  $N_z$  in  $M_y$  v njih nastopajo v parih, se pokrajšajo (princip akcije in reakcije) in zato izpadejo iz enačb. Za izračun notranjih sil bo torej treba napisati druge enačbe, (neodvisne od gornjih treh). Prerezana konstrukcija sestavlja pet-členki lok (glej sliko)  $TA-A-AE-E-EB-B-BT$  s členki  $T, A, E, B, T$ . Za tega lahko napišemo še tri neodvisne enačbe, iz katerih moremo izračunati  $N_x(x)$ ,  $N_z(x)$  in  $M_y(x)$ .

$$\sum_{TA} M_Y^A = q_L \frac{x^2}{2} - M_y(x) + N_z(x) x = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{TAE} M_Y^E = q_S \frac{L^2}{8} + q_L l \frac{L}{4} + A_z \frac{L}{2} + N_z(x) \left( \frac{L}{2} - x \right) + M_y(x) + q_L x \left( \frac{L-x}{2} \right) + N_x(x) h = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{TB} M_Y^B = q_L \frac{\bar{x}^2}{2} - M_y(\bar{x}) - N_z(\bar{x}) \bar{x} = 0. \quad (6)$$



Reakcije še vedno lahko izračunamo iz treh ravnotežnih enačb, ki veljajo za konstrukcijo  $\sum X = 0$ ,  $\sum Z = 0$  in  $\sum M_Y^A = 0$  (brez predhodnega razreza konstrukcije). Vseeno pa bomo **zaradi kasnejšega izračuna notranjih sil** konstrukcijo predhodno razrezali na več podkonstrukcij (v našem primeru na tročlenski lok  $AE-E-EB$  in nosilec  $AB$ ). Reakcije  $C_x$ ,  $C_z$ ,  $D_x$  in  $D_z$  dobimo (z upoštevanjem reakcij  $A_z$ ,  $B_x$  in  $B_z$ ) iz preostalih linearno neodvisnih enačb:  
Nosilec  $AB$ :

$$\sum X = C_x + D_x = 0, \quad (7)$$

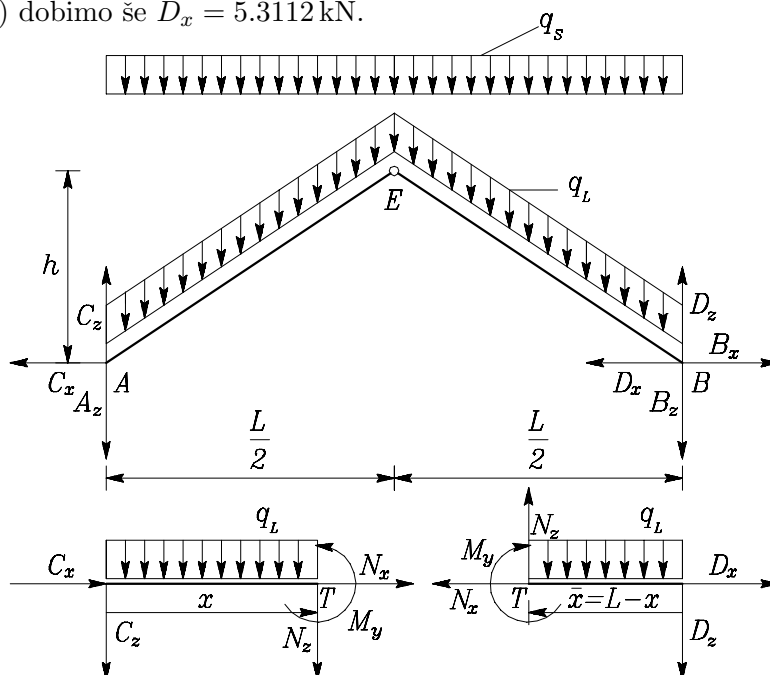
$$\sum M_Y^A = q_L \frac{L^2}{2} + D_z L = 0 \implies D_z = -0.9 \text{ kN}, \quad (8)$$

$$\sum Z = C_z + D_z + q_L L = 0 \implies C_z = -0.9 \text{ kN}. \quad (9)$$

Tročlenski lok  $AE-E-EB$ :

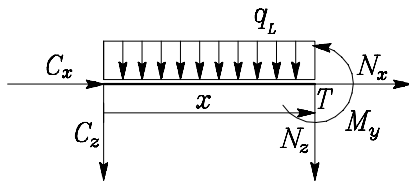
$$\sum_{AE} M_Y^E = (C_z - A_z) \frac{L}{2} + C_x h - q_L l \frac{L}{4} - q_s \frac{L^2}{8} = 0 \implies C_x = -5.3112 \text{ kN}. \quad (10)$$

Iz enačbe (7) dobimo še  $D_x = 5.3112 \text{ kN}$ .



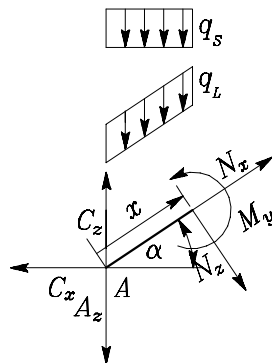


Notranje sile:



Notranje sile v polju  $AB$  (z leve strani):

$$\begin{aligned} \sum X &= C_x + N_x(x) = 0 \\ &\Rightarrow N_x(x) = 5.3112, \\ \sum Z &= C_z + q_L x + N_z(x) = 0 \\ &\Rightarrow N_z(x) = -0.3000 x + 0.9000 \\ \sum M_Y^T &= C_z x + q_L \frac{x^2}{2} + N_z(x) x + M_y(x) = 0 \\ &\Rightarrow M_y(x) = -0.1500 x^2 + 0.9000 x. \end{aligned}$$

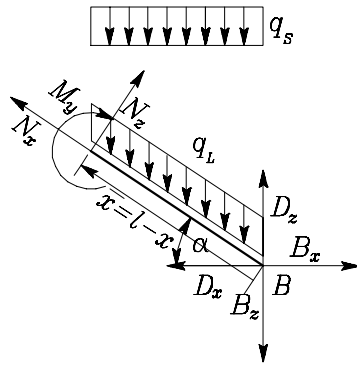


Notranje sile v polju  $AE$  (z leve strani):

$$\begin{aligned} \sum X &= N_x(x) - C_x \cos(\alpha) - (A_z - C_z) \sin(\alpha) - q_S x \cos(\alpha) \sin(\alpha) - q_L x \sin(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow N_x(x) = 1.0895 x - 8.3474, \\ \sum Z &= N_z(x) - C_x \sin(\alpha) + (A_z - C_z) \cos(\alpha) + q_S x \cos^2(\alpha) + q_L x \cos(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow N_z(x) = -1.6342 x + 2.9462, \\ \sum M_Y^T &= M_y(x) - C_x x \sin(\alpha) + (A_z - C_z) x \cos(\alpha) + q_S \frac{x^2}{2} \cos^2(\alpha) + q_L \frac{x^2}{2} \cos(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow M_y(x) = -0.8171 x^2 + 2.9462 x. \end{aligned}$$

Vrednost upogibnega momenta  $M_y(x)$  lahko določimo tudi z integracijo enačbe

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = N_z(x) \Rightarrow M_y(x) = M_y(0) + \int_0^x N_z(u) du = 0 + \int_0^x N_z(u) du.$$



Notranje sile v polju  $EB$  (z desne strani):

$$\begin{aligned} \sum X &= N_x(\bar{x}) - (B_x - D_x) \cos(\alpha) - (B_z - D_z) \sin(\alpha) - q_s \bar{x} \cos(\alpha) \sin(\alpha) - q_L \bar{x} \sin(\alpha) = 0 \\ \implies N_x(\bar{x}) &= 1.0895 \bar{x} - 8.3474, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Z &= N_z(\bar{x}) - (B_x - D_x) \sin(\alpha) + (B_z - D_z) \cos(\alpha) + q_s \bar{x} \cos^2(\alpha) + q_L \bar{x} \cos(\alpha) = 0 \\ \implies N_z(\bar{x}) &= 1.6342 \bar{x} - 2.9462, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_Y^T &= M_y(\bar{x}) - (B_x - D_x) \bar{x} \sin(\alpha) + (B_z - D_z) \bar{x} \cos(\alpha) - q_s \frac{\bar{x}^2}{2} \cos^2(\alpha) - q_L \frac{\bar{x}^2}{2} \cos(\alpha) = 0 \\ \implies M_y(\bar{x}) &= -0.8171 \bar{x}^2 + 2.9462 \bar{x}. \end{aligned}$$

Vrednost upogibnega momenta  $M_y(\bar{x})$  lahko določimo tudi z integracijo enačbe

$$\frac{dM_y(\bar{x})}{d\bar{x}} = -N_z(\bar{x}) \implies M_y(\bar{x}) = M_y(0) - \int_0^{\bar{x}} N_z(u) du = 0 - \int_0^{\bar{x}} N_z(u) du.$$

### Reševanje naloge z MATLAB-om (brez uporabe paketa za simbolično računanje):

Izračun nekaterih pomožnih količin in reakcij:

```
qs = 2; ql = 0.3; L = 6; h = 2; % testni podatki
alpha = atan(2*h/L); ca = cos(alpha); sa = sin(alpha);
l = sqrt((L/2)^2 + h^2);
Bx = 0;
Az = -ql * l - (ql+qs) * L/2;
Bz = Az;
Dz = -ql*L/2;
Cz = Dz;
Dx = 1/h*((Dz-Bz)*L/2 + Bx*h - qs * (L/2)^2/2 - ql * l * L/4);
Cx = - Dx;
```

Izračun notranjih sil:

Polinome opišemo z vektorjem koeficientov polinoma. Npr.

$p = [a \ b \ c \ d \ e]$ ;  $= p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ .

$$NAB = [0 \ 0 \ -Cx],$$

$$N_x^{AB}(x) = -C_x$$

$$QAB = [0 \ -ql \ -Cz],$$

$$N_z^{AB}(x) = -q_L x - C_z$$

$$MAB = [-ql/2 \ -Cz \ 0],$$

$$M_y^{AB}(x) = -q_L \frac{x^2}{2} - C_z x$$

$$NAE = [0 \ q_s * ca * sa + ql * sa \ Cx * ca + (Az - Cz) * sa],$$

$$N_x^{AE}(x) = (q_s \cos \alpha \sin \alpha + q_L \sin \alpha) x + C_x \cos \alpha + (A_z - C_z) \sin \alpha$$

$$QAE = [0 \ -q_s * ca^2 - ql * ca \ Cx * sa - (Az - Cz) * ca],$$

```

MAE = [-qs*ca^2/2-ql*ca/2 Cx*sa-(Az-Cz)*ca 0],
NBE = [0 qs*ca*sa+ql*sa (Bx-Dx)*ca+(Bz-Dz)*sa],
QBE = [0 qs*ca^2+ql*ca -(Bx-Dx)*sa+(Bz-Dz)*ca],
MBE = [-qs*ca^2/2-ql*ca/2 +(Bx-Dx)*sa-(Bz-Dz)*ca 0],

```

Z uporabo funkcije polyint

```

function ip = polyint(p,a,b)
% CALL ip = polyint(p,a,b)
% POMEN Funkcija polyint izracuna nedoloceni integral polinoma p
%      (aditivna konstanta = 0), ce a in b nista podana, sicer
%      funkcija polyint izracuna doloceni integral polinoma p na intervalu [a b].
%      Funkcija ne preveri, ce je prvi vhodni podatek res polinom.
n = length(p);
ip = [[1./[n:-1:1]].*p 0];
if nargin == 3
    ip = polyval(ip,b)-polyval(ip,a);
end
end
moremo upogibne momente dobiti preprosto z integracijo prečnih sil
MAB = polyint(QAB); MAE = polyint(QAE); MBE = -polyint(QBE);

```

Z ukazi

```

x = 0:0.01:L; mx = polyval(MAE,x); nz = polyval(QAE,x); my = polyval(MAE,x);
hold on;
plot([0 L],[0 0], 'b'); plot(x,nx, 'g'); plot(x,nz, 'y'); plot(x,my, 'r');
hold off;
na tekočo sliko narišemo diagrame notranjih sil na nosilcu AB.

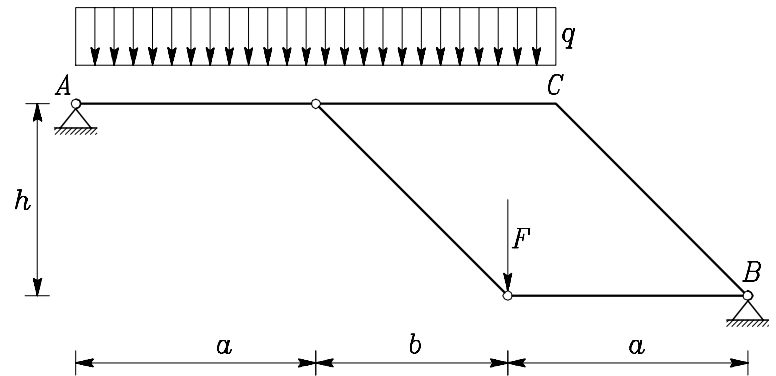
```

## 3.4 PI 30.06.97/2

Ravninski okvir na sliki je (na delu  $AC$ ) obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q$  na tekoči meter tlorisa (obtežba z snegom) in z vertikalno silo  $F$ , kot prikazuje slika.

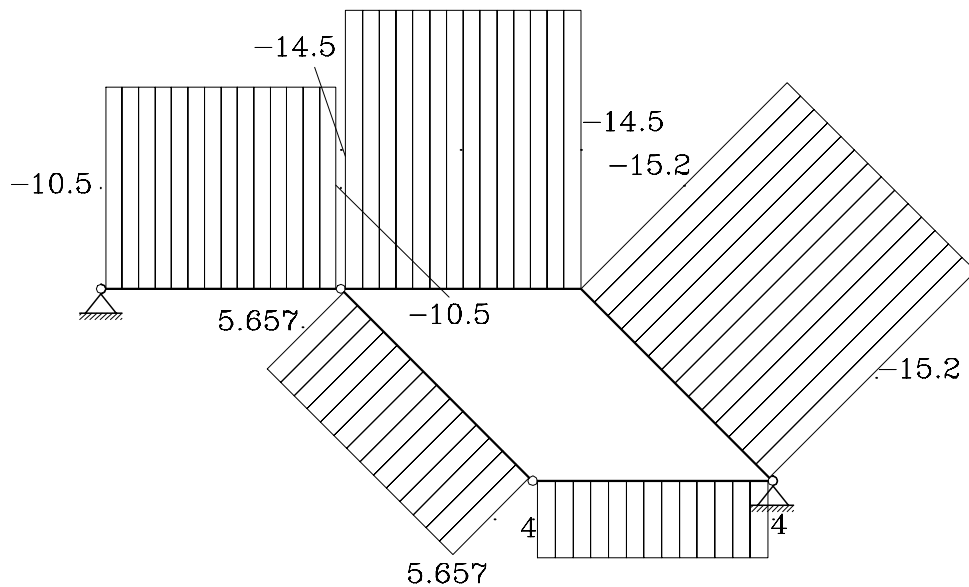
1. Določi število prostostnih stopenj  $n_{ps}$ .
2. Izračunaj reakcije, notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $q = 0.8 \text{ kN/m}$ ,  $F = 4 \text{ kN}$ ,  
 $a = 2.5 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ .

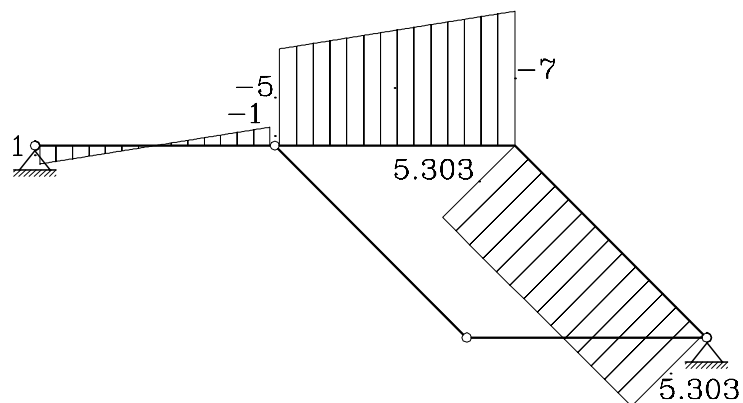
**Rešitev:**

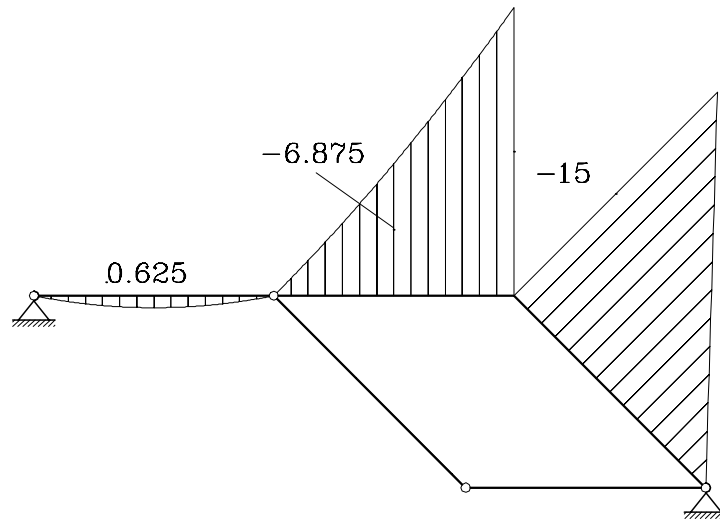
Reakcije:  $A_x = 10.5 \text{ kN}$ ,  $A_z = -1 \text{ kN}$ ,  $B_x = -10.5 \text{ kN}$ ,  $B_z = -7 \text{ kN}$ .

