

OCENJEVANJE PARAMETROV

1. OCENJEVANJE ARITMETIČNE SREDINE Z MALIMI VZORCI

Točkovna in intervalna ocena

Zanima nas, kakšna je vrednost aritmetične sredine v osnovni množici. Če bi imeli podatke za vse enote osnovne množice, bi vrednost aritmetične sredine preprosto **izračunali**. Vrednost aritmetične sredine v osnovni množici imenujemo **prava vrednost parametra**. Ker podatkov za vse enote osnovne množice nimamo, ne moremo izračunati prave vrednosti.

Imamo samo podatke za enote v vzorcu. Na podlagi teh podatkov lahko le **ocenimo**, kakšna je vrednost aritmetične sredine v osnovni množici. Možni sta dve različni oceni parametra osnovne množice: točkovna ocena in intervalna ocena.

1.

TOČKOVNO OCENO dobimo tako, da izračunamo vrednost aritmetične sredine v vzorcu in **trdimo**, da je aritmetična sredina osnovne množice enaka tej. Prikažimo nekaj primerov točkovnega ocenjevanja.

Tabela 1. Točkovne ocene parametrov

podatki za vzorec	vzorčna aritmetična sredina	aritmetična sredina osnovne množice
testni rezultati	36,75	36,75
podatki o telesni višini dijakov	156,23	156,23
plače učiteljev	168 266,25 SIT	168 266,25 SIT

Če bi bila v vzorcu celotna osnovna množica (kar je seveda nesmiselno), bi točkovna ocena držala. Ker pa je v vzorcu le del osnovne množice, točkovna ocena nasplošno ne drži. Verjetnost, da je pravilna, je neznansko majhna (praktično ničelna). Sicer je res, da točkovno oceno zelo preprosto pridobimo, a je zaradi nezanesljivosti praktično neuporabna. Uporabimo jo lahko kvečjemu kot sredstvo, da pridemo do bolj zanesljive ocene.

Ob točkovni oceni lahko spoznamo pojem tveganja v vzorčenju. Ta je namreč stalni spremljevalec postopkov posploševanja z vzorca na osnovno množico. Če bi parameter osnovne množice ocenili točkovno, bi tvegali praktično 100% - že vnaprej bi namreč vedeli, da ocena ne bo pravilna. Možnost, da imata vzorec in osnovna množica enak parameter, je zgolj teoretična. Vzorčni parameter pa ni kakršenkoli. Če imamo vzorec z dobro reprezentativnostjo, bo vzorčni parameter blizu parametru osnovne množice. Kolikor bolj je vzorec podoben osnovni množici, toliko bolj je tudi njegov parameter "podoben" parametru osnovne množice (natančneje povedano: tem manjša je razlika med obema parametroma). Pa vendar – enaka nista praktično nikdar!

2.

INTERVALNO OCENO bomo predstavili s skrajnimi mejami iz prejšnjih primerov.

Tabela 2. Intervalne ocene parametrov

podatki za vzorec	vzorčna aritmetična sredina	aritmetična sredina osnovne množice
testni rezultati	36,75	od 0 do neskončno
podatki o telesni višini dijakov	156,23	od 0 do neskončno
plače učiteljev	168 266,25 SIT	od 0 do neskončno

Ocene aritmetične sredine osnovne množice v tabeli so pravilne. Tveganja pri takšnem ocenjevanju ni. Intervalna ocena ima spodnjo in zgornjo mejo; trdimo, da je parameter osnovne množice med tema mejama.

Takoj je tudi vidno, da so ocene iz tabele nesmiselne in zato neuporabne. Vse tri ocene bi lahko postavili, ne da bi sploh imeli vzorec in ne da bi karkoli sploh računali. Ilustrirali bomo nesmiselnost takšnega početja na malce komičen način.

Če bi se odločili za takšen način ocenjevanja aritmetične sredine osnovne množice, bi že na začetku lahko postavili trditev: vse aritmetične sredine, katerihkoli osnovnih množic na svetu, so v razmiku med nič in neskončno!

