

# MATEMATIKA 1

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM  
BIOKEMIJA  
1. LETNIK

## PODAJANJE FUNKCIJ

$$f: A \rightarrow B \quad f: x \rightarrow f(x)$$

$x \in A$  je **argument**,  $f(x) \in B$  je **funkcijska vrednost**.

Funkcija je pravilo, ki vsakemu argumentu priredi eno funkcijsko vrednost.

Glavna operacija na funkcijah je **sestavljanje**.

Funkciji  $f$  in  $g$  lahko sestavimo, če so vrednosti  $f$  vsebovane med argumenti  $g$ .

$$\begin{array}{c}
 A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\
 \searrow \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad g \circ f
 \end{array}
 \quad g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

## TABELIRANE FUNKCIJE

Premier League	Final
Chelsea	95
Arsenal	83
Manchester United	77
Everton	61
Liverpool	58
Bolton Wanderers	58
Middlesbrough	55
Manchester City	52
Tottenham Hotspur	52
Aston Villa	47
Charlton Athletic	46
Birmingham City	45
Fulham	44
Newcastle United	44
Blackburn Rovers	42
Portsmouth	39
West Bromwich Albion	34
Crystal Palace	33
Norwich City	33
Southampton	32

Temp. (oC)	Kisik (mg/L)	Temp. (oC)	Kisik (mg/L)
0	14,16	18	9,18
1	13,77	19	9,01
2	13,40	20	8,84
3	13,05	21	8,68
4	12,70	22	8,53
5	12,37	23	8,38
6	12,06	24	8,25
7	11,76	25	8,11
8	11,47	26	7,99
9	11,19	27	7,86
10	10,92	28	7,75
11	10,67	29	7,64
12	10,43	30	7,53
13	10,20	31	7,42
14	9,98	32	7,32
15	9,76	33	7,22
16	9,56	34	7,13
17	9,37	35	7,04

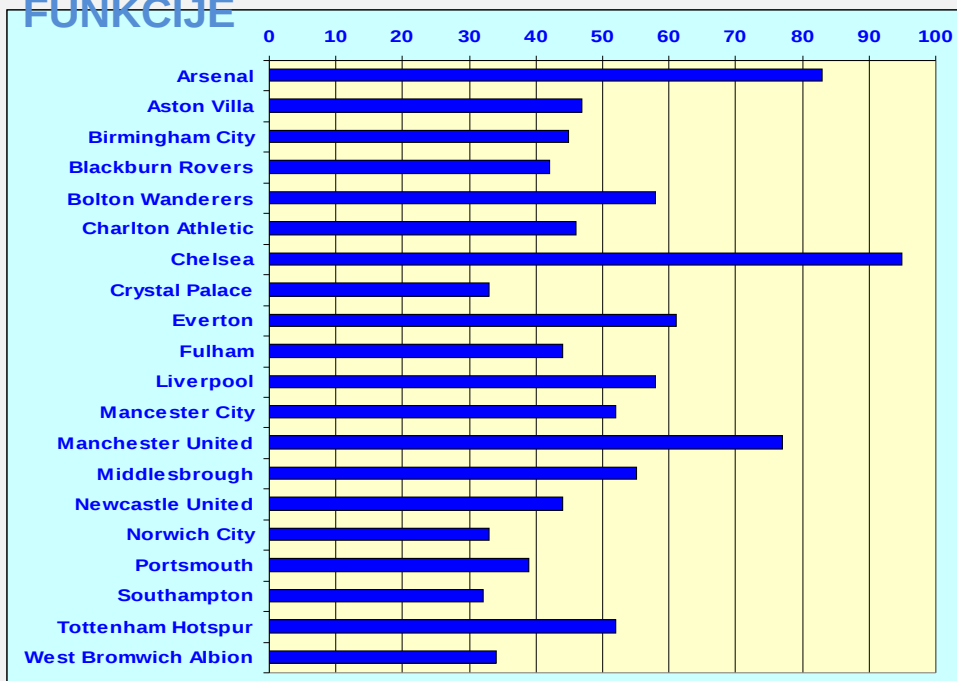
Angleška 1.  
liga 2005-2006

Topnost kisika v  
vodi pri tlaku 760  
mmHg



Logaritemske tablice Jurija  
Vega

# GRAFIČNA PREDSTAVITEV FUNKCIJE



16,00  
14,00  
12,00  
10,00  
8,00  
6,00  
4,00  
2,00  
0,00

Grafična predstavitev je smiselna, če nam nekaj pove o zvezi med argumenti in funkcijskimi vrednostmi.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

## FUNKCIJE PODANE S FORMULO

$$f(x) = 3x - 5$$

linearna funkcija (enačba premice)

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

pot pri prostem padcu

$$d(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

razdalja točke do izhodišča

$$z = 2x + y - 3$$

linearna funkcija (enačba ravnine)

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Herenova formula

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

povprečna vrednost

Formula je lahko odvisna od ene, dveh ali več spremenljivk.

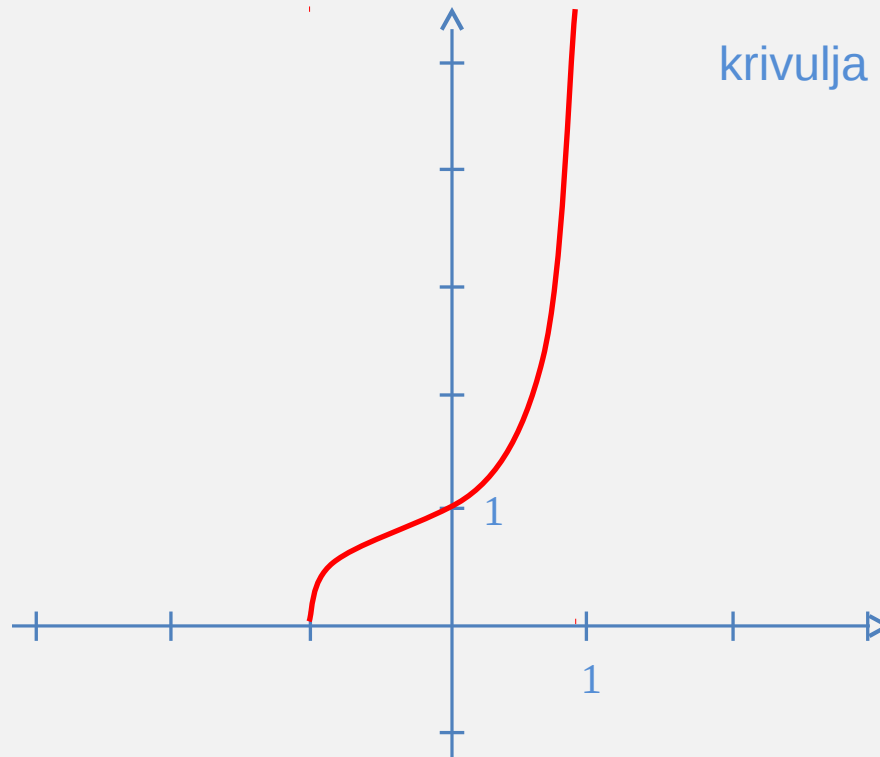
**Definicijsko območje** formule tvorijo tisti nabori spremenljivk, za katere lahko izračunamo formulo.