$[N_x(\text{kN})]$



$[N_z(\text{kN})]$



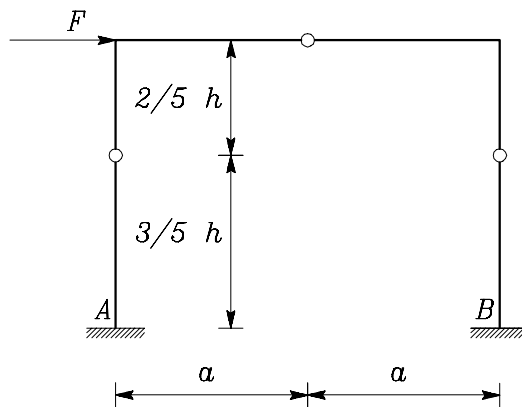
$[M_y \text{ (kNm)}]$ 

## 3.5 PI 15.12.97/2

Ravninski okvir na sliki je obtežen s horizontalno silo  $F$ , kot prikazuje slika.

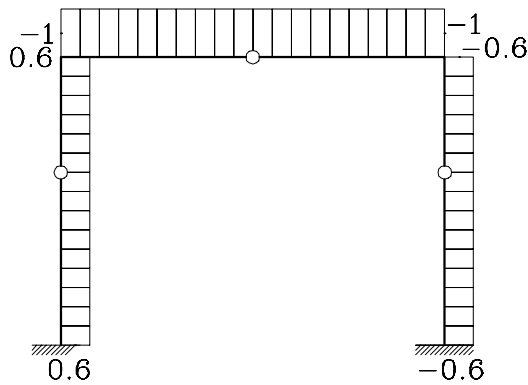
1. Določi število prostostnih stopenj  $n_{ps}$ .
2. Izračunaj reakcije, notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $F = 2 \text{ kN}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ .

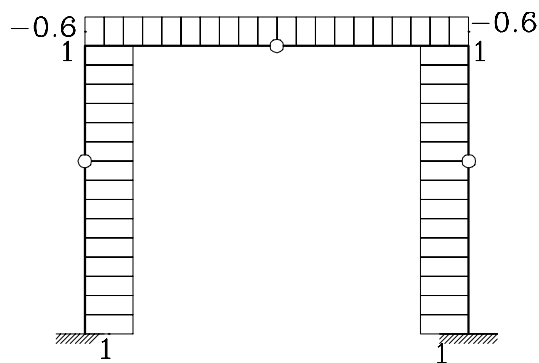
**Rešitev:**

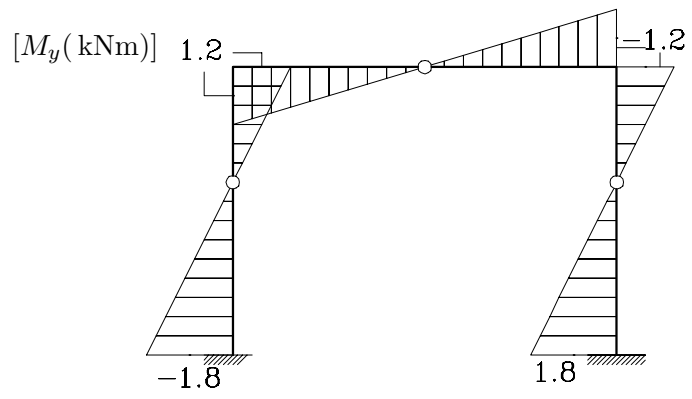
Reakcije:  $A_x = -1 \text{ kN}$ ,  $A_z = 0.6 \text{ kN}$ ,  $M^A = 1.8 \text{ kNm}$ ,  $B_x = -1 \text{ kN}$ ,  $B_z = -0.6 \text{ kN}$ ,  $M^B = 1.8 \text{ kNm}$ .

$[N_x(\text{kN})]$



$[N_z(\text{kN})]$



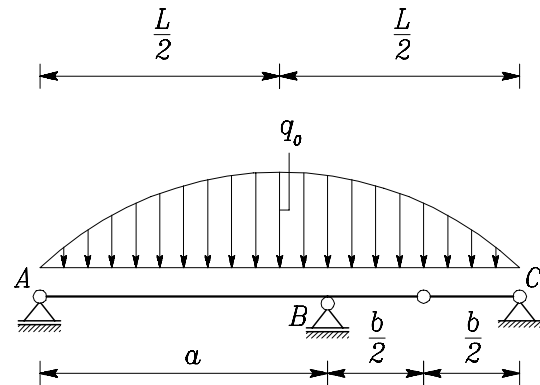


## 3.6 PI 15.12.97/3

Gerberjev nosilec na sliki je obtežen z zvezno simetrično obtežbo oblike kvadratne parabole.

1. Določi število prostostnih stopenj  $n_{ps}$ .
2. Izračunaj reakcije, notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $a = 3$  m,  $b = 2$  m,  $q_0 = 3$  kN/m.

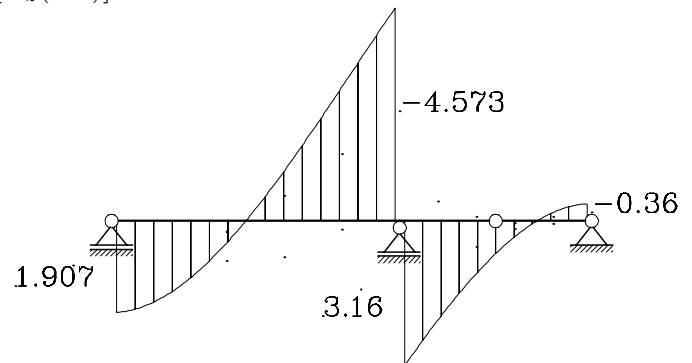
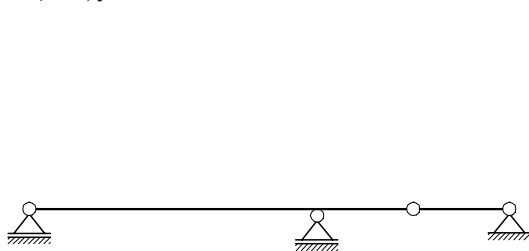


**Rešitev:**

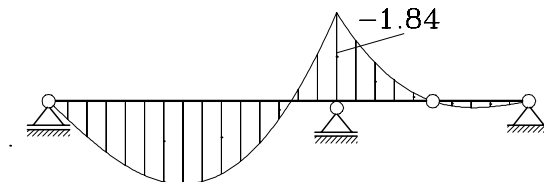
Reakcije:  $C_x = 0$  kN,  $A_z = -1.9067$  kN,  $B_z = -7.7333$  kN,  $C_z = -0.36$  kN.

$[N_x(\text{kN})]$

$[N_z(\text{kN})]$



$[M_y(\text{kNm})]$





**Postopek reševanja:**

- Zapis obtežbe  $q$  s kvadratno parabolno koordinato  $x$ :

$$q(x) = ax^2 + bx + c.$$

V nastavku (3.6) upoštevamo podane vrednosti  $q(0) = 0$ ,  $q(L/2) = q_0$  in  $q(L) = 0$  in iz sistema enačb

$$\begin{aligned} q(0) &= a0^2 + b0 + c = 0 \\ q(L/2) &= a(L/2)^2 + bL/2 + c = q_0 \quad (11) \\ q(L) &= aL^2 + bL + c = 0 \end{aligned}$$

izračunamo koeficiente  $a$ ,  $b$  in  $c$ . Dobimo

$$q(x) = -0.48x^2 + 2.4x. \quad (12)$$

Reakcije  $C_x$ ,  $C_z$ ,  $B_z$  in  $A_z$  izračunamo iz ravnotežnih enačb za Gerberjev nosilec:

$$\sum X = C_x = 0 \text{ kN}, \quad (13)$$

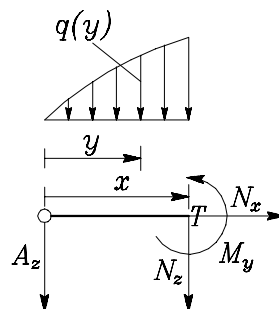
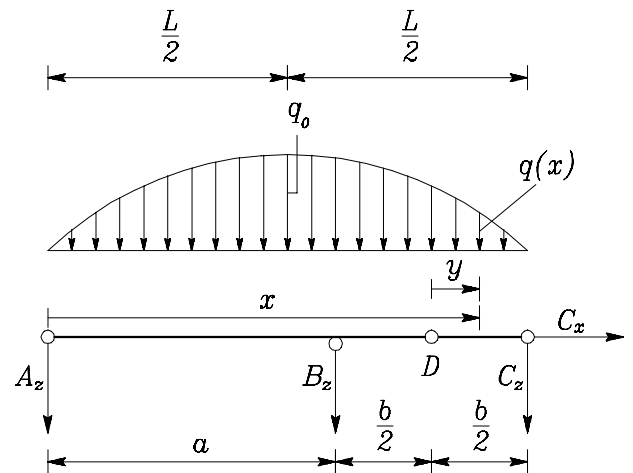
$$\begin{aligned} \sum_{DC} M_Y^D &= C_z \frac{b}{2} + \int_{a+\frac{b}{2}}^L q(x) y \, dx \\ &= C_z \frac{b}{2} + \int_{a+\frac{b}{2}}^L q(x) \left( x - a - \frac{b}{2} \right) dx \\ &= 0 \implies C_z = -0.36 \text{ kN}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sum M_Y^A = B_z a + C_z L + \frac{L}{2} \int_0^L q(x) \, dx = 0 \implies B_z = -7.7333 \text{ kN}, \quad (15)$$

$$\sum Z = A_z + B_z + C_z + \int_0^L q(x) \, dx = 0 \implies A_z = -1.9067 \text{ kN}. \quad (16)$$

- Notranje sile v polju  $AB$  dobimo neposredno iz ravnotežnih enačb za izrezani del. Druga možnost je uporaba diferencialnih enačb.

Rezultati veljajo za  $x \in (0, a)$ !



$$\sum X = N_x(x) = 0. \quad (17)$$

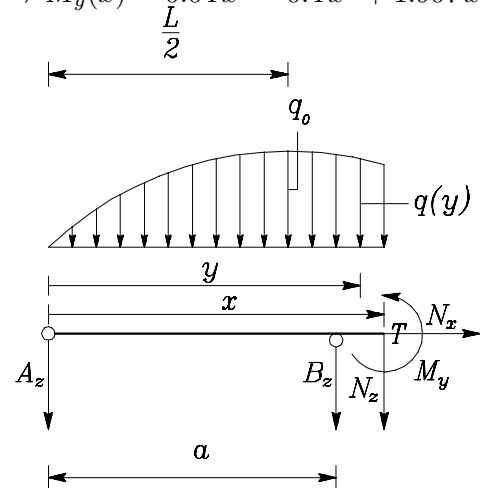
$$\sum Z = N_z(x) + A_z + \int_0^x q(y) dy = 0 \implies N_z(x) = 0.16x^3 - 1.2x^2 + 1.907. \quad (18)$$

$$\sum M_Y^T = A_z x + \int_0^x q(y)(x-y) dx = 0 \implies M_y(x) = 0.04x^4 - 0.4x^3 + 1.907x. \quad (19)$$

Drugi način z uporabo diferencialne enačbe:

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = N_z(x) \implies M_y(x) = M_y(0) + \int_0^x N_z(y) dy \implies M_y(x) = 0.04x^4 - 0.4x^3 + 1.907x. \quad (20)$$

- Notranje sile na polju  $BC$  dobimo podobno kot notranje sile v polju  $AB$ . Rezultati veljajo za  $x \in (a, b)$ !



$$\sum X = N_x(x) = 0. \quad (21)$$

$$\sum Z = N_z(x) + A_z + B_z + \int_0^x q(y) dy = 0 \implies N_z(x) = 0.16x^3 - 1.2x^2 + 9.64 \quad (22)$$

$$\sum M_Y^T = A_z x + B_z(x-a) + \int_0^x q(y)(x-y) dx = 0 \implies M_y(x) = 0.04x^4 - 0.4x^3 + 9.64x - 23.2 \quad (23)$$

**Reševanje naloge z MATLAB-om (brez uporabe paketa za simbolično računanje):**

`a = 3, b = 2, q0 = 3; % testni podatki`

Izračun nekaterih pomožnih količin in reakcij:

`L = a+b;`

`q = polyfit([0 1/2 1]*L, [0 q0 0], 2);`

Določi interpolacijski polinom 2-stopnje  $q$  kateri zadošča enačbam  $q(0) = 0$ ,  $q(L/2) = q_0$  in  $q(L) = 0$ .

`q1 = conv(q, [1 (-a-b/2)]);`

$$q_1(x) = q(x) \left(x - a - \frac{b}{2}\right).$$

`Cz = -2/b*(polyint(q1, a+b/2, L));`

$$C_z = \frac{-2}{b} \int_{a+b/2}^L q_1(x) dx.$$

`R = polyint(q, 0, L);`

$$\text{rezultanta zvezne obtežbe } R = \int_0^L q(x) dx$$

`Bz = (-R*L/2 - Cz*L)/a;`

`Az = -R-Bz-Cz;`

Izračun notranjih sil:

`NxAB = 0;`

`NxBC = 0;`

`NzAB = -[0 0 0 Az] - polyint(q);`

`NzBC = -[0 0 0 Az+Bz] - polyint(q);`

`MyAB = polyint(NzAB);`

`MyBC = polyint(NzBC);`

`MyBC = MyBC - [0 0 0 0 polyval(MyBC, L)];`

$$N_z^{AB}(x) = -A_z - \int_0^x q(y) dy$$

$$N_z^{BC}(x) = -(A_z + B_z) - \int_0^x q(y) dy$$

$$M_y^{AB}(x) = \int_0^x N_z^{AB}(y) dy$$

$$M_y^{BC}(x) = \int_0^x N_z^{BC}(y) dy + C$$

$$M_y^{BC}(L) = 0 \implies C \implies M_y^{BC}(x)$$

Z ukazi

```
xAB = 0:0.01:a; xBC = a:0.01:L;  
nxAB = polyval(NxAB,xAB); nzAB = polyval(NzAB,xAB); myAB = polyval(MyAB,xAB);  
nxBC = polyval(NxBC,xBC); nzBC = polyval(NzBC,xBC); myBC = polyval(MyBC,xBC);  
hold on;  
plot([0 L],[0 0], 'b'); plot([xAB xBC],[nxAB nxBC], 'g');  
plot([xAB xBC],[nzAB nzBC], 'y'); plot([xAB xBC],[myAB myBC], 'r');  
hold off;
```

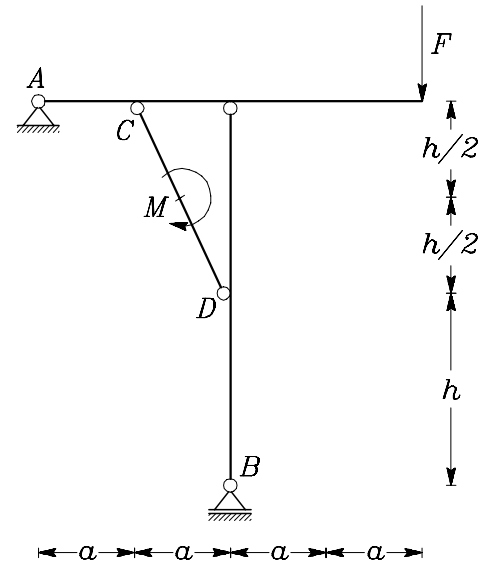
na tekočo sliko narišemo diagrame notranjih sil na konstrukciji.

## 3.7 PI 16.06.98/2

Ravninski okvir na sliki je obtežen z momentom  $M$  in s silo  $F$ .

1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$ .
2. Izračunaj reakcije, notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

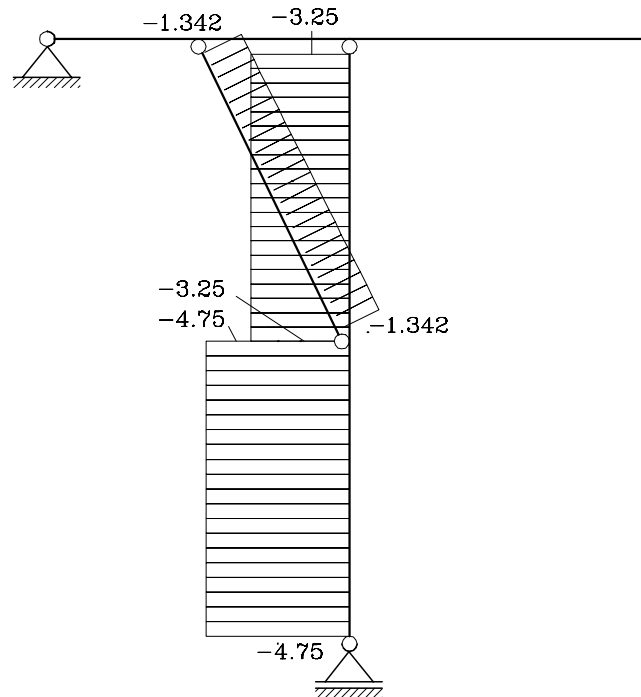
Podatki:  $M = 3 \text{ kNm}$ ,  $F = 2 \text{ kN}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ m}$ .