V praksi ne bomo uporabljali tako preprostega načina intervalnega ocenjevanja. Interval bo seveda ožji, s tem bo pa gotovost, da je ocena pravilna, manjša.

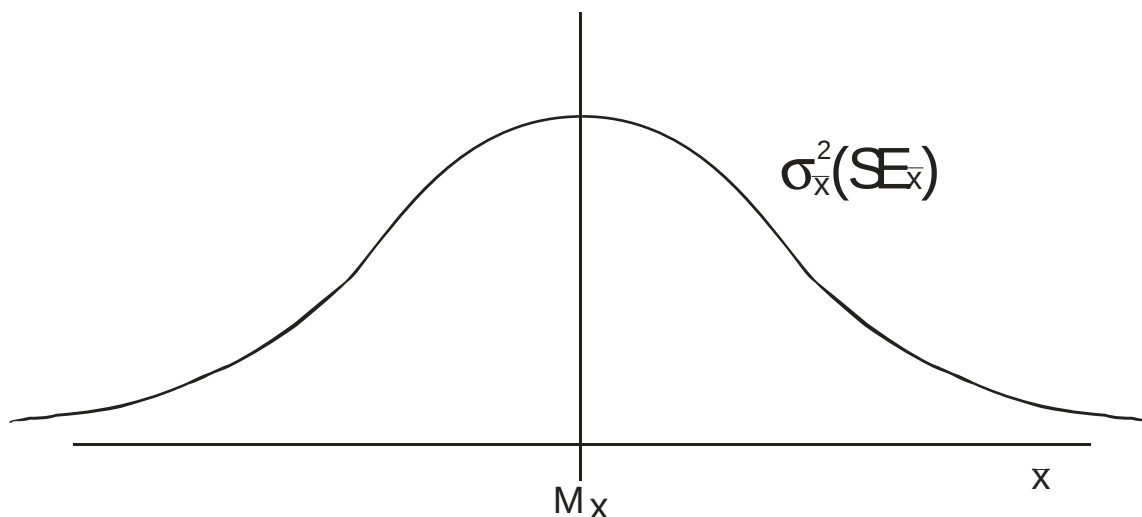
Pojavilo se bo tveganje, da parameter osnovne množice ni v tem intervalu. Čim širši bo interval, tem manjše bo tveganje; čim ožji bo interval, tem večje bo tveganje. Ožji interval pomeni bolj natančno oceno (skrajni primer je točkovna ocena), širši interval pa manjše tveganje (skrajni primer je neskončno širok interval).

Kompromis med natančnostjo in zanesljivostjo ocene je pravilo, da tveganje ne sme biti večje od 5%.

Tega pravila se v praksi držimo brez izjem.

Da bi določili takšen interval, moramo poznati zakonitosti, ki veljajo za razmerje med parametri osnovnih množic in vzorcev. Te smo spoznali v podpoglavju o porazdelitvi vzorčnih parametrov. Spoznane zakonitosti množice vseh vzorcev bomo uporabili v praksi, ko bomo imeli en sam vzorec ali kvečjemu dva. Osnova teh zakonitosti je verjetnostni račun.

Spoznali smo dve vrsti ocen: točkovne in intervalne. Točkovne ocene ne bomo posebej obravnavali, saj jo kot končni rezultat nikdar ne uporabljamo. Povrhu pa je njeno določanje skrajno preprosto: iz podatkov za vzorec izračunamo aritmetično sredino vzorca in to je že točkovna ocena aritmetične sredine osnovne množice. Uporabljali jo bomo kvečjemu med samim postopkom kot nadomestek prave vrednosti. Za nas je veliko pomembnejša intervalna ocena in to bomo podrobno obravnavali.