## GRAF

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

Graf  $f$  je množica točk v ravnini, ki so oblike  $(x, f(x))$  za  $x \in A$ .

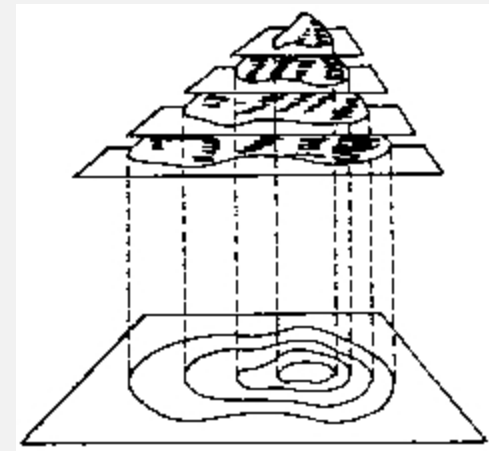
$$l(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$



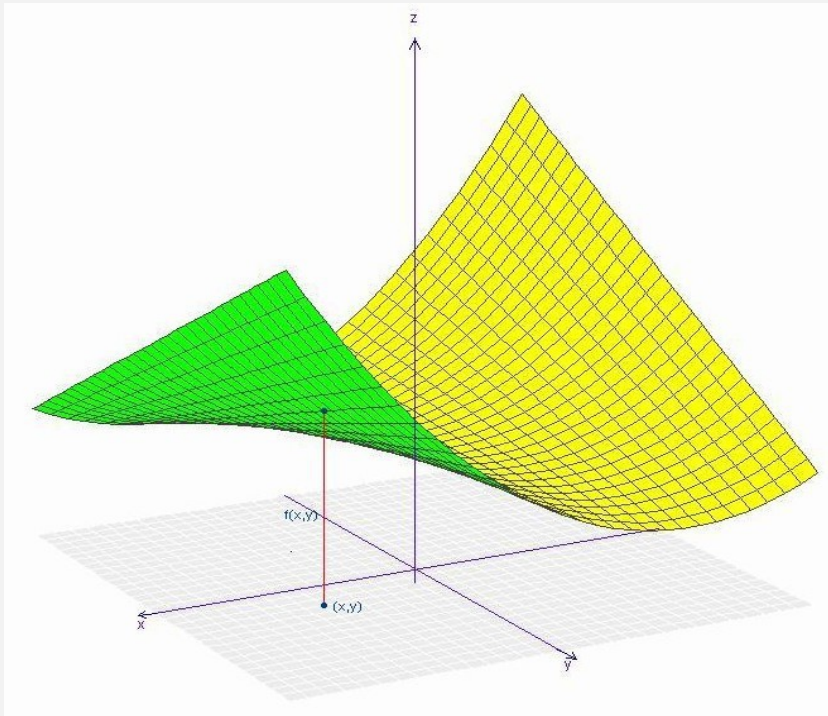
$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Graf  $f$  je množica točk v prostoru, ki so oblike  $(x, y, f(x,y))$  za  $(x,y) \in A$ .

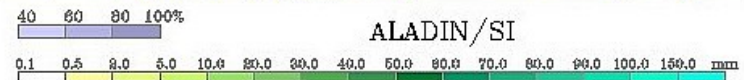
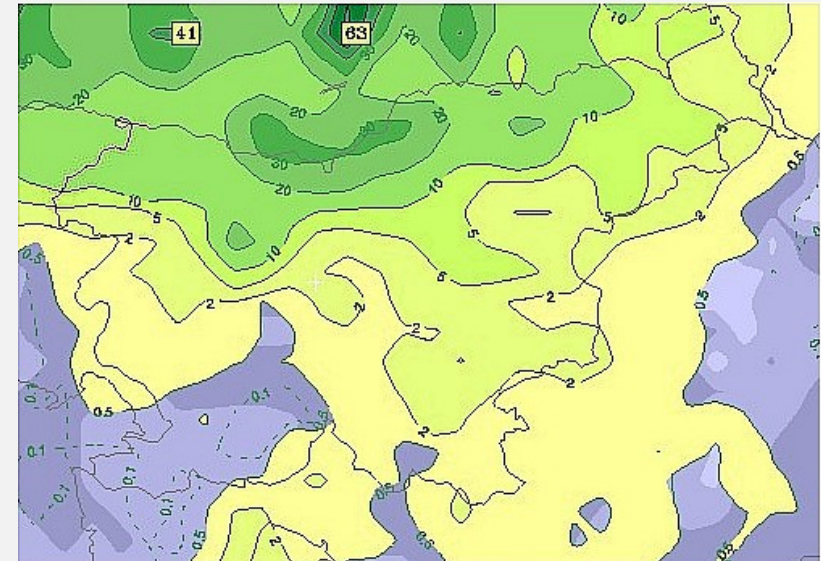
$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$$