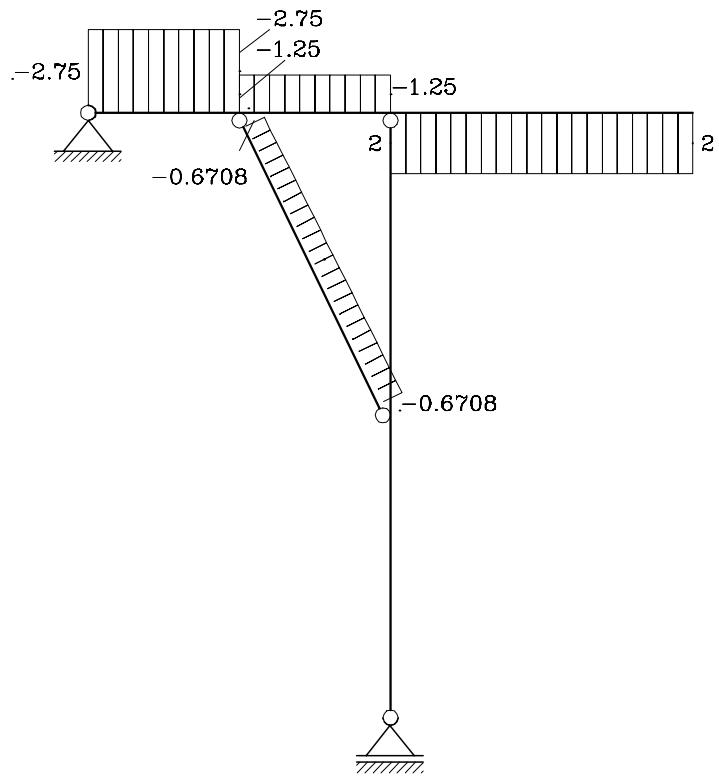
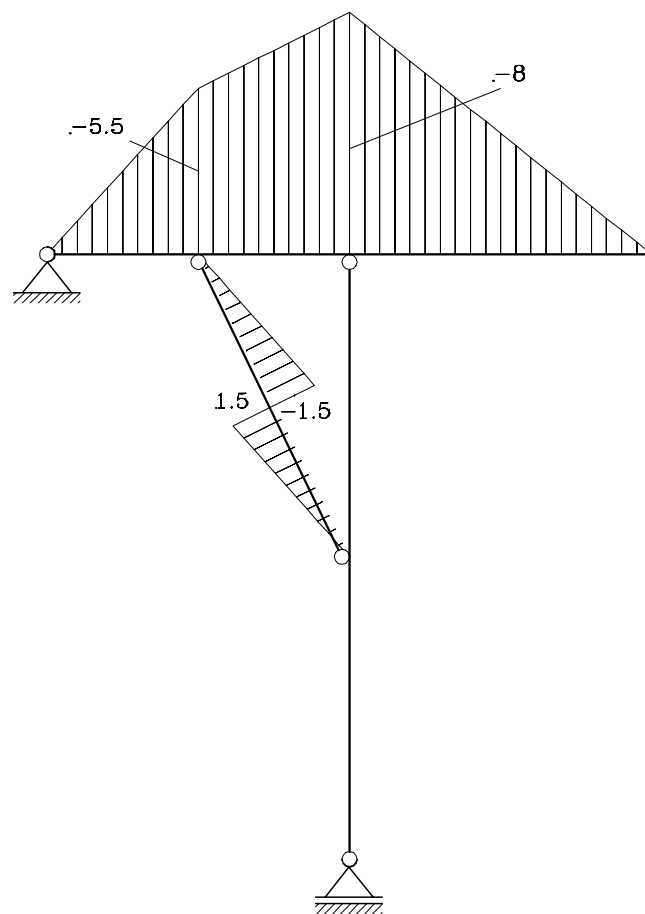
**Rešitev:**

Reakcije:

$$A_x = 0 \text{ kN}, A_z = 2.75 \text{ kN}, B_z = -4.75 \text{ kN}.$$

$[N_x(\text{kN})]$



$[N_z(\text{kN})]$  $[M_y(\text{kNm})]$ 

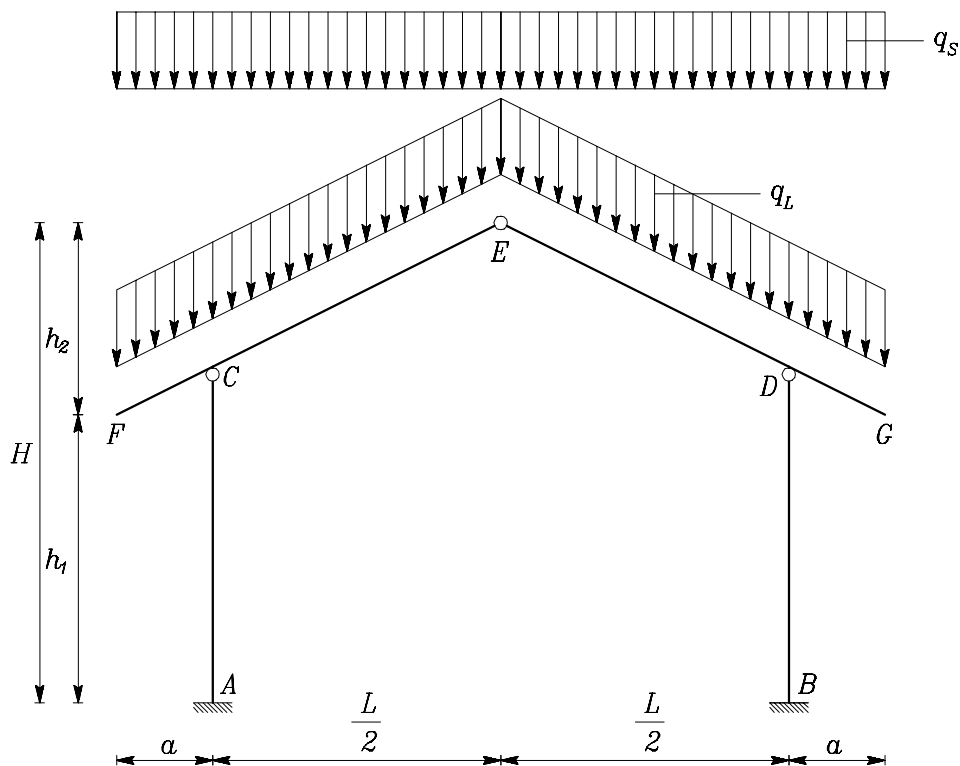
### 3.8 PI 30.06.98/2

Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q_L$  (lastno težo) na tekoči meter dolžine nosilca (kot prikazuje slika) in z enakomerno zvezno obtežbo  $q_S$  (obtežbo s snegom) na tekoči meter tlorisa.

1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.
4. Določi mesto in velikost maksimalnega upogibnega momenta v polju  $CE$ .

Namig: Upoštevaj simetrijo.

Podatki:  $q_L = 2 \text{ kN/m}$ ,  $q_S = 2 \text{ kN/m}$ ,  
 $h_1 = 2 \text{ m}$ ,  $h_2 = 2 \text{ m}$ ,  $L = 6 \text{ m}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ .

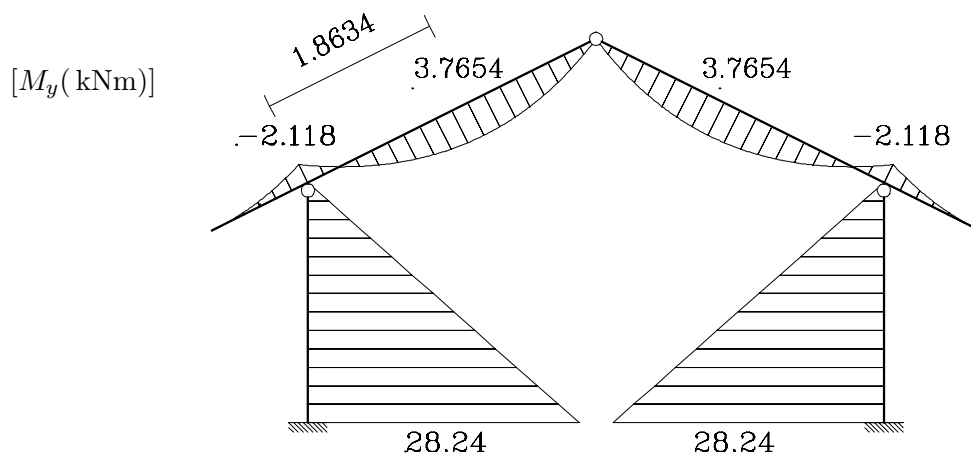
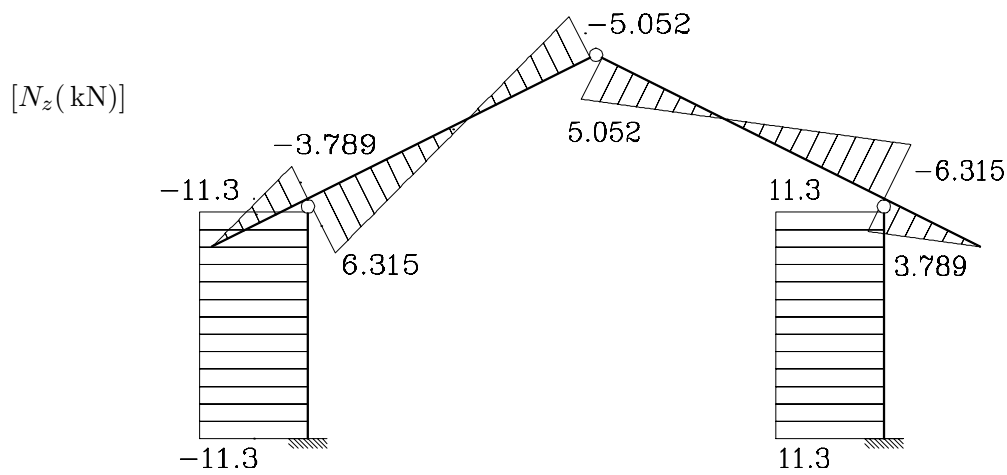
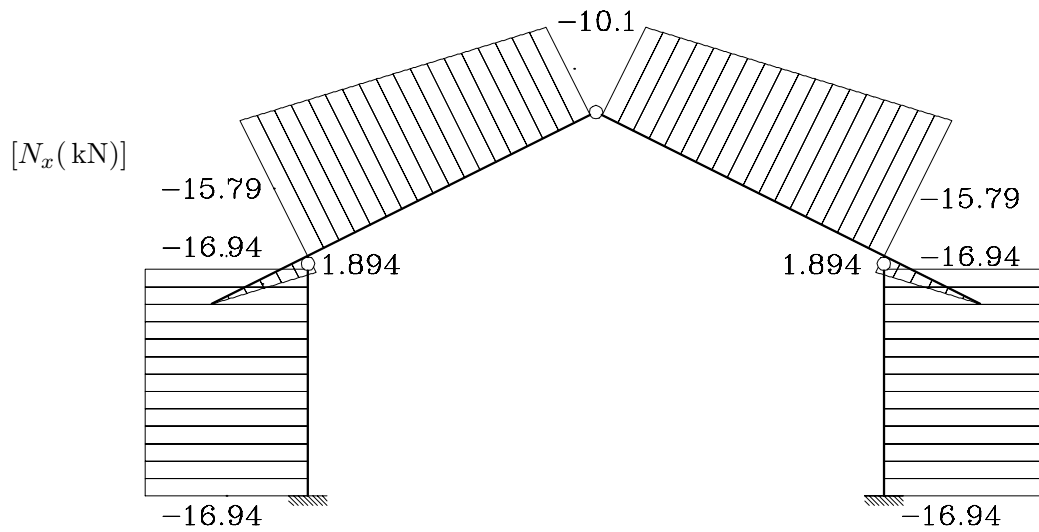


**Rešitev:**

Reakcije:

$$A_x = 11.2962 \text{ kN}, A_z = -16.9443 \text{ kN}, M^A = -28.2405 \text{ kNm},$$

$$B_x = -11.2962 \text{ kN}, B_z = -16.9443 \text{ kN}, M^B = 28.2405 \text{ kNm}.$$

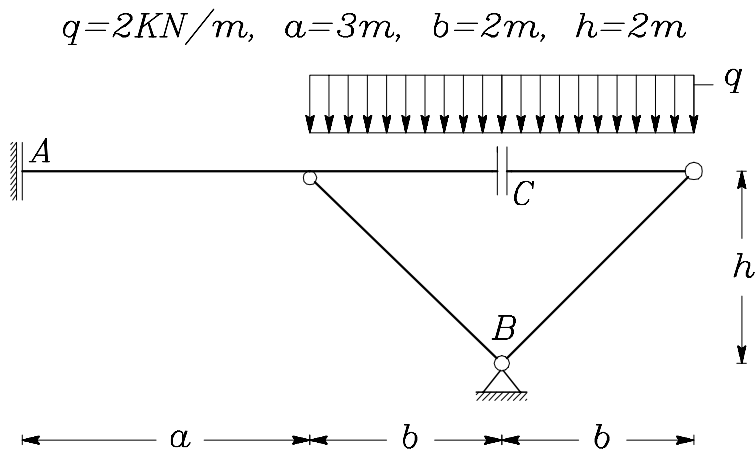


**3.9 PI 04.09.98/2a**

Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q$ . V podpori  $A$  sta preprečena zasuk in pomik v horizontalni smeri. V točki  $C$  je dovoljen medsebojni pomik v vertikalni smeri.

1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

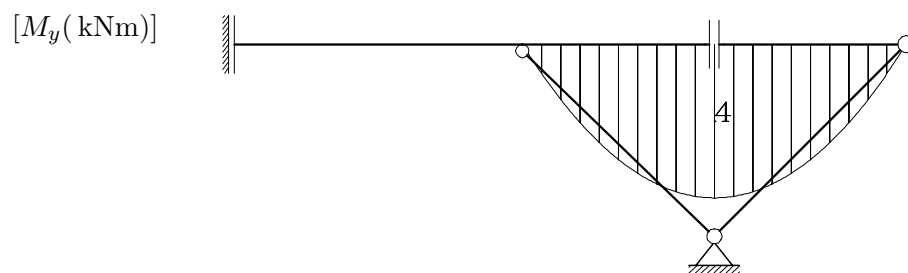
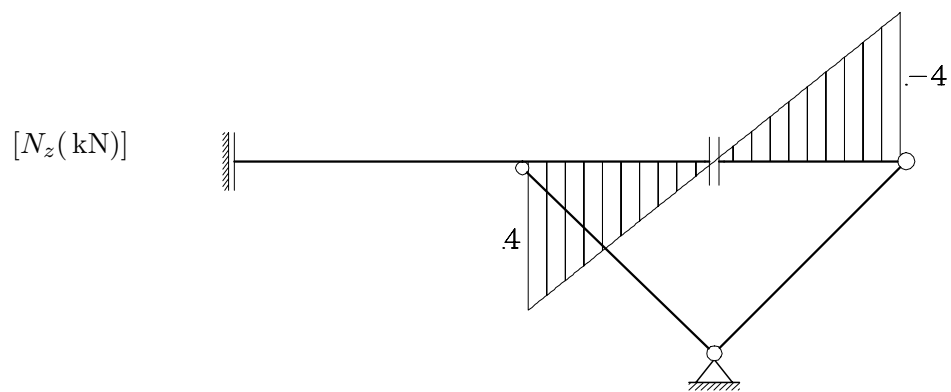
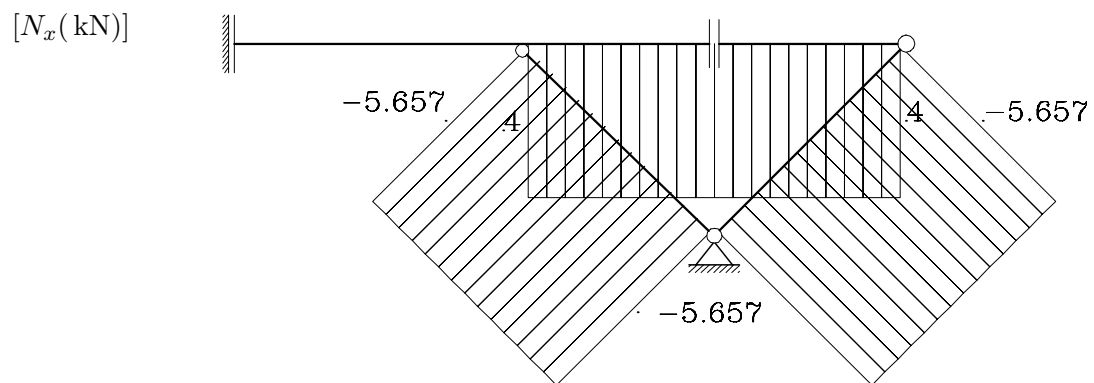
Podatki:  $q = 2 \text{ kN/m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ .





**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0 \text{ kN}$ ,  $M^A = 0 \text{ kNm}$ ,  $B_x = 0 \text{ kN}$ ,  $B_z = -8 \text{ kN}$ .

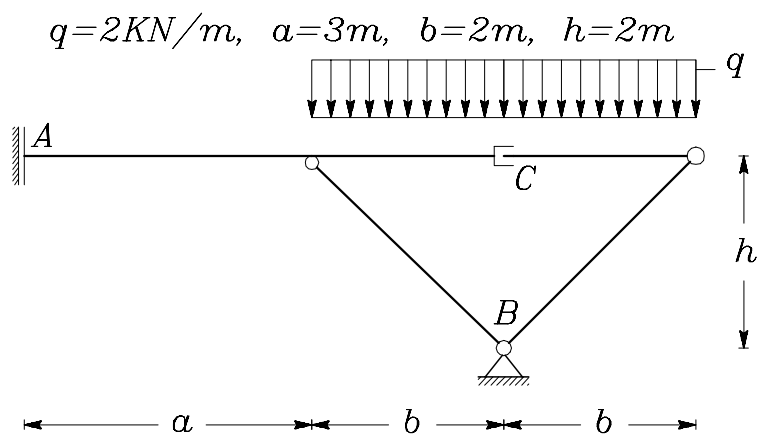


**3.10 PI 04.09.98/2b**

Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q$ . V podpori  $A$  sta preprečena zasuk in pomik v horizontalni smeri. V točki  $C$  je dovoljen medsebojni pomik v horizontalni smeri.

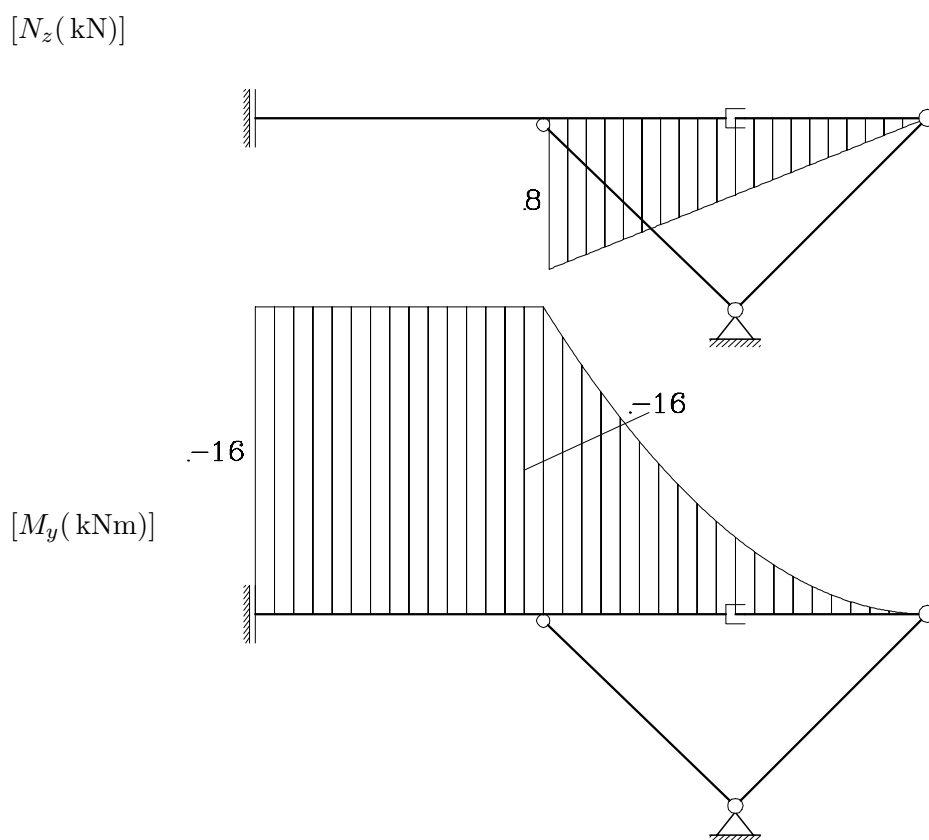
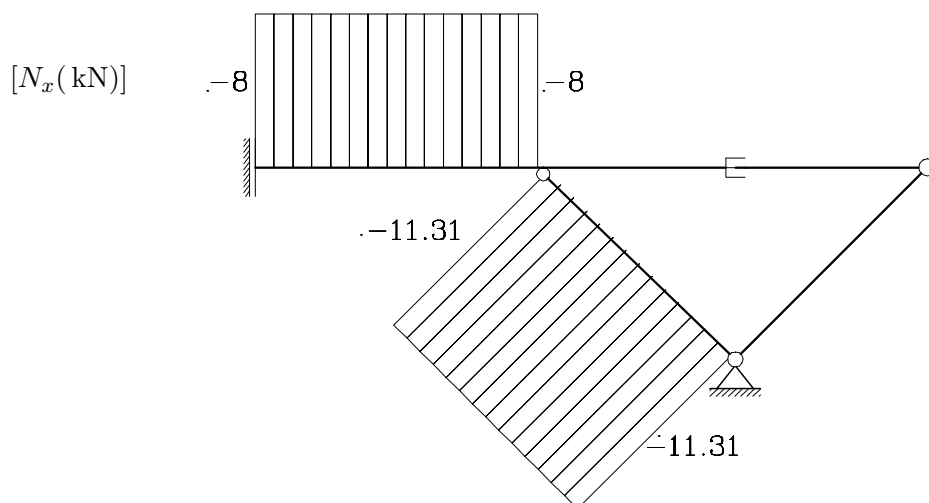
1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $q = 2 \text{ kN/m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ .



**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 8 \text{ kN}$ ,  $M^A = 16 \text{ kNm}$ ,  $B_x = -8 \text{ kN}$ ,  $B_z = -8 \text{ kN}$ .

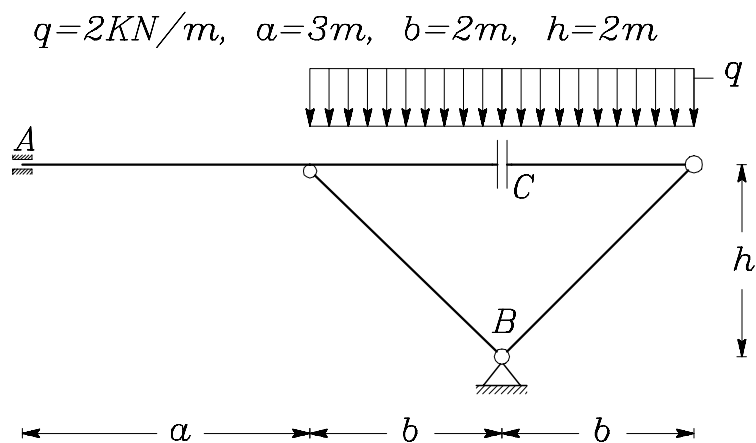


**3.11 PI 04.09.98/2c**

Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q$ . V podpori  $A$  sta preprečena zasuk in pomik v vertikalni smeri. V točki  $C$  je dovoljen medsebojni pomik v vertikalni smeri.

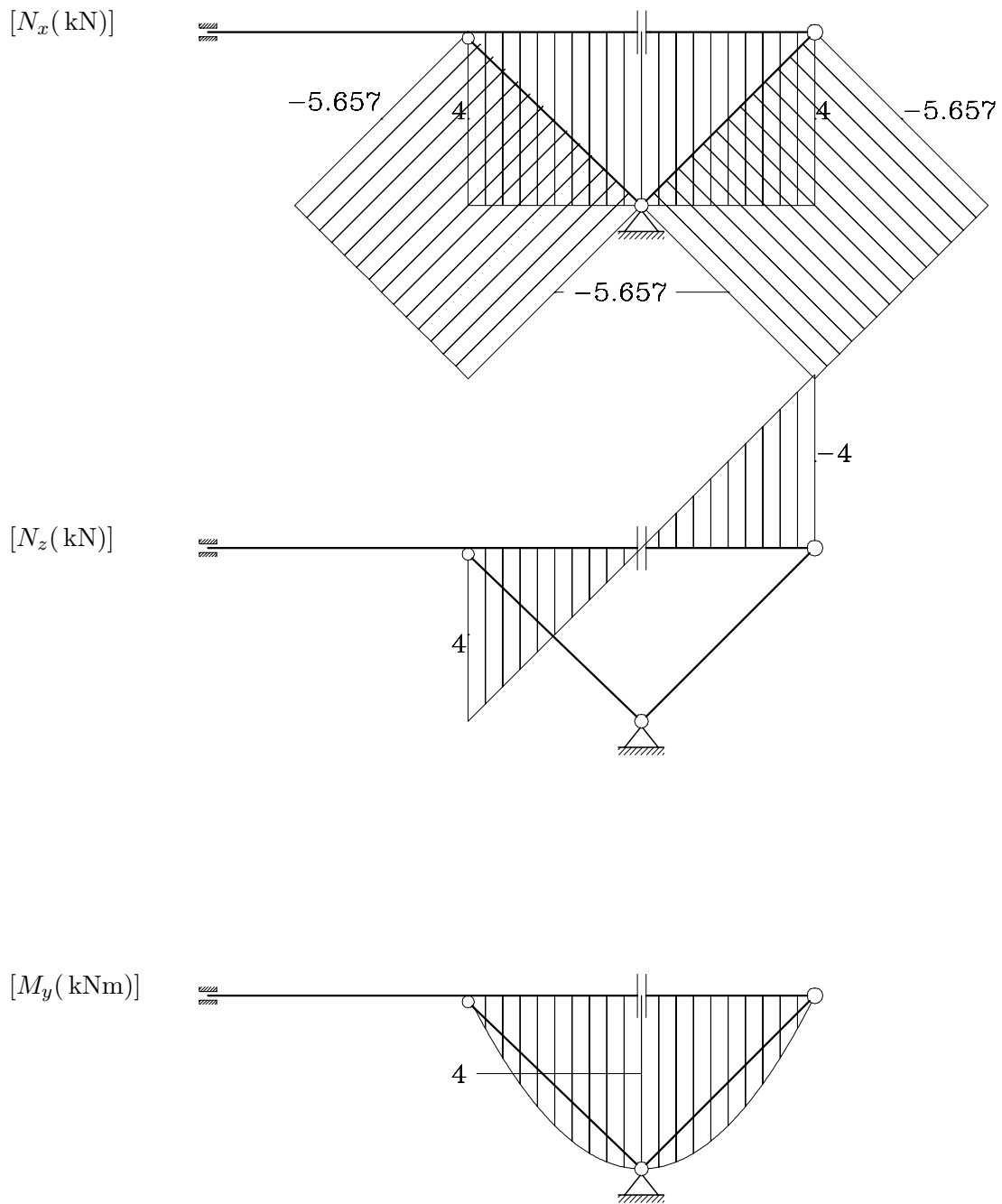
1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $q = 2 \text{ KN/m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ .



**Rešitev:**

Reakcije:  $A_z = 0 \text{ kN}$ ,  $M_A = 0 \text{ kNm}$ ,  $B_x = 0 \text{ kN}$ ,  $B_z = -8 \text{ kN}$ .

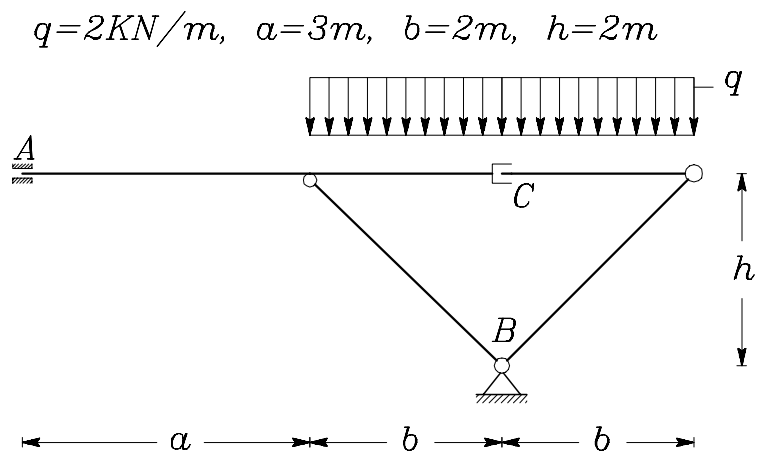


**3.12 PI 04.09.98/2d**

Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q$ . V podpori  $A$  sta preprečena zasuk in pomik v vertikalni smeri. V točki  $C$  je dovoljen medsebojni pomik v horizontalni smeri.

1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

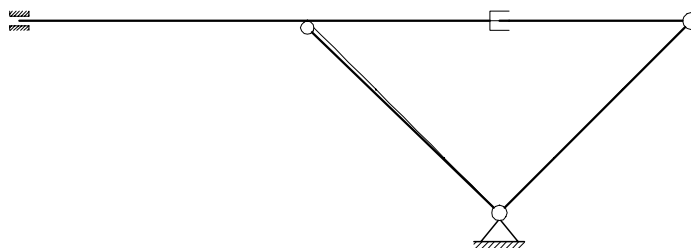
Podatki:  $q = 2 \text{ KN/m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ .



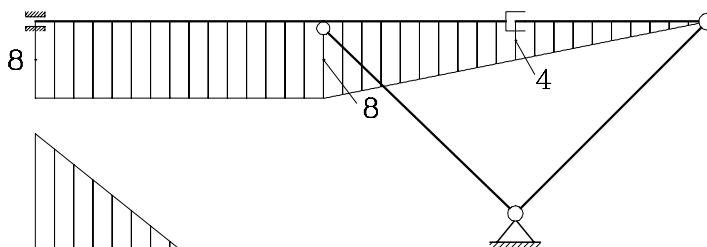
**Rešitev:**

Reakcije:  $A_z = -8 \text{ kN}$ ,  $M^A = 40 \text{ kNm}$ ,  $B_x = 0 \text{ kN}$ ,  $B_z = 0 \text{ kN}$ .

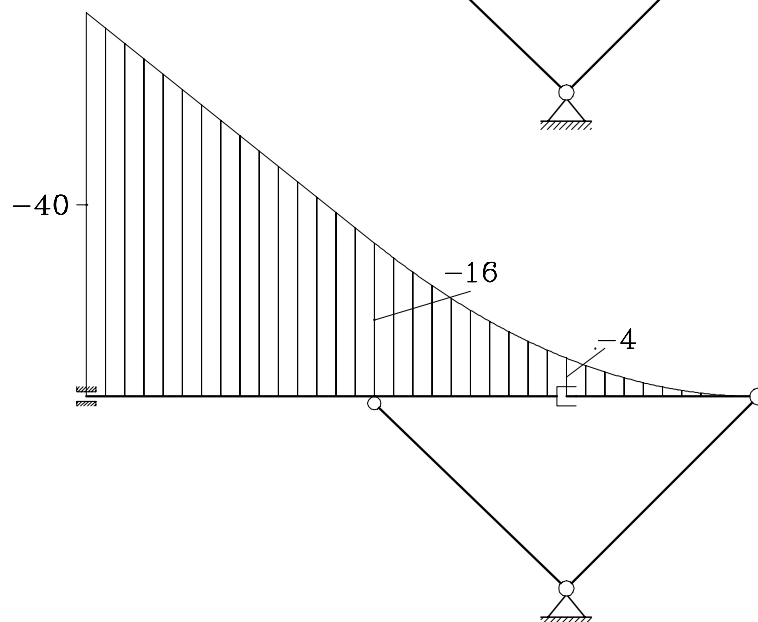
$[N_x(\text{kN})]$



$[N_z(\text{kN})]$



$[M_y(\text{kNm})]$

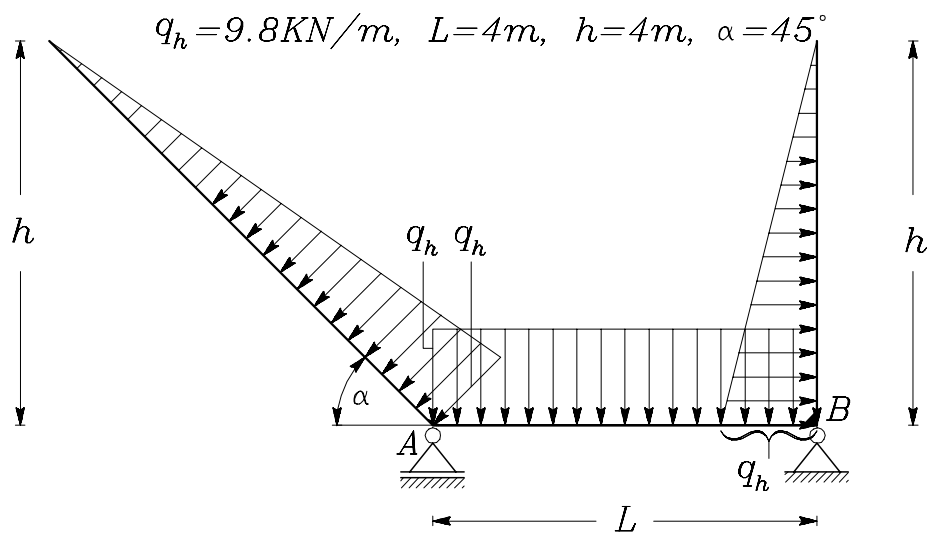


**3.13 PI 04.09.98/3**

Ravninski nosilec na sliki, sloni na dveh podporah. Obtežen je s trikotno zvezno obtežbo, ki deluje pravokotno na os nosilca in z enakomerno zvezno obtežbo  $q_h$ .

1. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
2. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

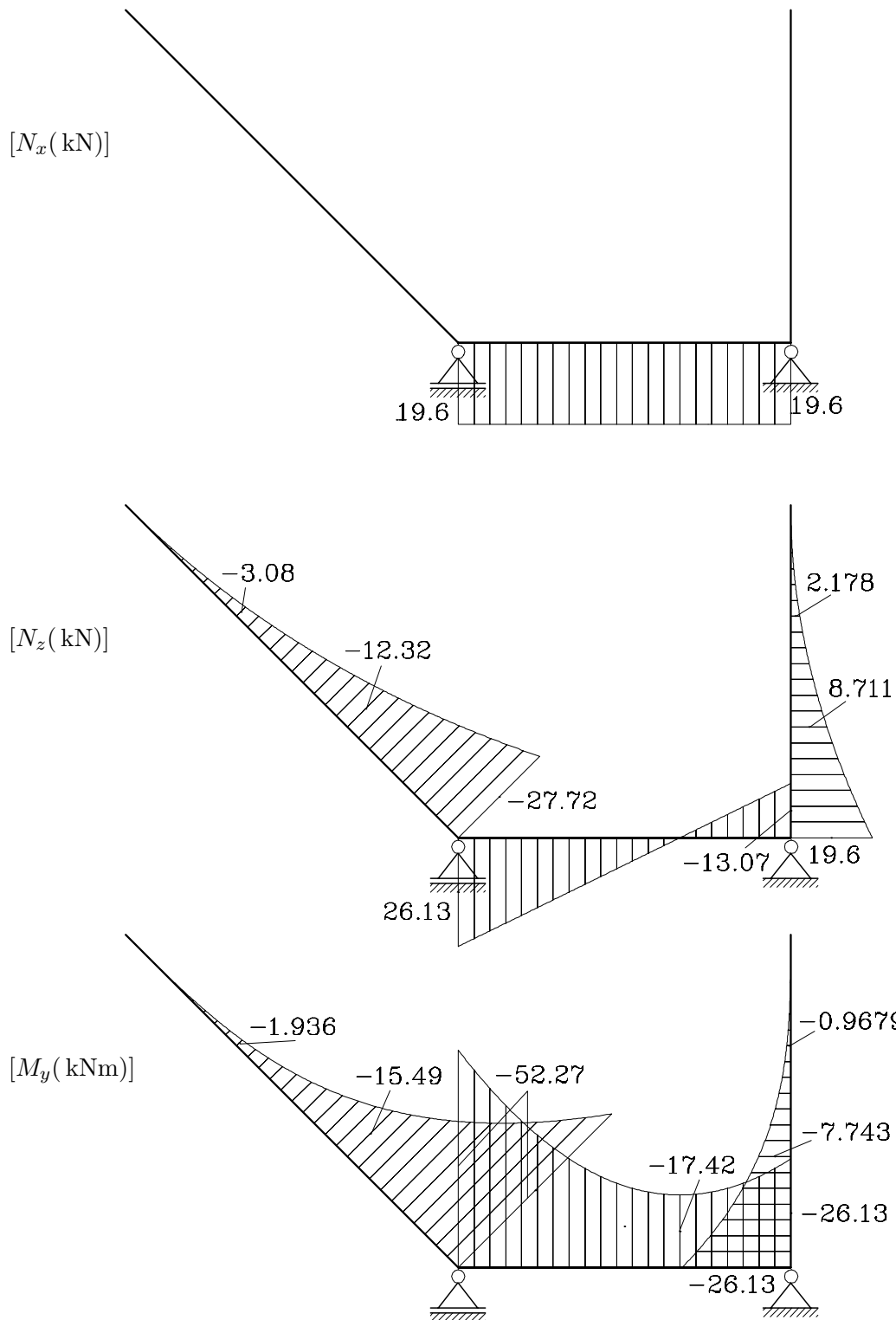
Podatki:  $L = 4\text{ m}$ ,  $h = 4\text{ m}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $q_h = 9.8\text{ KN/m}$ .





**Rešitev:**

Reakcije:  $A_z = -45.7333 \text{ kN}$ ,  $B_x = 0 \text{ kN}$ ,  $B_z = -13.0667 \text{ kN}$ .

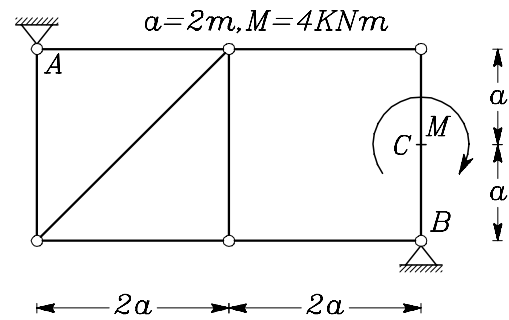


**3.14 PI 17.09.98/2b**

Ravninski okvir na sliki je v točki  $C$  obtežen z momentom  $M$ .

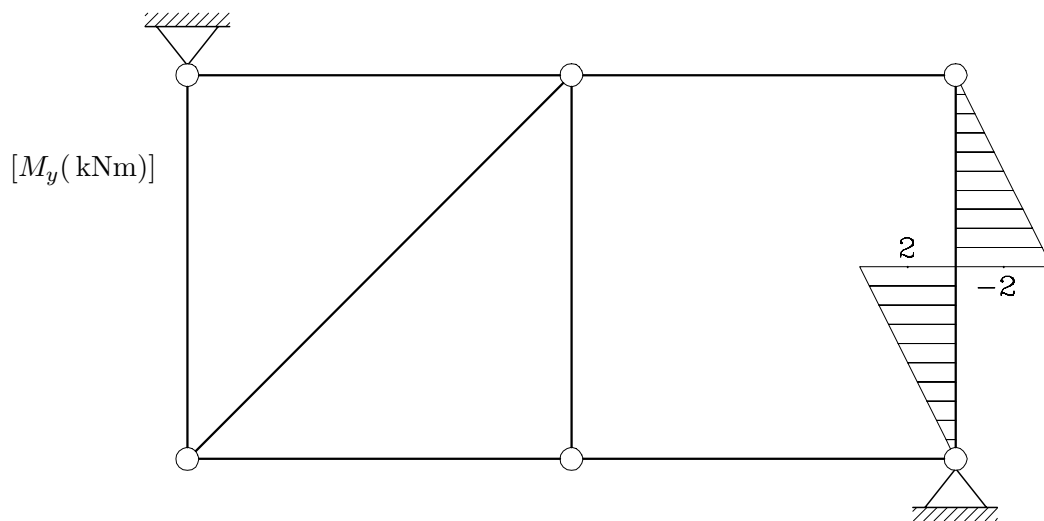
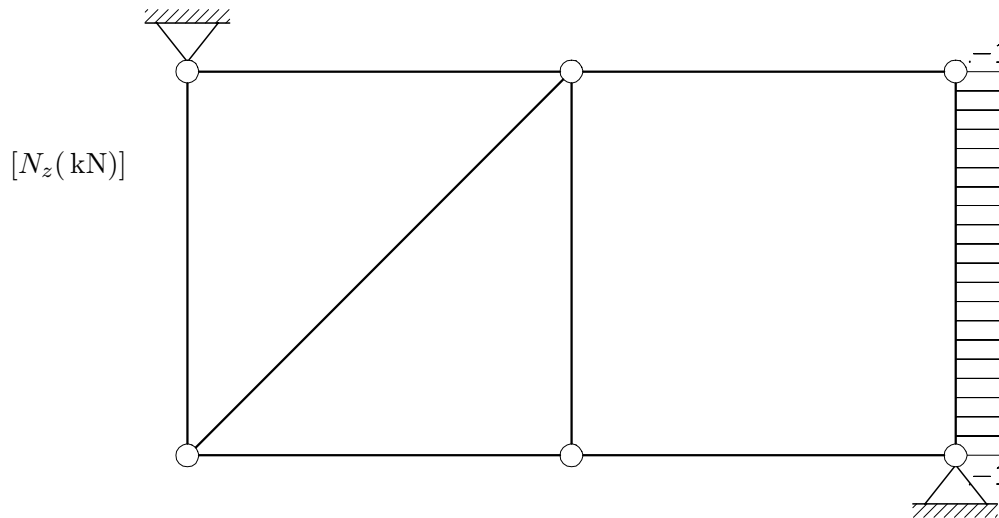
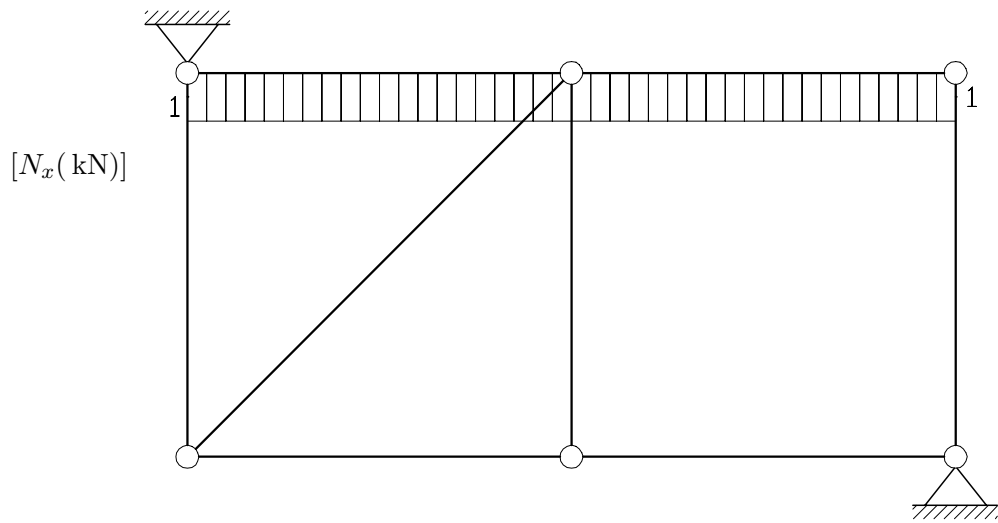
1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $a = 2\text{ m}$ ,  $M = 4\text{ KNm}$ .



**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = -1 \text{ kN}$ ,  $A_z = 0 \text{ kN}$ ,  $B_x = 1 \text{ kN}$ ,  $B_z = 0 \text{ kN}$ .

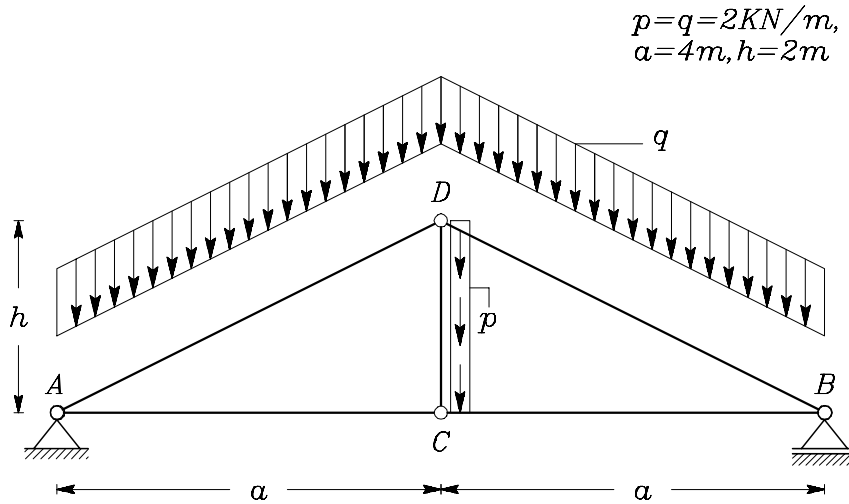


## 3.15 PI 17.09.98/3

Ravninski okvir na sliki je po elementih  $A - D$  in  $B - D$  obtežen z enakomerno obtežbo  $q$  na tekoči meter dolžine nosilca (lastna teža). Prav tako je po elementu  $C - D$  obtežen z enakomerno obtežbo  $p$ .

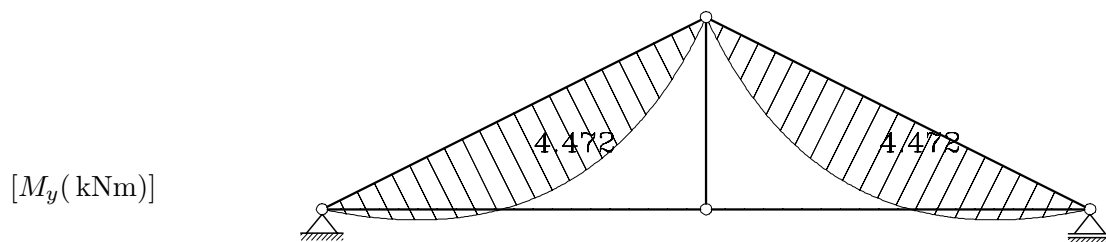
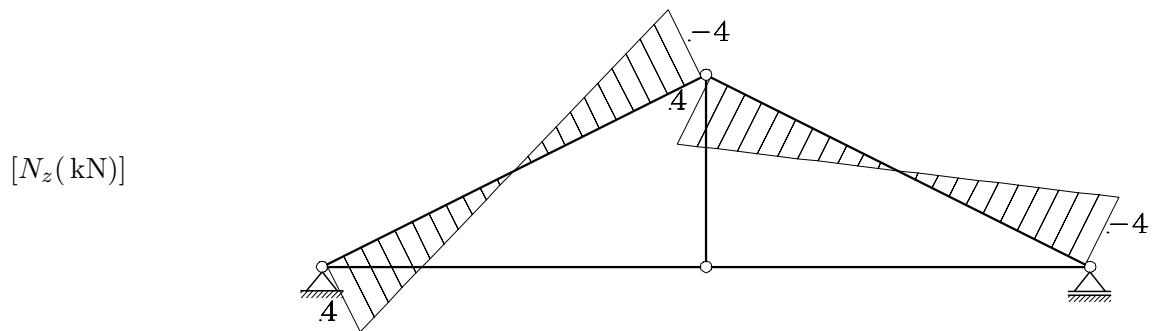
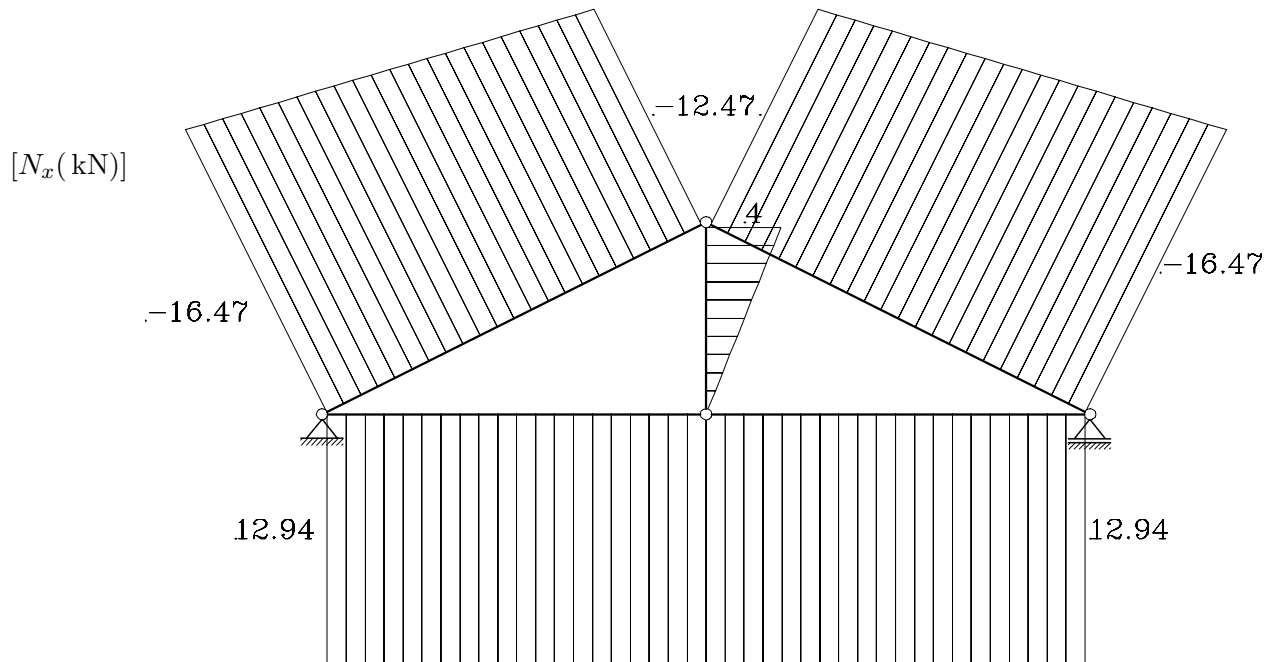
1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $q = 2 \text{ KN/m}$ ,  $p = 2 \text{ KN/m}$ ,  $a = 4 \text{ m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ .



**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0 \text{ kN}$ ,  $A_z = -10.9443 \text{ kN}$ ,  $B_z = -10.9443 \text{ kN}$ .

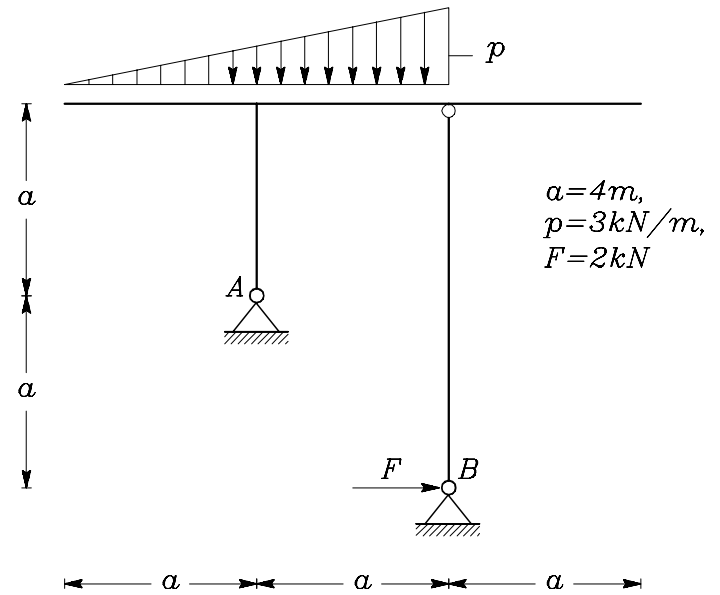


## 3.16 PI 19.11.98/3

Ravninski okvir na sliki je obtežen s trikotno zvezno obtežbo v vertikalni smeri (glej sliko).

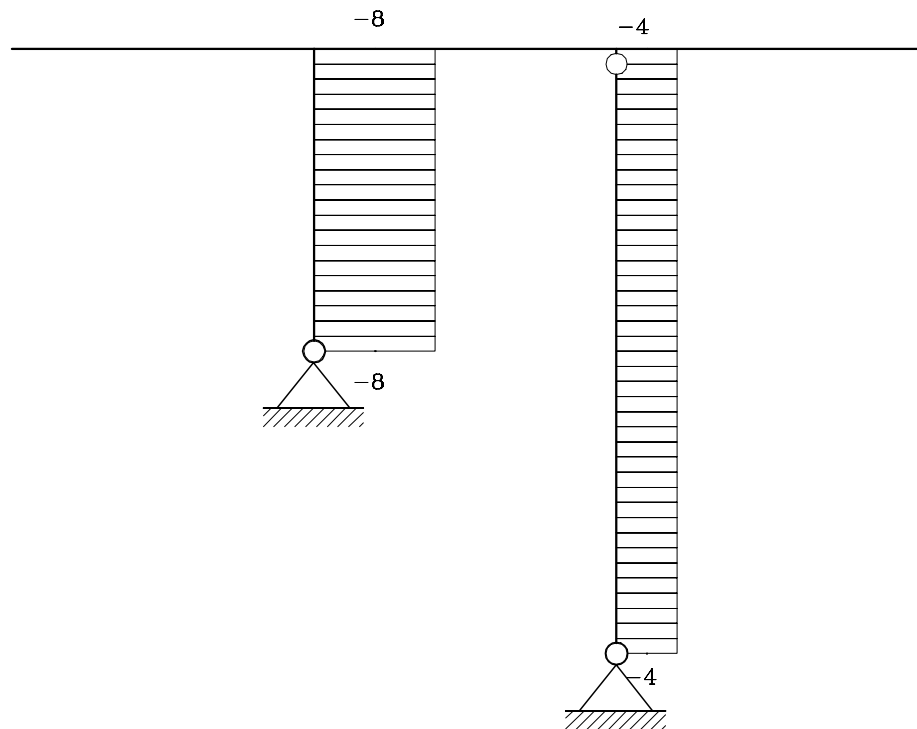
1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

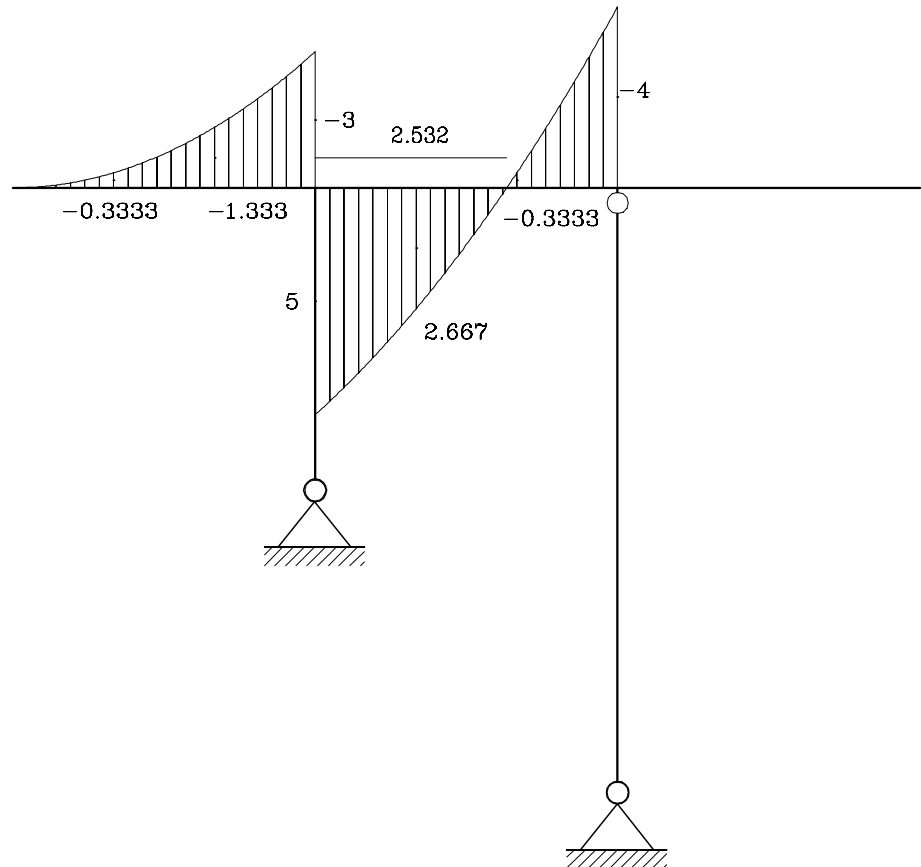
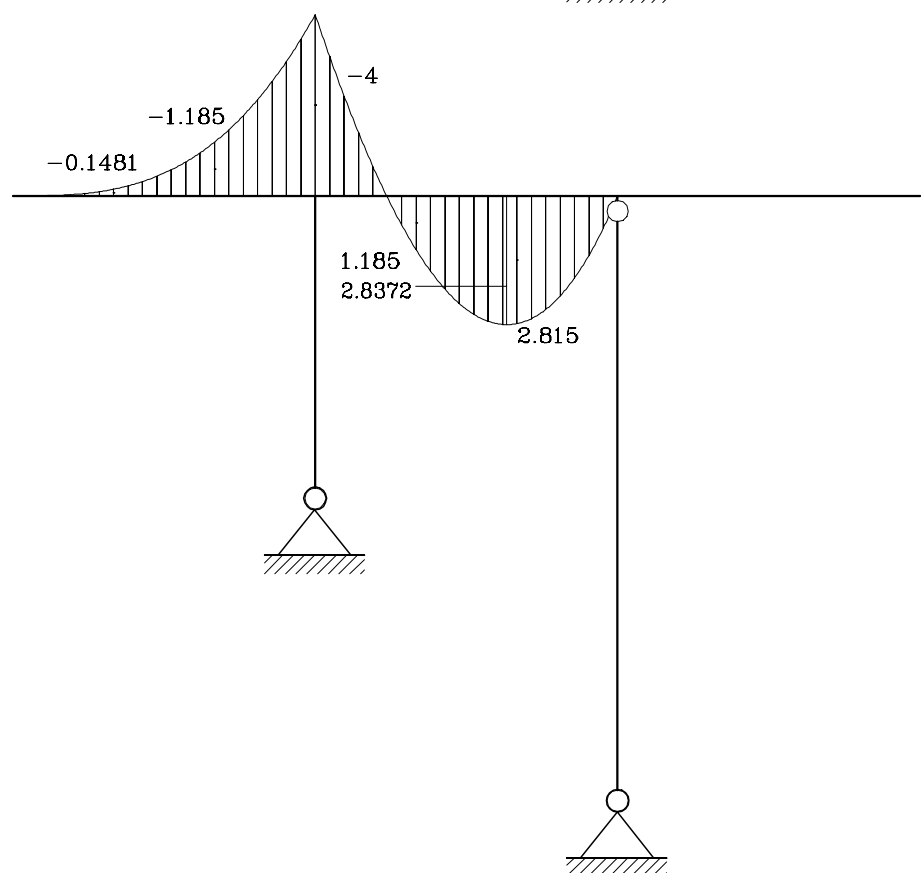
Podatki:  $a = 4\text{ m}$ ,  $p = 3\text{ kN/m}$ ,  $F = 2\text{ kN}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = -8.0000\text{ kN}$ ,  $B_x = -2.0000\text{ kN}$ ,  $B_z = -4.0000\text{ kN}$ .

$[N_x(\text{kN})]$

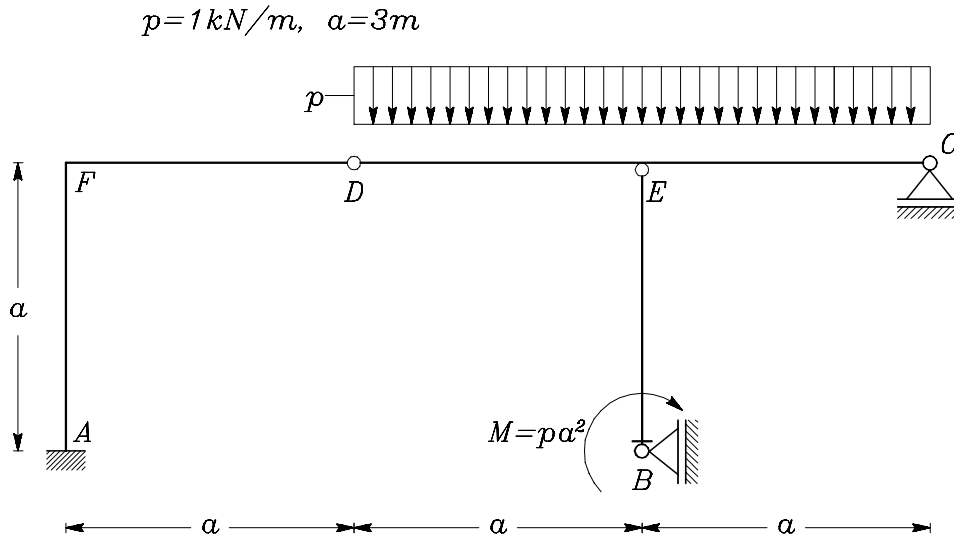


$[N_z(\text{kN})]$  $[M_y(\text{kNm})]$ 

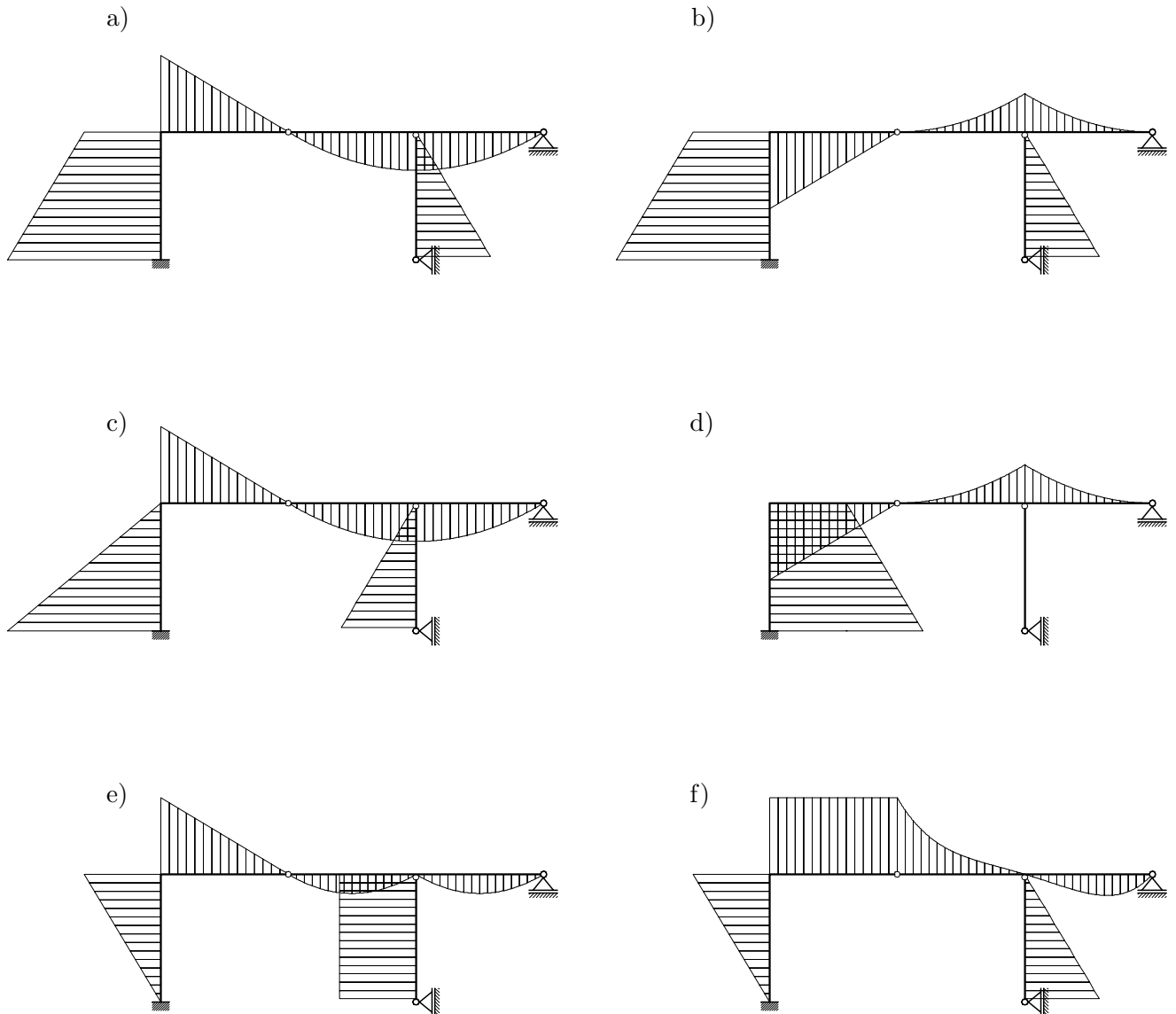
## 3.17 PI 19.11.98/4

Podana konstrukcija na sliki je obtežena z enakomerno zvezno obtežbo  $p$  in z momentom  $M$ , ki deluje poleg členka  $B$  (glej sliko). Spodaj je prikazanih 6 diagramov upogibnih momentov, od katerih je eden pravilen. Določi pravilen diagram, s tem da pri vsakem od preostalih 5 diagramov najdeš vsaj eno napako.

Podatki:  $a = 3 \text{ m}$ ,  $p = 1 \text{ kN/m}$ .





**Rešitev:**

Pravilen je lahko samo diagram **a)**. V nadaljevanju je podana ena napaka pri ostalih. Najdi sam še vse druge napake.

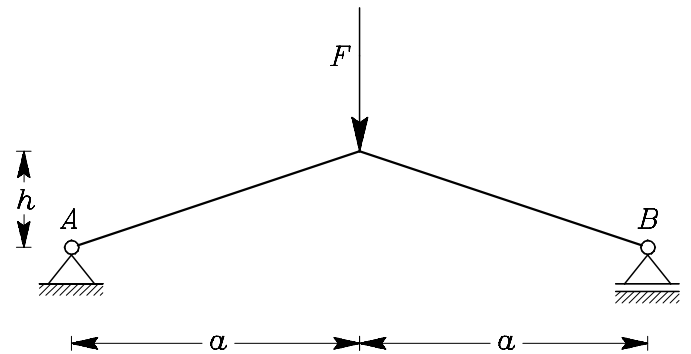
- b) Skok momenta v točki  $F$ .
- c) Skok momenta v točki  $F$ .
- d) Nezveznost odvoda momenta v točki  $D$ .
- e) Moment na koncu elementa  $BE$  v vozlišču  $E$  je različen od nič.
- f) Nezveznost odvoda momenta v točki  $D$ .