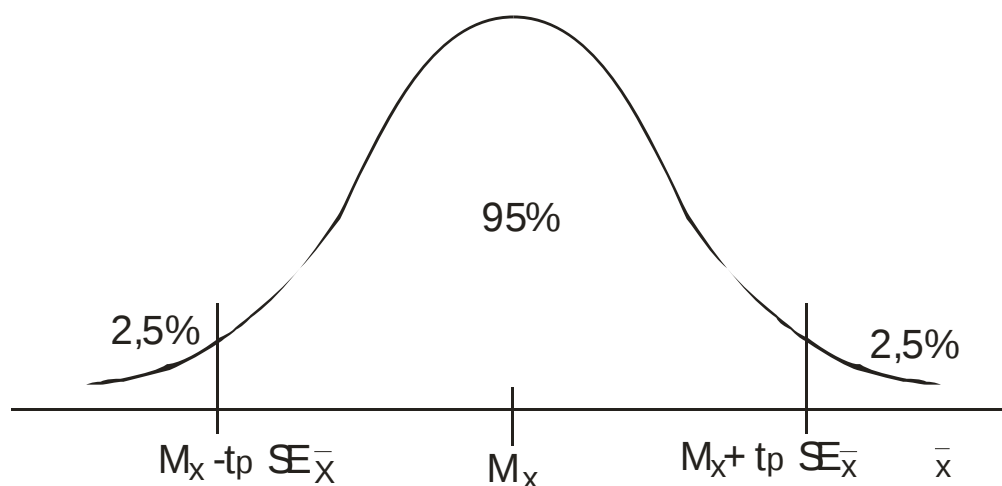


Porazdelitev vzorčnih aritmetičnih sredin ima dva pomembna parametra: aritmetično sredino in varianco. Aritmetična sredina vzorčnih sredin je enaka aritmetični sredini osnovne množice. Vzorčne aritmetične sredine se

porazdeljujejo ("zgoščajo") okoli aritmetične sredine osnovne množice. To dejstvo je prvorazrednega pomena za naše nadaljnje postopke ocenjevanja. Kar smo do sedaj povedali, se je nanašalo na množico vseh možnih vzorcev. Ta množica je samo zamišljena. V praksi bomo imeli vsakokrat samo po en vzorec! Da bi lahko ocenili aritmetično sredino osnovne množice z enim samim vzorcem, moramo le še obrniti dosedanje ugotovitve na glavo.

Interval zaupanja

Vzeli bomo porazdelitev vzorčnih aritmetičnih sredin. V njej so prikazane aritmetične sredine vseh vzorcev. Porazdelitev je Studentova. Ker je njen razpon neskončno širok (spomnimo se: krivulja se asimptotično približuje osi x), bomo vzeli razmik v katerem je 95% vseh vzorcev.



Za kateregakoli od 95% omenjenih vzorcev velja: *aritmetična sredina osnovne množice je največ za $t \times SE$ oddaljena od njegove aritmetične sredine (za velike vzorce pa $1,96 \times SE$)*

Zapišimo to v obliki intervala:

$$\bar{x} - tpSE_{\bar{x}}$$

in

$$\bar{x} + tpSE_{\bar{x}}$$

Torej je 95 odstotkov verjetno, da je aritmetična sredina osnovne množice med tema mejama in pet odstotkov je verjetno, da med tema mejama ni. Postavili bomo trditev:

**Aritmetična sredina osnovne množice je v teh mejah
(s petimi odstotki tveganja).**

Dobili smo, kar smo želeli: intervalno oceno aritmetične sredine osnovne množice. Zanj potrebujemo en vzorec in njegovo sredino kot izhodišče. Res je, da je to ocena s tveganjem; toda spoznali smo že, da brez tveganja pri vzorčenju ne bo šlo.

Standardna napaka ocene aritmetične sredine

Standardno napako SE ali njen nadomestek se izračunamo enako kot pri velikih vzorcih. Tukaj je obrazec za računanje:

$$se_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N}}$$

Določanje t-vrednosti iz tabele

Pri normalni porazdelitvi smo imeli za vsako tveganje le po eno vrednost »z«. V t-porazdelitvi pa moramo upoštevati prostostne stopinje. Za vsako število prostostnih stopinj dobimo drugačno vrednost »t«. Pri ocenjevanju aritmetične sredine določimo število stopinj prostosti iz numerusa vzorca po obrazcu:

$$g = n - 1$$

Za to število prostostnih stopinj bomo v tabeli poiskali vrednost »t«. Označili jo bomo takole:

t_p

in še bolj natančno:

$t(a=0,05; g)$

Poiščimo za vajo nekaj vrednosti »t«. Zaradi primerjave poišči tudi z vrednost za normalno porazdelitev.