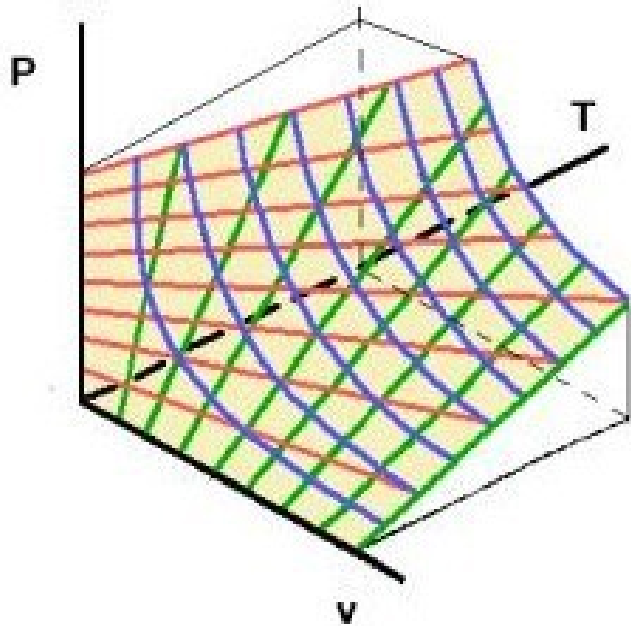
alternativni prikazi



ploskev v prostoru

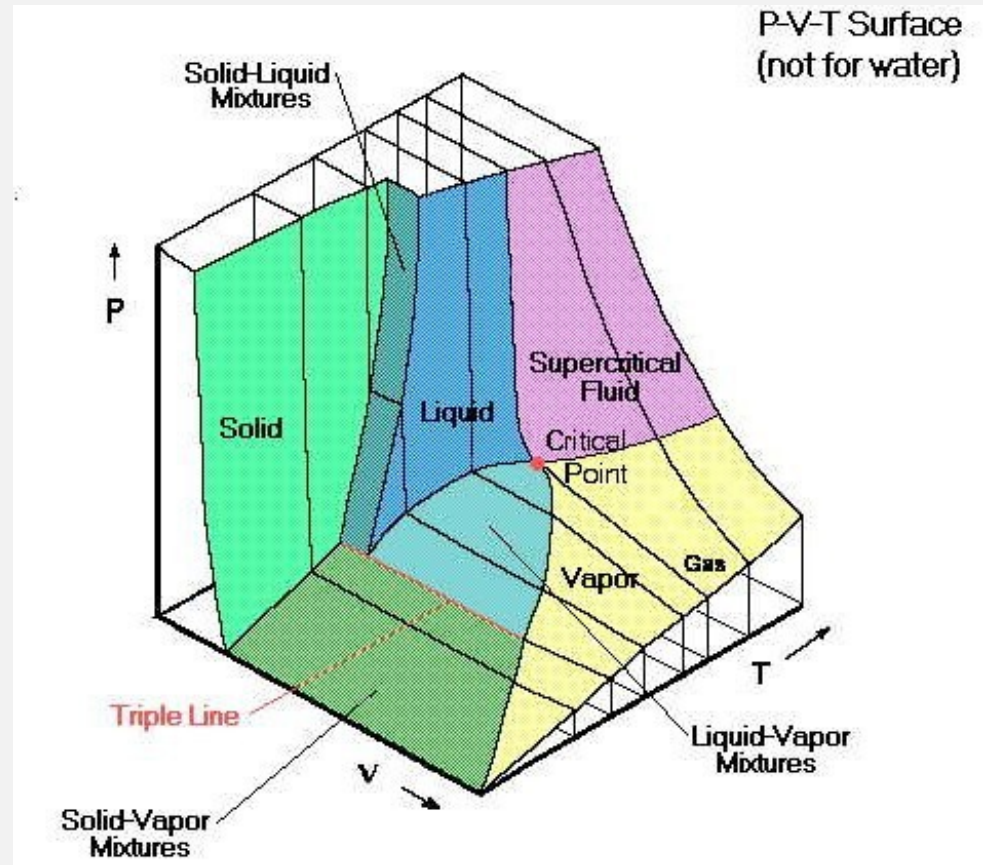


ODSEKOMA DEFINIRANE FUNKCIJE



PVT-diagram idealnega plina

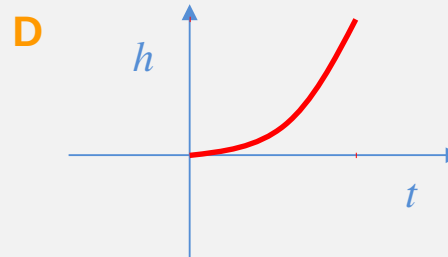
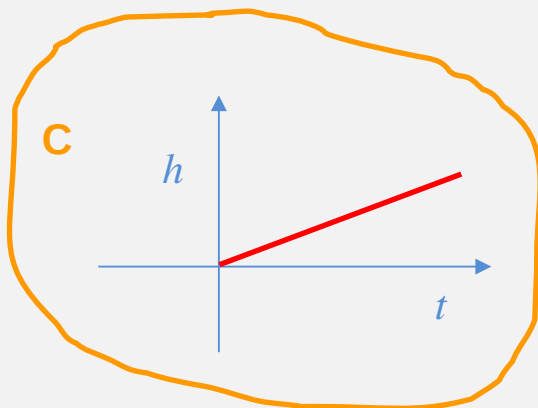
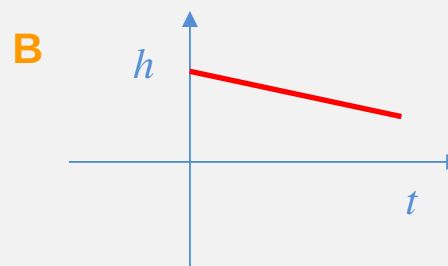
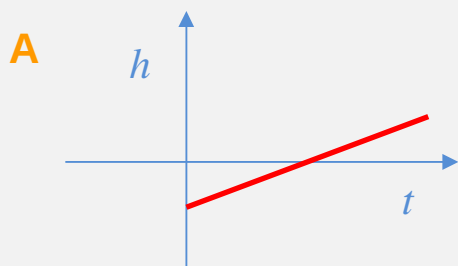
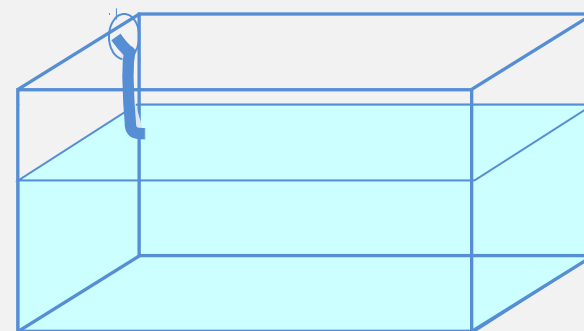
$$P = \frac{nRT}{V}$$