## 3.18 PI 15.12.98/1

Prostoležeč nosilec je obtežen s silo  $F$ , kot prikazuje slika.

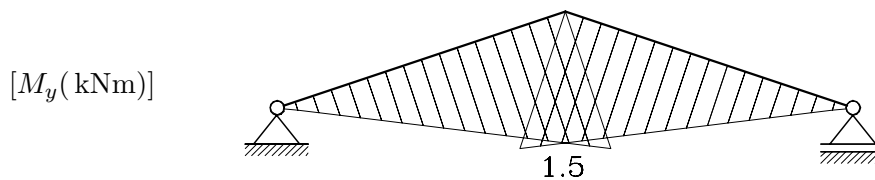
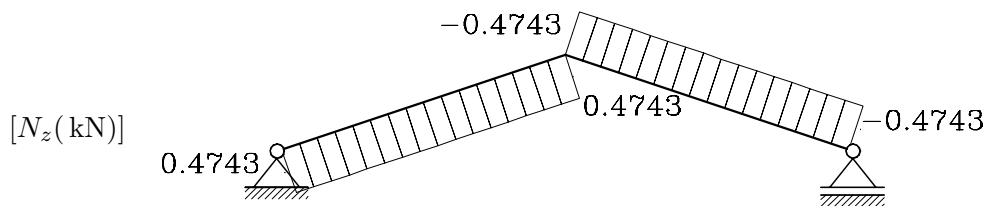
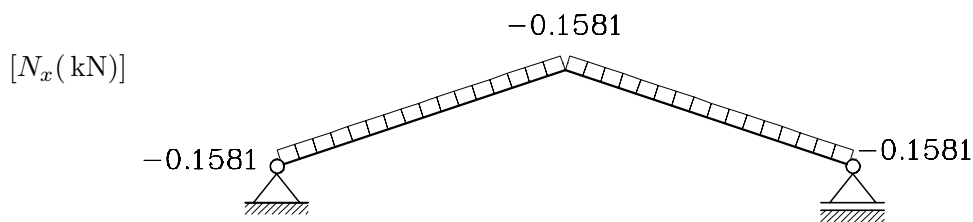
1. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
2. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $F = 1 \text{ kN}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $h = 1 \text{ m}$ .



**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0 \text{ kN}$ ,  $A_z = -0.5 \text{ kN}$ ,  $B_z = -0.5 \text{ kN}$ .

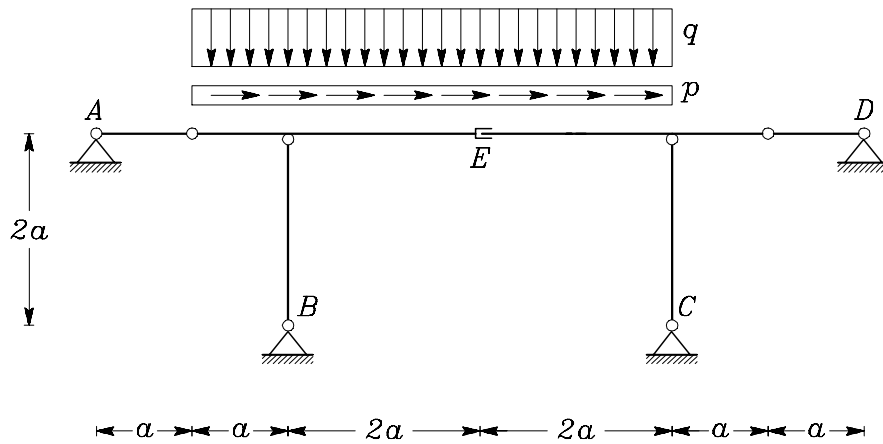


## 3.19 PI 15.12.98/3

Ravninski okvir na sliki (mostna konstrukcija) je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q$  v vertikalni smeri in z enakomerno zvezno obtežbo  $p$  v horizontalni smeri. (glej sliko). Vez v točki  $E$  je dopušča medsebojni pomik v horizontalni smeri, preprečuje pa medsebojni pomik v vertikalni smeri in zasuk.

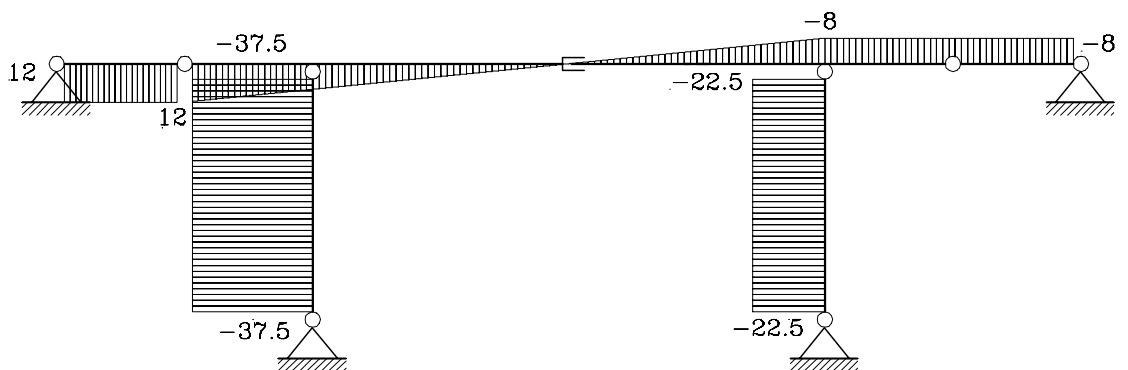
1. Določi računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
2. Izračunaj reakcije in jih kontroliraj.
3. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

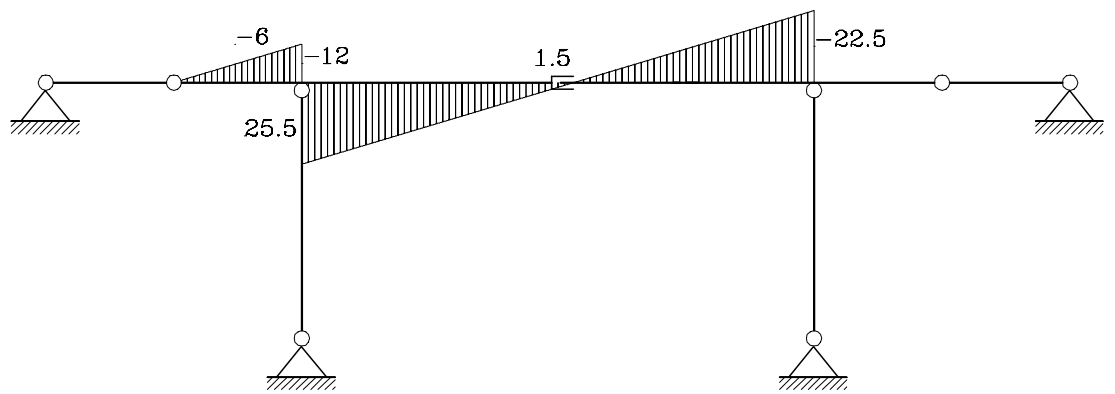
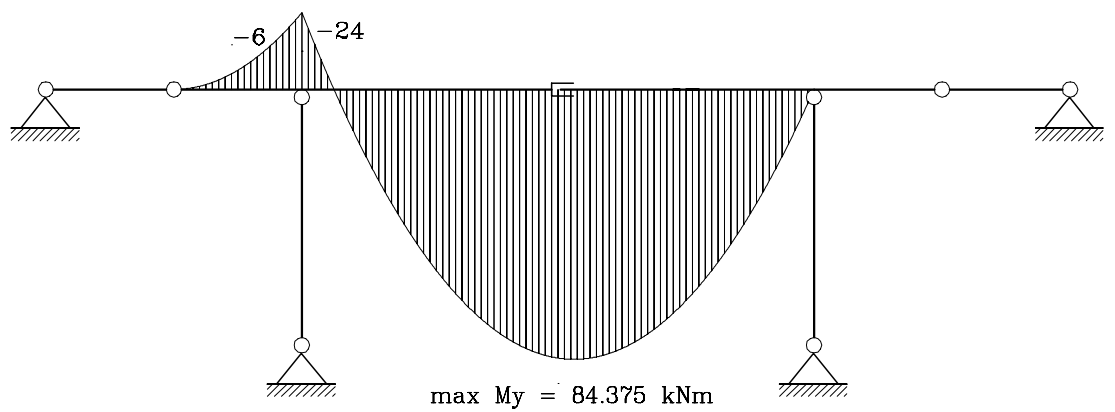
Podatki:  $a = 4\text{ m}$ ,  $q = 3\text{ kN/m}$ ,  $p = 1\text{ kN/m}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = -12\text{ kN}$ ,  $A_z = 0\text{ kN}$ ,  $B_x = 0\text{ kN}$ ,  $B_z = -37.5\text{ kN}$ ,  
 $C_x = 0\text{ kN}$ ,  $C_z = -22.5\text{ kN}$ ,  $D_x = -8\text{ kN}$ ,  $D_z = 0\text{ kN}$ .

$[N_x(\text{kN})]$



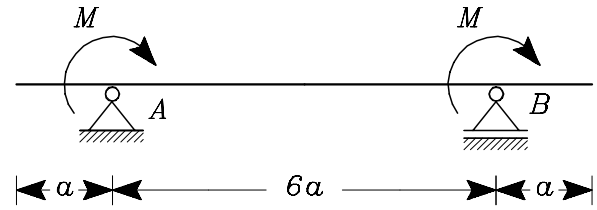
$[N_z(\text{kN})]$  $[M_y(\text{kNm})]$ 

## 3.20 PI 26.03.99/1

Prostoležec nosilec s previsnima poljema na sliki je obtežen s točkovnima momentoma  $M$  nad podporama  $A$  in  $B$ .

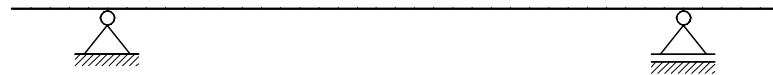
Izračunaj reakcije, notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $a = 1\text{ m}$ ,  $M = 2\text{ kNm}$ .

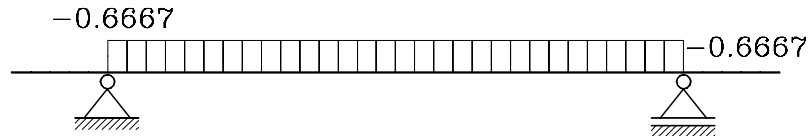
**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = 0.6667\text{ kN}$ ,  $B_z = -0.6667\text{ kNm}$ .

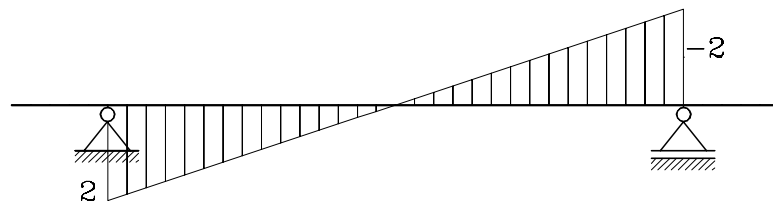
$[N_x(\text{kN})]$



$[N_z(\text{kN})]$



$[M_y(\text{kNm})]$



## 3.21 PI 26.03.99/3

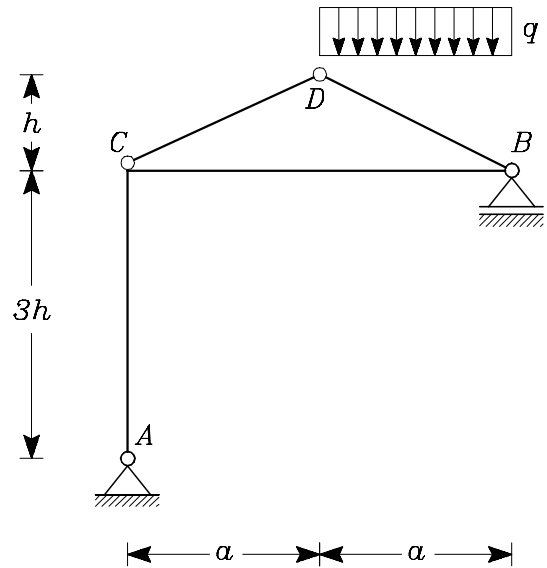
Ravninski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo  $q$  na tekoči meter tlorisa.

Izračunaj računsko število prostostnih stopenj za konstrukcijo  $\tilde{n}_{ps}$ .

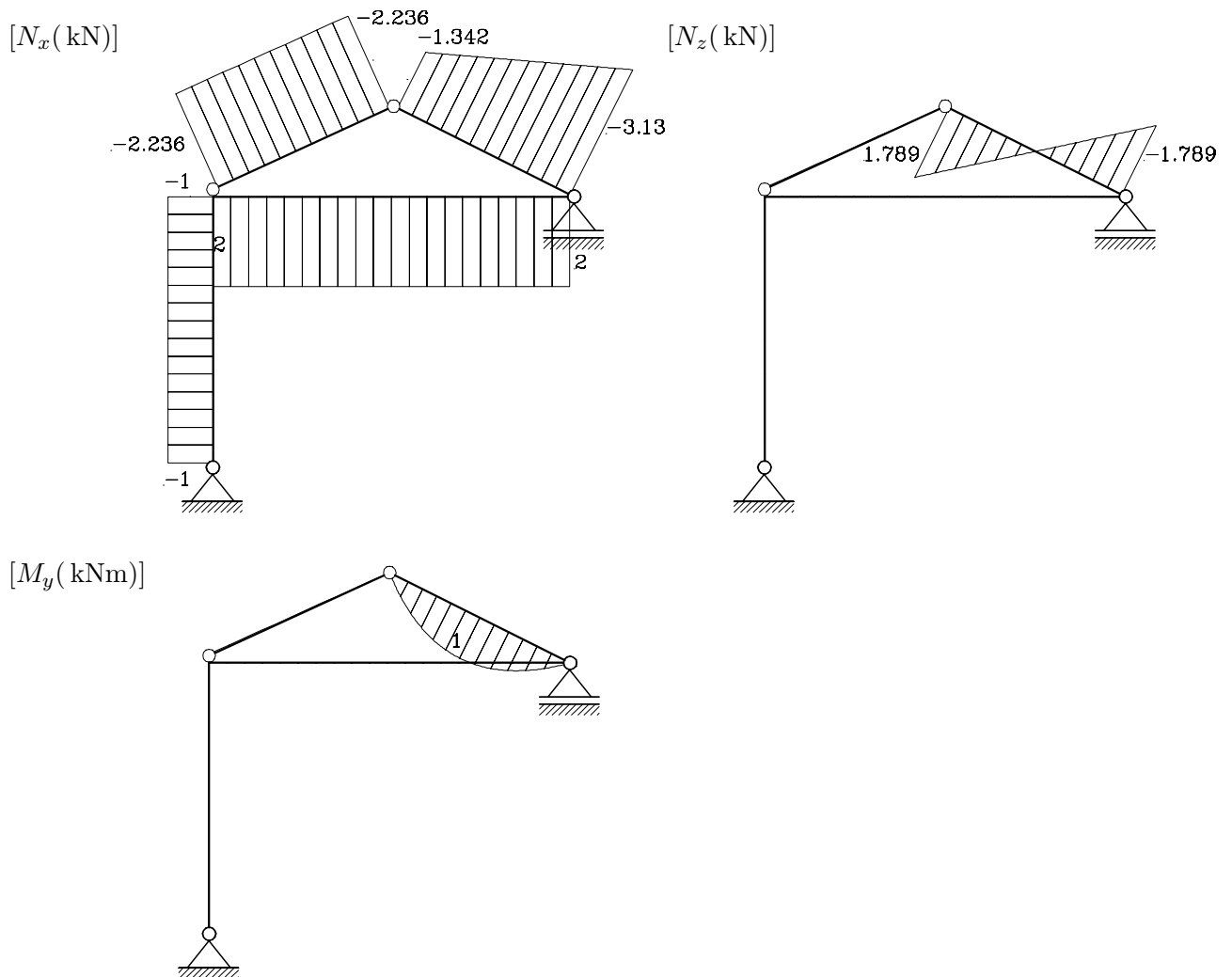
Izračunaj reakcije.

Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki  $a = 2\text{ m}$ ,  $h = 1\text{ m}$ ,  $q = 2\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = -1\text{ kN}$ ,  $B_z = -3\text{ kN}$ .

