1. kolokvij iz Fizike 2 za biokemike, 7.3.2014 - rešitve

1.

(a) Skupni upor vezja lahko izračunamo iz celotnega toka in gonilne napetosti kot $R_{\mathrm{sk}} = U_g/I_A = 200\ \Omega$. Po drugi strani je skupni upor odvisen od iskane upornosti R:

$$R_{\mathrm{sk}} = R_A + \frac{RR_V}{R+R_V} \tag{1}$$

$$R = \frac{R_V(R_{\mathrm{sk}} - R_A)}{R_V - R_{\mathrm{sk}} + R_A} = 216\ \Omega\,. \tag{2}$$

(b) Napetost na ampermetru je po Ohmovem zakonu $U_A = I_A R_A = 5\ \Omega$. Napetost na uporniku in voltmetru je torej

$$U_V = U_g - U_A = 195\ \mathrm{V}\,, \tag{3}$$

kolikor tudi pokaže voltmeter.

(c) Upor je sorazmeren z dolžino in obratno sorazmeren s presekom žice. Če označimo z d premer žice, ga lahko izrazimo kot:

$$R = \frac{\zeta_{\mathrm{Cu}} l}{S} = \frac{\zeta_{\mathrm{Cu}} l}{\pi d^2/4} \tag{4}$$

$$\Rightarrow l = \frac{\pi d^2 R}{4\zeta_{\mathrm{Cu}}} = 399\ \mathrm{m}\,. \tag{5}$$

2. Sila med ploščama je enaka produktu naboja na eni plošči e in polja druge plošče $E_1 = e/(2\epsilon_0 S)$:

$$F = \frac{e^2}{2\epsilon_0 S} \tag{6}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{2\epsilon_0 SF} = 6.65 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{As}\,. \tag{7}$$

Skupno električno polje obeh plošč pa je

$$E = 2E_1 = \frac{e}{\epsilon_0 S} = 752\ \mathrm{kV/m}\,. \tag{8}$$

Pri razmikanju izoliranih plošč z začetne razdalje $d = 2$ cm na končno razdaljo $d' = 6$ cm je naboj konstanten, zato je konstantna tudi privlačna sila med ploščama. Delo lahko zato dobimo kot produkt sile in premika:

$$A = F(d' - d) = 1\ \mathrm{mJ}\,. \tag{9}$$

Do istega rezultata pridemo, če uporabimo izraz za energijo kondenzatorja

$$\begin{aligned}
A &= W' - W \qquad (10)\\
&= \frac{e^2}{2C'} - \frac{e^2}{2C} \qquad (11)\\
&= \frac{e^2}{2\epsilon_0 S}(d' - d) \qquad (12)\\
&= F(d' - d)\,. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Končna napetost med ploščama je

$$U = \frac{e}{C'} = \frac{ed'}{\epsilon_0 S} = 45.1 \text{ kV}\,. \qquad (14)$$

3. Označimo z $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg maso elektrona, z e_0 osnovni naboj. Centripetalna sila je enaka privlačni Coulombski sili med elektronom in protonom:

$$\begin{aligned}
m\omega^2 r_B &= \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} \qquad (15)\\
m(2\pi\nu)^2 r_B &= \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} \qquad (16)\\
\Rightarrow \nu &= \frac{e_0}{4\sqrt{\epsilon_0 m \pi^3 r_B^3}} = 6.59 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}\,. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Potencialna energija je negativna:

$$W_p = \frac{-e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_B}\,. \qquad (18)$$

Kinetično energijo lahko izrazimo s centripetalno silo:

$$\begin{aligned}
W_K &= \frac{mv^2}{2} \qquad (19)\\
&= \frac{r_B}{2}\,\frac{mv^2}{r_B} \qquad (20)\\
&= \frac{r_B}{2}\,\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} \qquad (21)\\
&= -\frac{W_P}{2}\,. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Torej je razmerje $|W_P/W_K| = 2\,.$

Za ionizacijo vodikovega atoma moramo elektronu dovesti toliko dela, kolikor je razlika v energiji med končnim (prostim) in osnovnim stanjem. V končnem stanju je celotna energija 0, torej:

$$\begin{aligned}
A &= 0 - (W_P + W_K) \qquad (23)\\
&= \frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 r_B} = 13.6 \text{ eV}\,. \qquad (24)
\end{aligned}$$

4. Ker v tretjem vodniku teče tok v nasprotni smeri, je sila med njim in obema spodnjima vodnikoma odbojna. Iz tega sledi, da je skupna vodoravna sila na tretji vodnik 0, navpični komponenti sil pa se seštejeta. Po velikosti je vsaka od sil enaka produktu toka, magnetnega polja dolgega vodnika, ter dolžine tretjega vodnika:

$$F_1 = IdB_1 \tag{25}$$

$$= Id\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+(r/2)^2}}\,, \tag{26}$$

kjer smo uporabili izraz za magnetno polje okrog dolgega ravnega vodnika. Navpično komponento dobimo tako, da F_1 pomnožimo s kosinusom kota med navpičnico in zveznico "tretji vodnik"–"dolg vodnik".

$$F_{1y} = F_1 \cos\phi \tag{27}$$

$$= F_1\frac{y}{\sqrt{y^2+(r/2)^2}}\,. \tag{28}$$

Celotna sila je torej (dva vodnika):

$$F = 2F_{1y} = \frac{\mu_0 I^2 dy}{\pi(y^2+(r/2)^2)}\,. \tag{29}$$

Za velike y se zgornji izraz poenostavi v

$$F \approx \frac{\mu_0 I^2 d}{\pi y}\,, \tag{30}$$

kar ustreza situaciji, ko bi imeli namesto dveh le en vodnik s tokom $2I$ v razdalji y.

Na vajah smo izpeljali izraz za delo ob premikanju vodnika v magnetnem polju dolgega vodnika. Za delo vsake od obeh sil velja:

$$A_1 = \frac{-\mu_0 I^2 d}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}\,, \tag{31}$$

kjer sta $r_{2,1}$ končna oz. začetna razdalja med žicama. Ko vstavimo $r_2 = r/2$ in $r_1 = r$, imamo za celotno delo

$$A = 2A_1 = \frac{\mu_0 d I^2}{\pi}\ln 2\,. \tag{32}$$

Enak rezultat bi lahko dobili z "brute-force" integracijo izraza za silo (29) po y.

$$A = -\int_{r\sqrt{3}/2}^{0} dy\,\frac{\mu_0 d I^2 y}{\pi(y^2+(r/2)^2)}\,, \tag{33}$$

kjer je minus zaradi nasprotne smeri sile in premika. V zgornji integral uvedemo substitucijo $x = y^2 + (r/2)^2$:

$$A = -\int_{r^2}^{r^2/4} dx\frac{\mu_0 d I^2}{2\pi x} \tag{34}$$

$$= -\frac{\mu_0 d I^2}{2\pi}\ln\frac{1}{4} \tag{35}$$

$$= \frac{\mu_0 d I^2}{\pi}\ln 2\,. \tag{36}$$