PVT-diagram realne snovi

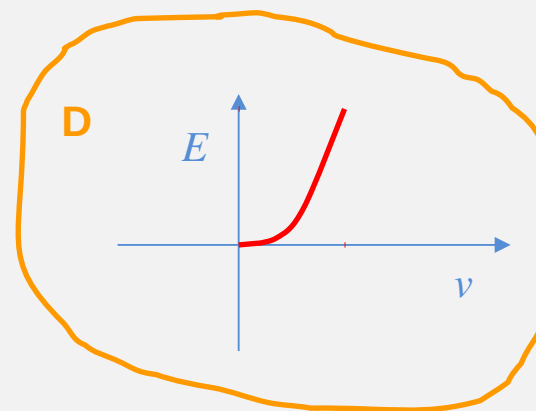
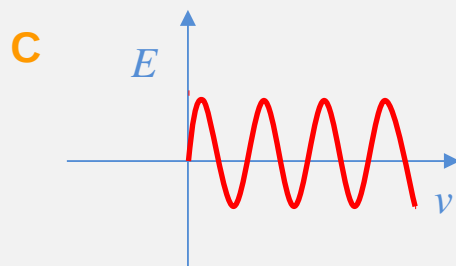
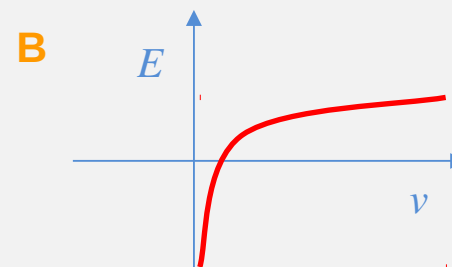
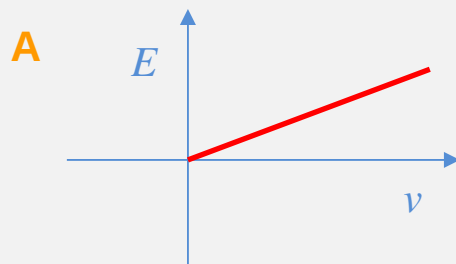


V posodo točimo vodo iz pipe. Kateri graf prikazuje spreminjanje gladine  $h$  vode v odvisnosti od časa  $t$ ?



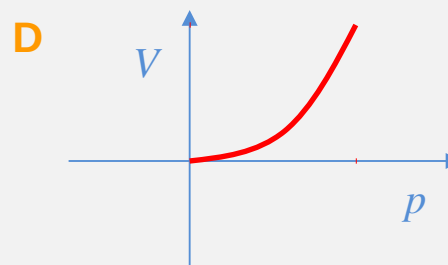
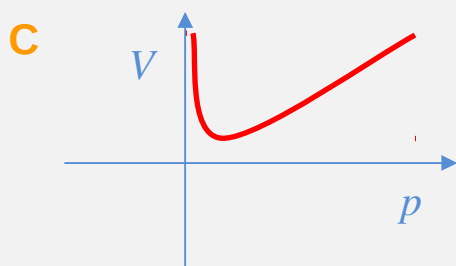
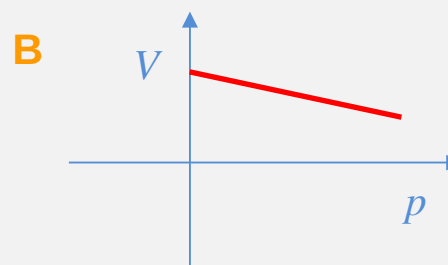
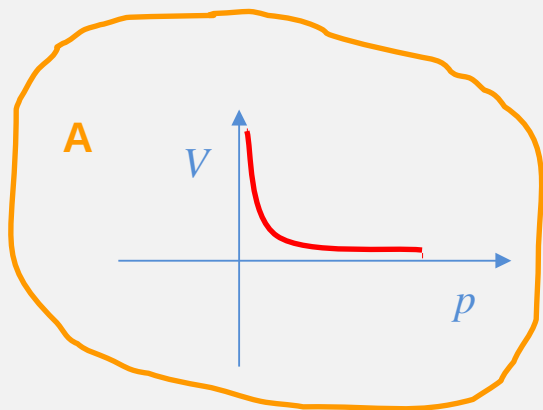
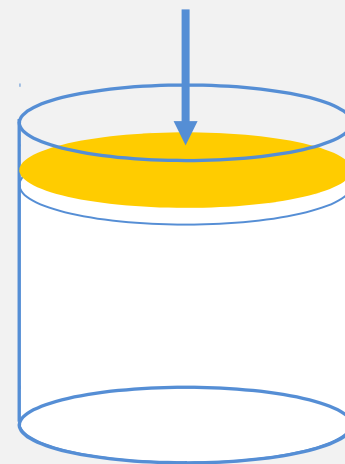
Ker so stene posode navpične, narašča gladina enakomerno - linearno.

Kateri graf ponazarja kinetično energijo  $E$  telesa, ki se giblje s hitrostjo  $v$ ?