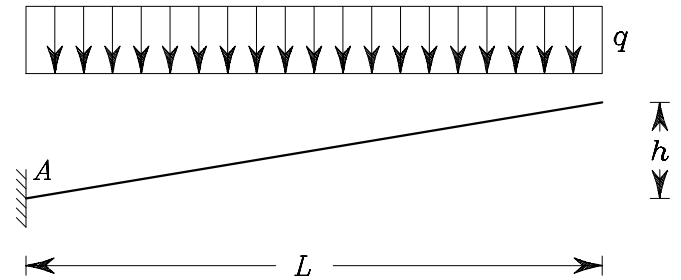


## 3.22 PI 09.09.99/1

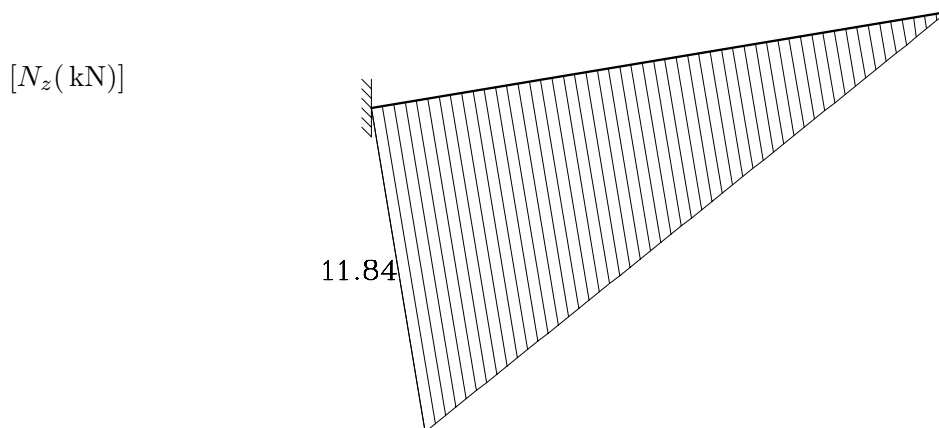
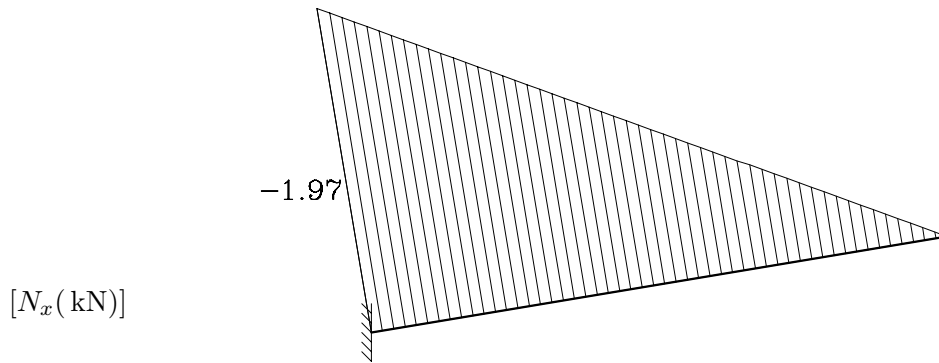
Konzola na sliki je obremenjena z enakomerno zvezno obtežbo  $q$  na tekoči meter tlorisa (sneg), kot prikazuje slika.

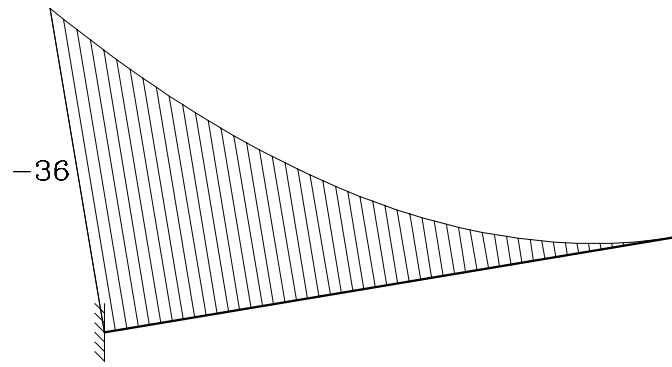
- Izračunaj reakcije.
- Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $L = 6\text{ m}$ ,  $h = 1\text{ m}$ ,  $q = 2\frac{\text{kN}}{\text{m}}$ .

**Rešitev:**

Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = -12\text{ kN}$ ,  $M_A = 36\text{ kNm}$ .



$[M_y \text{ (kNm)}]$ 

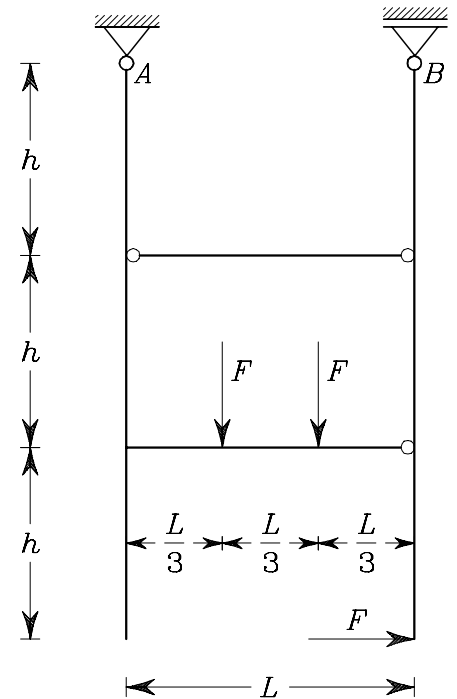


## 3.23 PI 09.09.99/3

Ravninski okvir na sliki je obremenjen s silama  $F$  v vertikalni smeri in s silo  $F$  v horizontalni smeri, kot prikazuje slika.

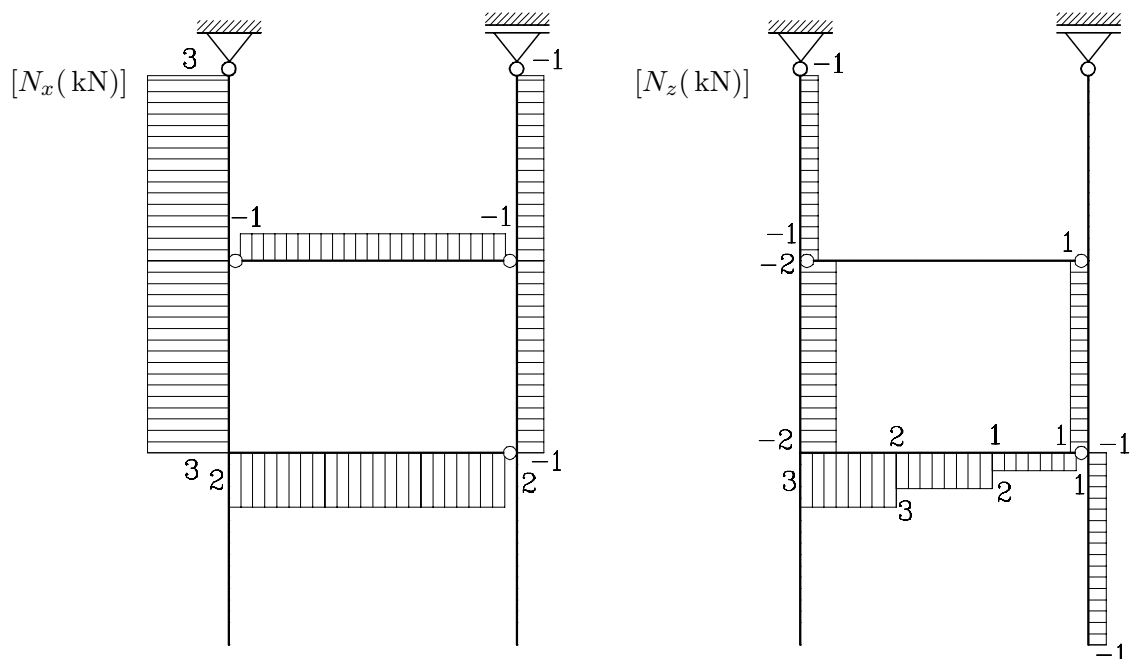
- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
- Izračunaj reakcije.
- Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

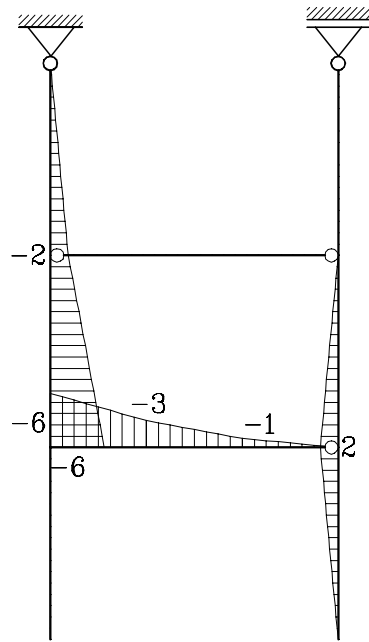
Podatki:  $L = 3\text{ m}$ ,  $h = 2\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .



## Rešitev:

Reakcije:  $A_x = -1\text{ kN}$ ,  $A_z = -3\text{ kN}$ ,  $B_z = 1\text{ kN}$ .



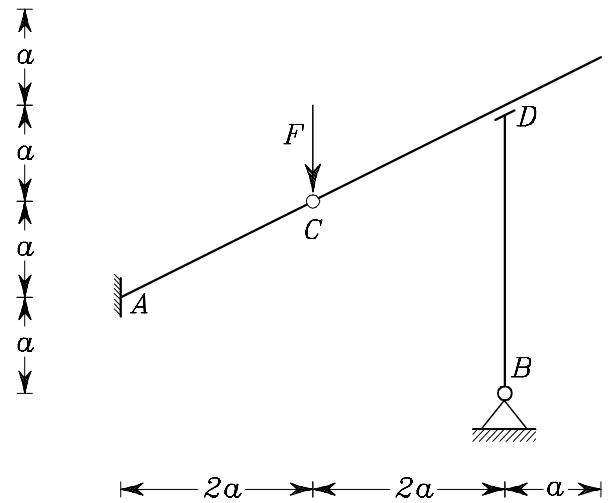
$[M_y \text{ (kNm)}]$ 

## 3.24 PI 23.09.99/3

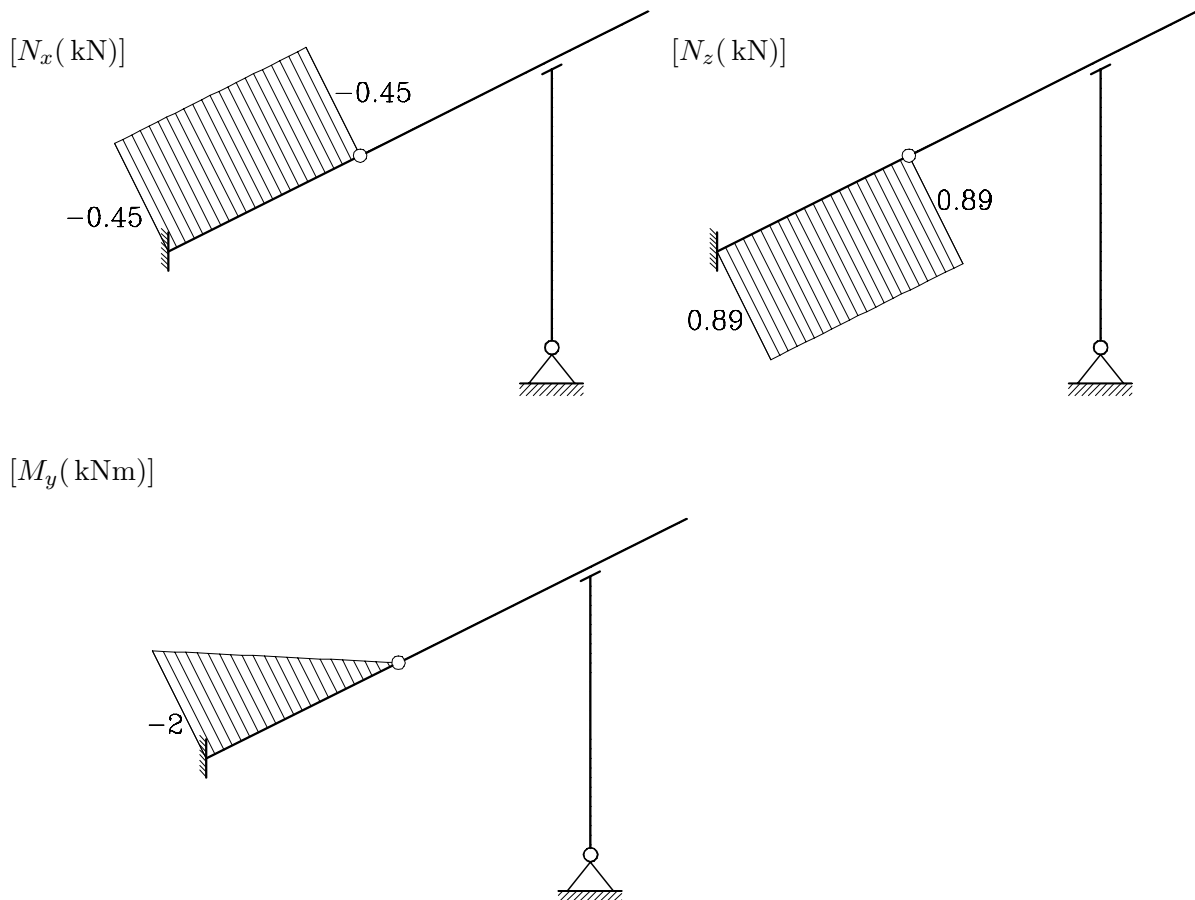
Ravninski okvir na sliki je obremenjen s silo  $F$  v vertikalni smeri, kot prikazuje slika. (V vezi  $D$  je dovoljen medsebojni pomik elementov  $CD$  in  $BD$  vzdolž osi  $CD$ ).

- Izračunaj računsko število prostostnih stopenj  $\tilde{n}_{ps}$  za okvir.
- Izračunaj reakcije.
- Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.

Podatki:  $a = 1\text{ m}$ ,  $F = 1\text{ kN}$ .

**Rešitev:**

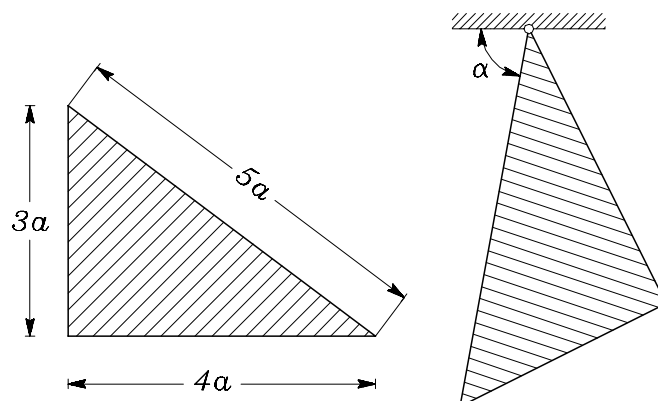
Reakcije:  $A_x = 0\text{ kN}$ ,  $A_z = -1\text{ kN}$ ,  $M_A = 2\text{ kNm}$ ,  $B_x = 0\text{ kN}$ ,  $B_z = 0\text{ kN}$ .



## 4 Težišče – uporabne naloge

### 4.1 PI 15.12.98/4

Pravokotno, homogeno, trikotno ploščo, konstantne debeline (glej sliko) obesimo na strop, kot prikazuje slika. Plošča se zaradi lastne teže nagne tako, da oklepa s stropno konstrukcijo kot  $\alpha$  (glej sliko). Izračunaj kot  $\alpha$ , pri katerem je plošča v ravnotežju.



**Rešitev:**

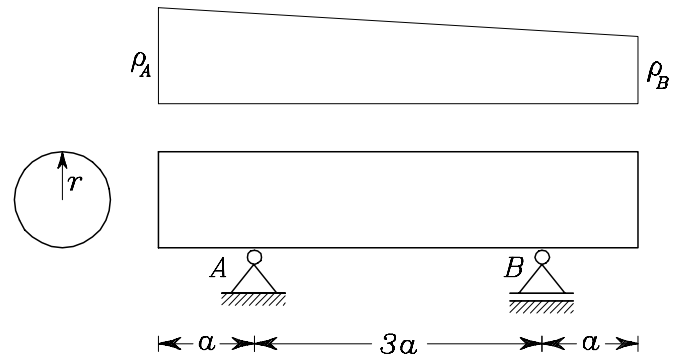
Kot  $\alpha = 73.6861^\circ$ .

## 4.2 PI 23.09.99/4

Na sliki je prikazan hlod oblike valja, dolžine  $5a$ , polmera  $r$ , položen na dve podpori. Hlod je na levem delu moker, na desnem suh. Gostota hloda se spreminja linearno od  $\rho_A$  (gostote na levem robu) do  $\rho_B$  (gostote na desnem robu). Izračunaj:

- Reakciji v podporah za podani razpored podpor na sliki.
- Odmik leve podpore od levega roba, da bo sila v obeh podporah enaka.

Podatki:  $a = 1 \text{ m}$ ,  $r = 20 \text{ cm}$ ,  $\rho_A = \frac{1 \text{ kg}}{\text{dm}^3}$ ,  $\rho_B = \frac{0.8 \text{ kg}}{\text{dm}^3}$ .

**Rešitev:**

Privzamemo pospešek prostega pada  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

- Reakciji  $A_z$  in  $B_z$  za obtežni primer na sliki sta:  $A_z = -2.9449 \text{ kN}$ ,  $B_z = -2.6025 \text{ kN}$ .
- Odmik leve podpore od levega roba znaša  $0.9074 \text{ m}$ .