1. kolokvij iz Fizike 1 za biokemike, 4.12.2013 - rešitve

1.

(a) Maksimum hitrosti nastopi, ko je pospešek nič:

$$\frac{dv}{dt} = v_0 \left(\frac{1}{t_0} e^{-t/t_0} + \frac{t}{t_0}(-1/t_0) e^{-t/t_0} \right) \tag{1}$$

$$= \frac{v_0}{t_0} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) e^{-t/t_0} = 0 \tag{2}$$

$$\Rightarrow t = t_0 = 2.0 \text{ s}\,. \tag{3}$$

Pripadajoča maksimalna hitrost je

$$v(t = t_0) = v_0 e^{-1} = 0.92 \text{ m/s}\,. \tag{4}$$

(b) Za celotno pot pointegriramo hitrost po času od $t = 0$ do $t \to \infty$:

$$s = \int_0^\infty dt\, v_0 \frac{t}{t_0} e^{-t/t_0} \tag{5}$$

$$= v_0 \int_0^\infty dx\, t_0\, x e^{-x} \qquad \text{substitucija } x = t/t_0\,, \tag{6}$$

$$= v_0 t_0 \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^\infty \tag{7}$$

$$= v_0 t_0 \left[0 - (-1)\right] = v_0 t_0 = 5 \text{ m} \tag{8}$$

2. Energija vzmeti $kx^2/2$ se pretvori v potencialno in kinetično energijo vlakca na vrhu obrata

$$\frac{kx^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}\,. \tag{9}$$

Po drugi strani vemo, da mora biti v skrajnem primeru centripetalen pospešek pri kroženju enak g:

$$a_c = \frac{v^2}{h/2} = g\,. \tag{10}$$

Če je centripetalni pospešek manjši, potem mora viseti na tirih, če je večji se nanje opre. Vstavimo gornjo zvezo med v in h v enačbo (9):

$$\frac{kx^2}{2} = mgh + \frac{mgh}{4} \tag{11}$$

$$x = \sqrt{\frac{5mgh}{2k}} = 18.1 \text{ m}\,. \tag{12}$$

Največji pospešek pri izstrelitvi je

$$a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{kx}{m} = \sqrt{\frac{5ghk}{2m}} = 27.1 \text{ m/s}^2\,. \tag{13}$$

Prečni pospešek na tire se pojavi med obratom, ko se smer hitrosti spreminja zaradi centripetalnega pospeška. Po velikosti je ta največji, ko je hitrost kroženja največja, in to je ob vstopu in izstopu iz obrata:

$$a_{c,\max} = \frac{v_0^2}{h/2}\,, \tag{14}$$

kjer je

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \tag{15}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{kx^2}{m} = \frac{5gh}{2}\,. \tag{16}$$

Vstavimo zadnji izraz v enačbo (14) in dobimo

$$a_{c,\max} = 5g = 49\ \mathrm{m/s^2}\,. \tag{17}$$

3. Označimo mase dekleta, fanta, in deske z m_D, m_F in m. Razdaljo med dekletom in levim podpornikom označimo z $a = 1$ m. Če si izberemo za os, glede na katero bomo računali navore v levem podporniku, potem sta enačbi za ravnovesje navorov in sil, ki delujejo na desko, sledeči:

$$-2F_L a + mga + m_D ga - m_F ga/2 = 0\,, \tag{18}$$

$$F_L + F_D - (m + m_D + m_F)g = 0,. \tag{19}$$

V gornjih enačbah sta sili levega in desnega podpornika F_L in F_D. Iz prve enačbe lahko izrazimo F_L, nato pa iz druge še F_D:

$$F_L = \frac{g}{2}\left(m + m_D - \frac{m_F}{2}\right) = 196.2\ \mathrm{N}\,, \tag{20}$$

$$F_D = \frac{g}{2}\left(m + m_D + \frac{5m_F}{2}\right) = 1373.4\ \mathrm{N}\,. \tag{21}$$

Ko se dekle premika proti fantu, se njen navor glede na desni podpornik zmanjšuje, zato se manjša tudi sila v levem podporniku. V kritični točki imamo $F_L = 0$ in razdaljo od dekleta do osi x. Še enkrat napišimo pogoj za ravnovesje navorov:

$$mga + m_D gx - m_F ga/2 = 0\,, \tag{22}$$

$$\Rightarrow x = a\frac{m_F - 2m}{2m_D} = 33\ \mathrm{cm}\,. \tag{23}$$

In dekle se lahko premakne v desno za 67 cm.

4. Maso vozička, delavca in vreče označimo z M, m in m'. Ko delavec vrže vrečo, se vodoravna komponenta gibalne količine celotnega sistema, t.j. prvega vozička, delavca in vreče, ohranja. Če je hitrost vreče v_0 in hitrost prvega vozička v, potem lahko napišemo

$$m'v_0 \cos 30^\circ = (M + m)v\,, \tag{24}$$

od koder dobimo hitrost prvega vozička $v = m'/(M+m)\, v_0 \cos 30^\circ = 0.162$ m/s. Ko vreča pade na drugi voziček, lahko hitrost slednjega ugotovimo iz ohranitve gibalne količine celotnega sistema (vozičkov, moža, vreče). Če označimo z v' hitrost drugega vozička, imamo

$$(M+m')v' = (M+m)v\,, \tag{25}$$

$$\Rightarrow v' = \frac{1+m/M}{1+m'/M} v = 0.186 \text{ m/s}\,. \tag{26}$$

Končni rezultat za relativno hitrost vozičkov je torej $v + v' = 0.35$ m/s. Lahko ga izrazimo še z vhodnimi podatki:

$$v + v' = \frac{m'}{M+m} v_0 \cos 30^\circ + \frac{m+M}{m'+M} \frac{m'}{M+m} v_0 \cos 30^\circ \tag{27}$$

$$= \left(\frac{1}{M+m} + \frac{1}{M+m'} \right) m' v_0 \cos 30^\circ \tag{28}$$