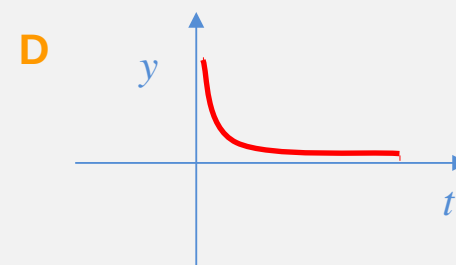
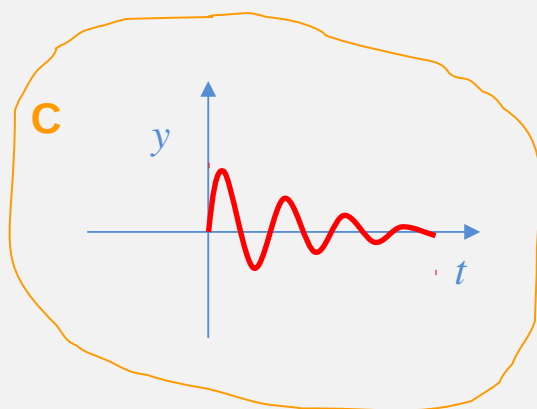
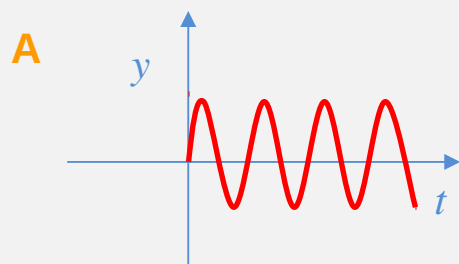
Kinetična energija je sorazmerna kvadratu hitrosti,  $E=mv^2/2$ .

Kateri graf prikazuje spremembo prostornine  $V$  zraka v posodi ob spreminjanju pritiska  $p$ ?



Boyle-Mariottov zakon:  $pV = \text{konst.}$ , zato je  $V \sim 1/p$ .

Kateri graf ponazarja nihanje strune na kitari?



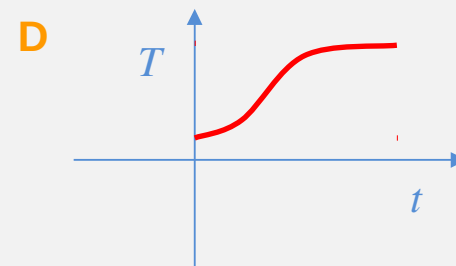
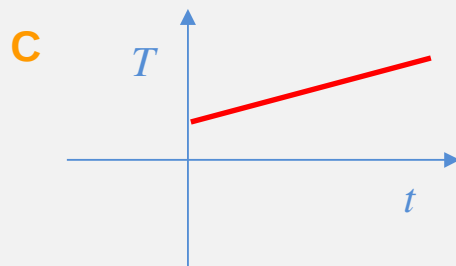
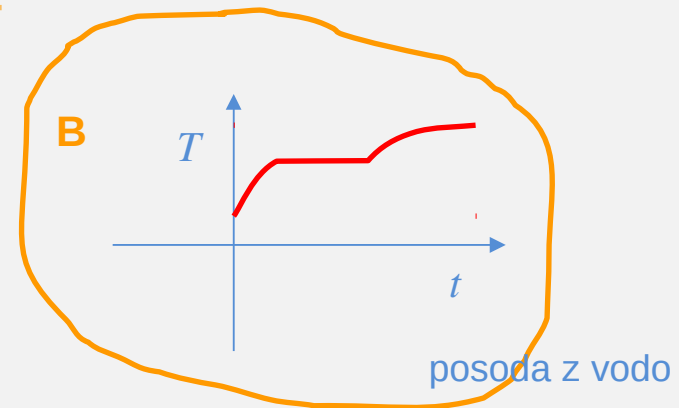
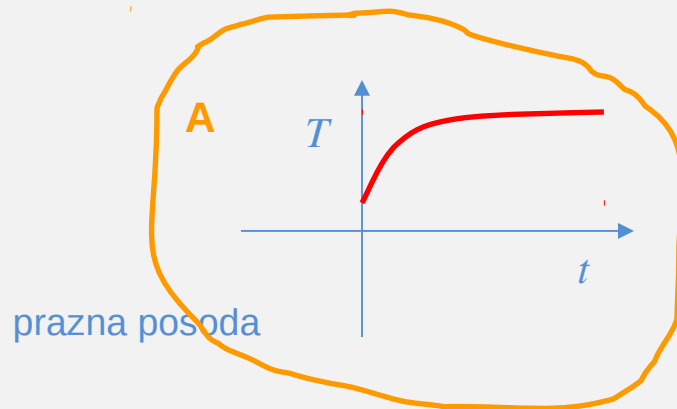
Nihanje napete strune je primer dušenega nihanja:

moč zvoka hitro upade, višina pa ostane nespremenjena.

Fizikalno: amplituda eksponentno pada, frekvenca se ne spreminja.

Matematično:  $y = e^{-at} \sin(bt)$ ,  $a$  je dušenje,  $b$  je frekvenca nihanja.

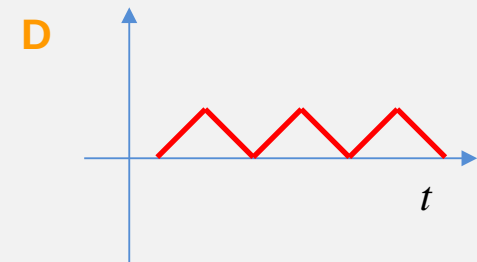
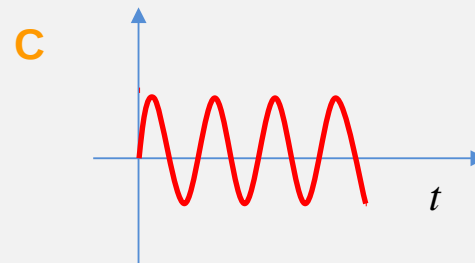
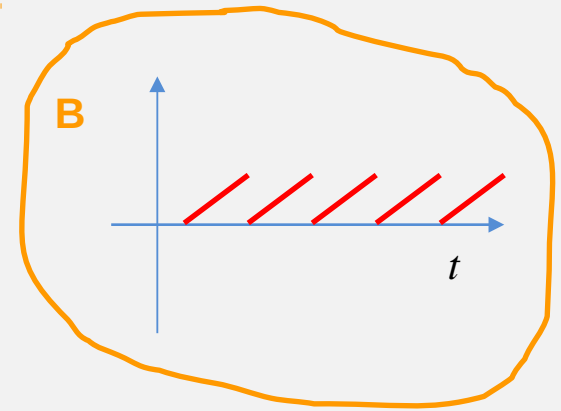
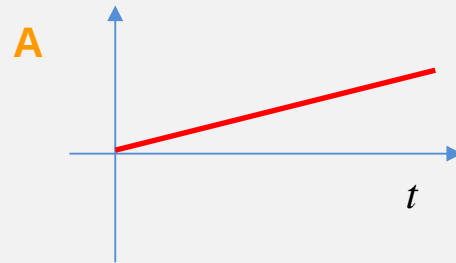
Kateri graf prikazuje spremembo temperature  $T$  ogrevane posode v odvisnosti od časa  $t$ , če je posoda prazna, in kateri, če je posoda polna vode?