Tabela 3. t-vrednosti

poišči vrednost t	a	g	oznaka	t	z
za 5% tveganja, če vzorec ima n=23					
za 1% tveganja, če vzorec ima n=8					
za 5% tveganja, če vzorec ima n=16					

za 0,1% tveganja, če
vzorec ima $n=12$
za 1% tveganja, če
vzorec ima $n=29$

Preveri svoje rešitve na naslednji strani.

Tabela 3a. t-vrednosti

poišči vrednost t	a	g	oznaka	t	z
za 5% tveganja, če vzorec ima n=23	0,05	22	t (a=0,05; g=22)	2,074	1,96
za 1% tveganja, če vzorec ima n=8	0,01	7	t (a=0,01; g=7)	3,499	2,58
za 5% tveganja, če vzorec ima n=16	0,05	15	t (a=0,05; g=15)	2,131	1,96
za 0,1% tveganja, če vzorec ima n=12	0,001	11	t (a=0,001; g=11)	4,318	3,29
za 1% tveganja, če vzorec ima n=29	0,01	28	t (a=0,01; g=28)	2,763	2,58

Dokončni interval zaupanja

Ker nimamo prave vrednosti standardne napake je končna formula za interval zaupanja:

$$\bar{X} - t_p \cdot se_{\bar{X}}$$

in

$$\bar{X} + t_p \cdot se_{\bar{X}}$$

Dobili smo statistični postopek, s katerim lahko iz podatkov vzorca ocenimo aritmetično sredino osnovne množice.

Če je pet odstotkov tveganja preveč, lahko ocenimo aritmetično sredino osnovne množice z manjšim tveganjem. Treba je le izbrati drugačno t-vrednost. Velja pravilo, da je nedopustno večje tveganje od 5 odstotkov; manjše je lahko! Torej lahko si izberemo kakršnokoli tveganje, manjše od 5 odstotkov. Za želeno tveganje poiščemo ustrezno t-vrednost in izračunamo interval zaupanja s to vrednostjo.

Običajno se odločimo za okroglih 1% tveganja ali 0,1% (redkeje). Tako je tudi sestavljena tabela t-porazdelitve (tabela B v prilogah). Za vsako število prostostnih stopinj vsebuje le tri vrednosti t: za 5% tveganja, za 1% tveganja in za 0,1% tveganja.

Primer

Tabela 4. Rezultati testiranja znanja za vzorec 19 učencev osmega razreda OŠ rezultati

26 26 29 28 37 38 20 22 32 18 25 31 29 32 30 24 31 21 25

Kakšna je aritmetična sredina osnovne množice s tveganjem 5%?

Tabela 5. Računanje intervala zaupanja za aritmetično sredino

	izračun	vrednost
numerus		19
vzorčna aritmetična sredina		27,58
vzorčni standardni odklon		5,40
standardna napaka	$se = \frac{5,40}{\sqrt{19}}$	1,24
prostostne stopinje	$g = 19 - 1$	18
t-vrednost za 5% tveganja		2,101
interval zaupanja	$27,58 - 2,101 \cdot 1,24$ $27,58 + 2,101 \cdot 1,24$	24,97 30,19
trditev o osnovni množici	$24,97 \leq M \leq 30,19$	

Naredimo še interval zaupanja za 1 % tveganja:

t-vrednost za 1% tveganja		2,878
interval zaupanja	$27,58 - 2,878 \cdot 1,24$ $27,58 + 2,878 \cdot 1,24$	24,01 31,15
trditev o osnovni množici	$24,01 \leq M \leq 31,15$	

In še za tveganje 0,1%:

t-vrednost za 5% tveganja		3,922
interval zaupanja	27,58 – 3,922•1,24 27,58 + 3,922•1,24	22,72 32,44
trditev o osnovni množici	22,72 ≤ M ≤ 32,44	

Vidimo, da je interval pri manjšem tveganju ožji, pri večjem tveganju pa širši.