Posoda se ogreje do temperature vira toplote. Hitrost segrevanja je sorazmerna razliki temperatur (Newtonov zakon), zato razlika temperatur eksponentno upada. Temperatura polne posode se ne povečuje dokler vsa voda ne povre.



Kateri graf ponazarja število sekund, ki ga kaže sekundni kazalec na uri?

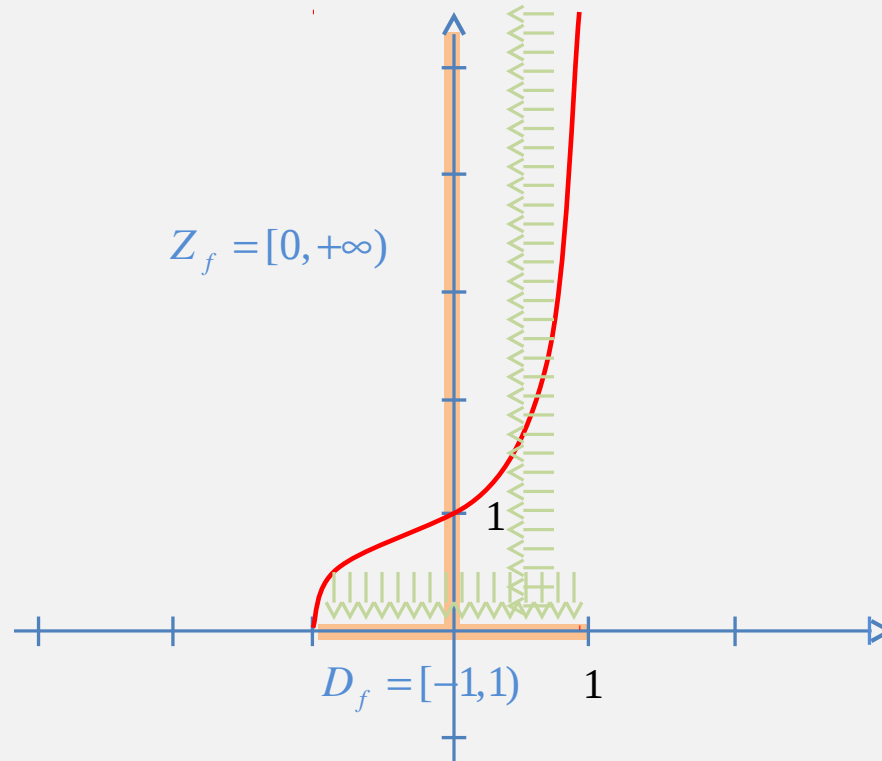


## ZNAČILNOSTI FUNKCIJE, KI SO RAZVIDNE IZ GRAFA

1. Definijsko območje, zaloga vrednosti
2. Naraščanje in padanje, ekstremi
3. Ukrivljenost
4. Trend na robu definijskega območja
5. Periodičnost in simetrije

## Definicijsko območje in zaloga vrednosti

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

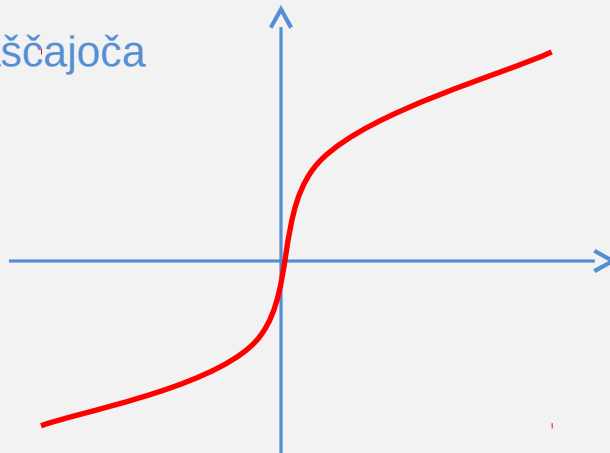


Definicijsko območje  $D_f$  je 'senca' (tj. slika projekcije) grafa na osi  $x$ , zaloga vrednosti  $Z_f$  pa je senca na osi  $y$ .

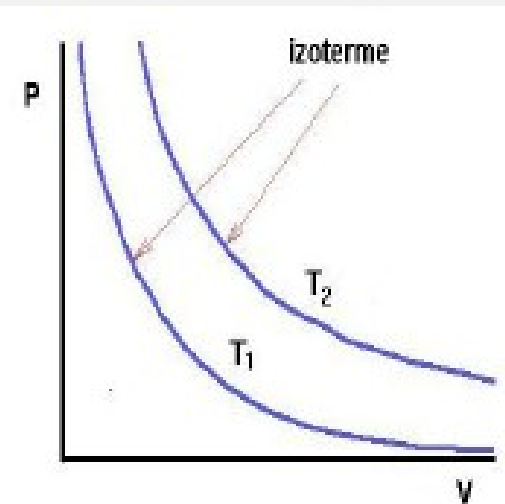
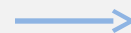
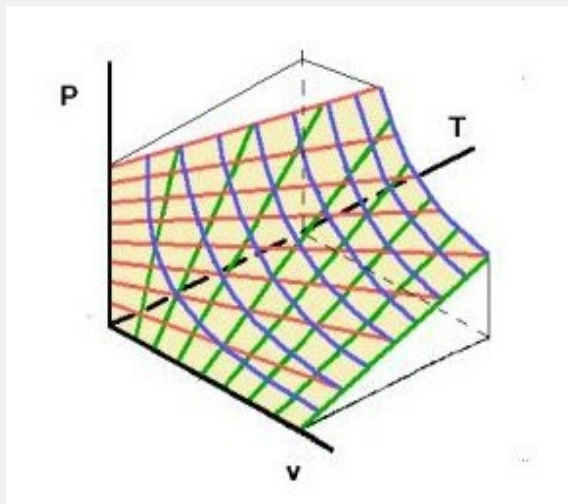
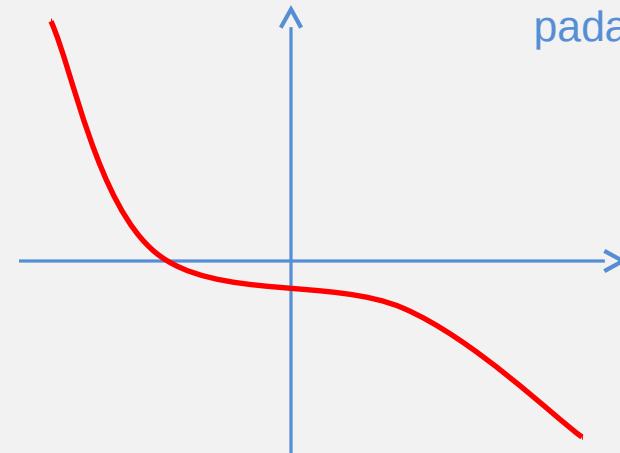


## Naraščanje in padanje funkcije

naraščajoča



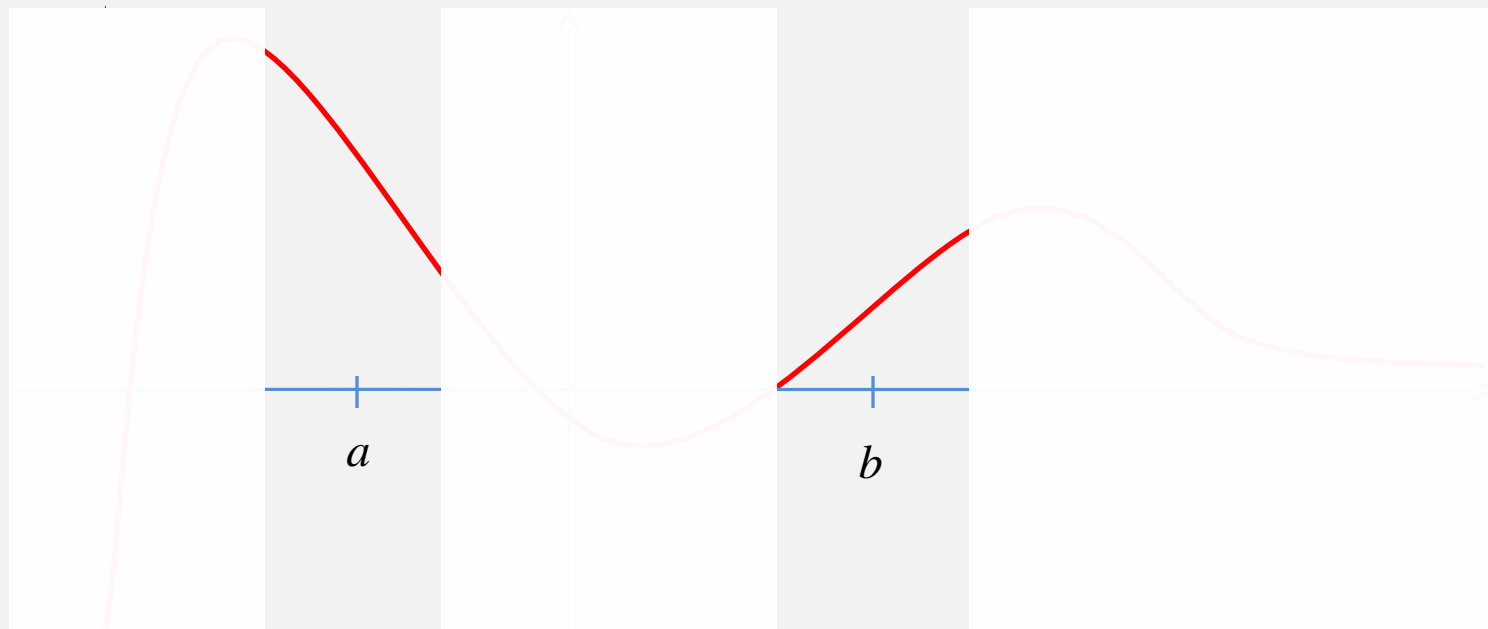
padajoča



Pri stalni temperaturi je tlak padajoča funkcija prostornine.