2. Ocenjevanje Pearsonovega korelacijskega koeficienta z MALIMI vzorci

Za približno normalno porazdelitev vzorčnih korelacijskih koeficientov je več pogojev. Numerus vzorcev mora biti večji od sto in korelacija v osnovni množici mora biti nič. Če sta pogoja izpolnjena, porazdelitev vzorčnih korelacijskih koeficientov ne odstopa od normalne preveč (povsem normalna ni nikdar!). Vztrajanje pri popolnem izpolnjevanju vseh pogojev bi pomenilo, da bi velikokrat ostali praznih rok! Namesto, da bi kaj izvedeli vsaj približno, ne bi zvedeli nič! Če bi šlo za velike napake, potem je zares bolje nič. Večinoma pa so napake majhne.

Zaradi prezahtevnih pogojev za uporabo tega »klasičnega« postopka ocenjevanja je razvil R.A. Fisher svoj postopek. Ta je uporaben praktično v vseh pogojih: zadostuje že numerus vzorca deset; ničelni korelacijski koeficient v osnovni množici pa sploh ni pogoj. V tem postopku je treba pretvoriti Pearsonov korelacijski koeficient v Fisherjev koeficient. Vzorčni Fisherjevi koeficienti se vedno porazdeljujejo približno normalno (torej tudi takrat, ko se Pearsonovi ne porazdeljujejo normalno!!). Zato lahko ta postopek uporabimo praktično vedno. Fisherjevi koeficienti nič ne povedo o korelaciji in jih tudi ne moremo smiselno vsebinsko interpretirati. Torej za nas niso neposredno uporabni. So le sredstvo za ocenjevanje korelacijskih koeficientov. Zato nas tudi ne sme presenetiti, da imajo vrednosti tudi večje od ena (saj niso koeficienti korelacije!).

Za pretvarjanje Pearsonovih korelacijskih koeficientov v Fisherjeve uporabljamo obrazec:

$$Z_r = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Za hitrejšo pretvorbo lahko uporabimo tudi tabelo C (v prilogah). V prilogi je tudi tabela D za pretvorbo v obratni smeri.

Interval zaupanja za Fisherjev koeficient s 5% tveganja je:

$$Z_r - 1,96 \cdot s e_{z_r}$$

$$Z_r + 1,96 \cdot s e_{z_r}$$

Standardno napako za Fisherjeve koeficiente dobimo po obrazcu:

$$s e_{z_r} = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

Postopek ocenjevanja poteka po naslednjih korakih:

1. Dobljeni vzorčni Pearsonov korelacijski koeficient pretvorimo v Fisherjev koeficient.
2. Izračunamo spodnjo in zgornjo mejo intervala zaupanja za Fisherjev koeficient.
3. Pretvorimo to spodnjo in zgornjo mejo nazaj v vrednosti Pearsonovega korelacijskega koeficienta.
4. Dobili smo spodnjo in zgornjo mejo intervala zaupanja za Pearsonov korelacijski koeficient; trdimo, da je med tema mejama korelacijski koeficient osnovne množice (z izbranim tveganjem).

Primer

Pearsonov korelacijski koeficient v vzorcu z numerusom $n=155$ je $r=0,56$. V katerih mejah je korelacijski koeficient osnovne množice (s tveganjem 5%)?

Tabela 6. Računanje intervala zaupanja za korelacijski koeficient

parameter		vrednost
numerus		$n = 25$
Pearsonov kor. koef. v vzorcu		$r = 0,56$
Fisherjev koeficient iz tabele		$Zr = 0,633$
standardna napaka F. koeficienta		$se_r = 0,213$
interval zaupanja za Fisherjev koeficient	$0,633 - 1,96 \cdot 0,213$ $0,633 + 1,96 \cdot 0,213$	0,22 1,05
interval zaupanja za Pearsonov korelacijski koeficient	za 0,22 iz tabele za 1,05 iz tabele	0,22 0,78
trditev o osnovni množici	$0,22 \leq r \leq 0,78$	