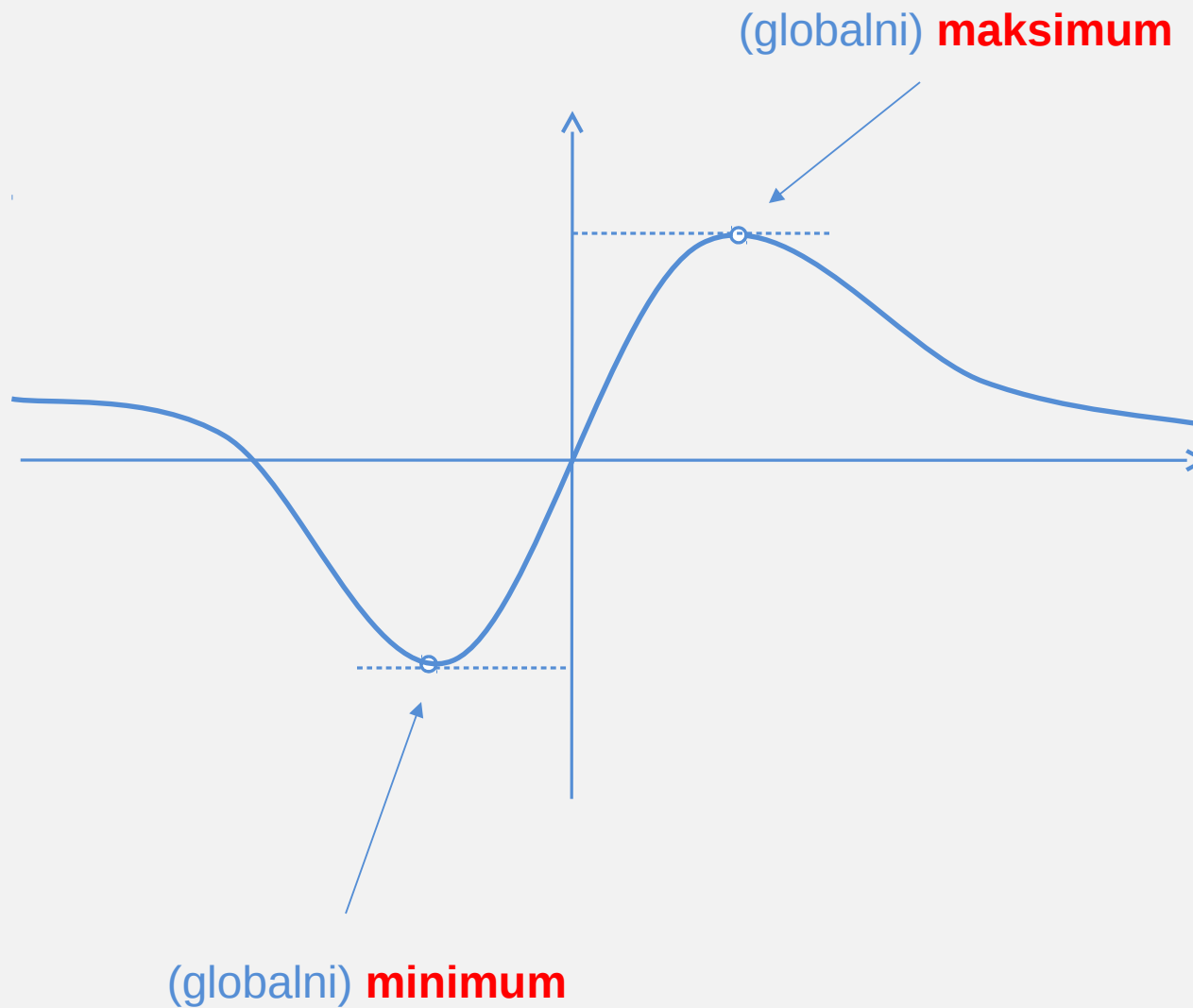
## Lokalno naraščanje in padanje funkcije

pri  $a$  je funkcija **padajoča**

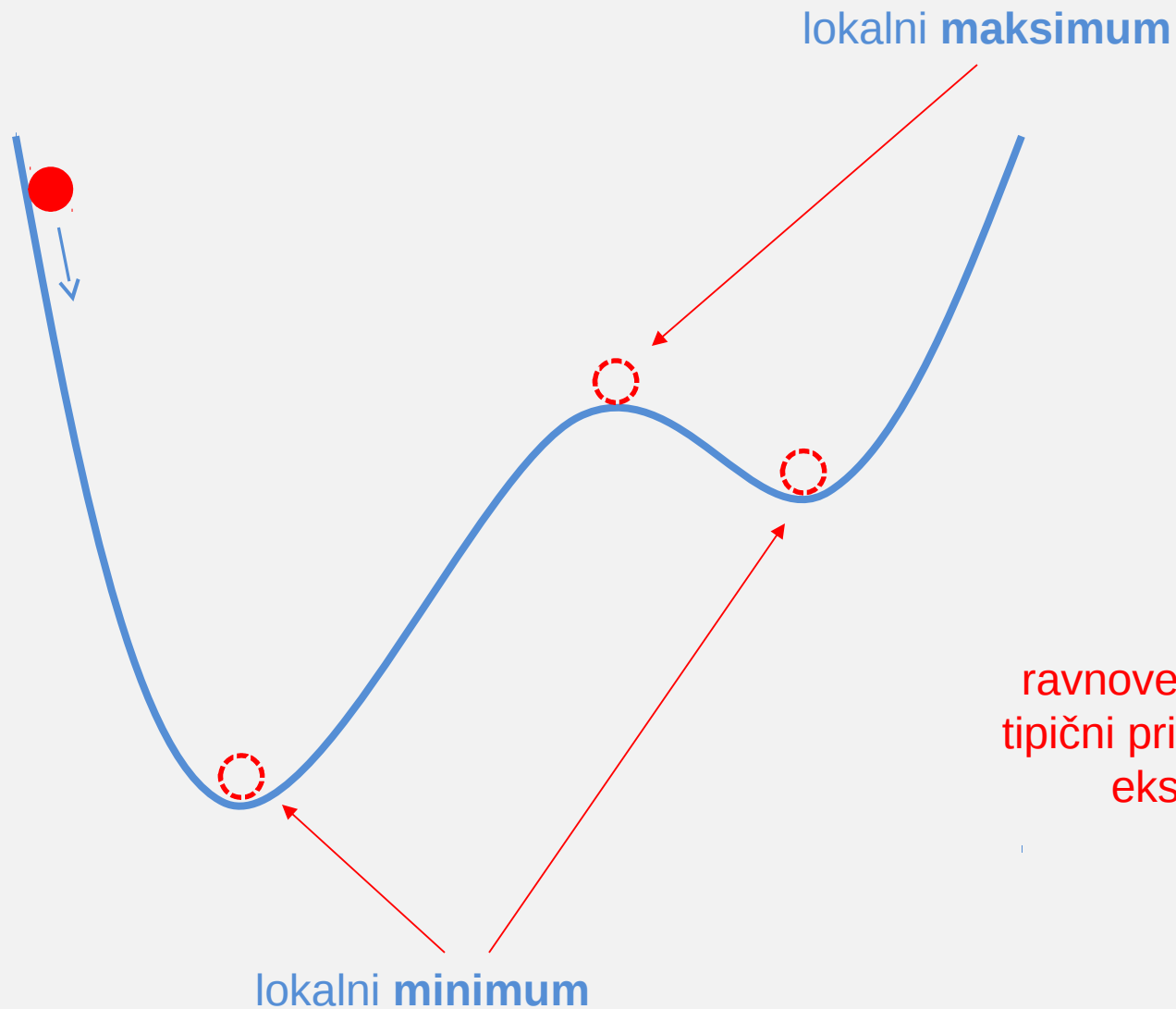


pri  $b$  je funkcija **naraščajoča**

## Globalni ekstremi



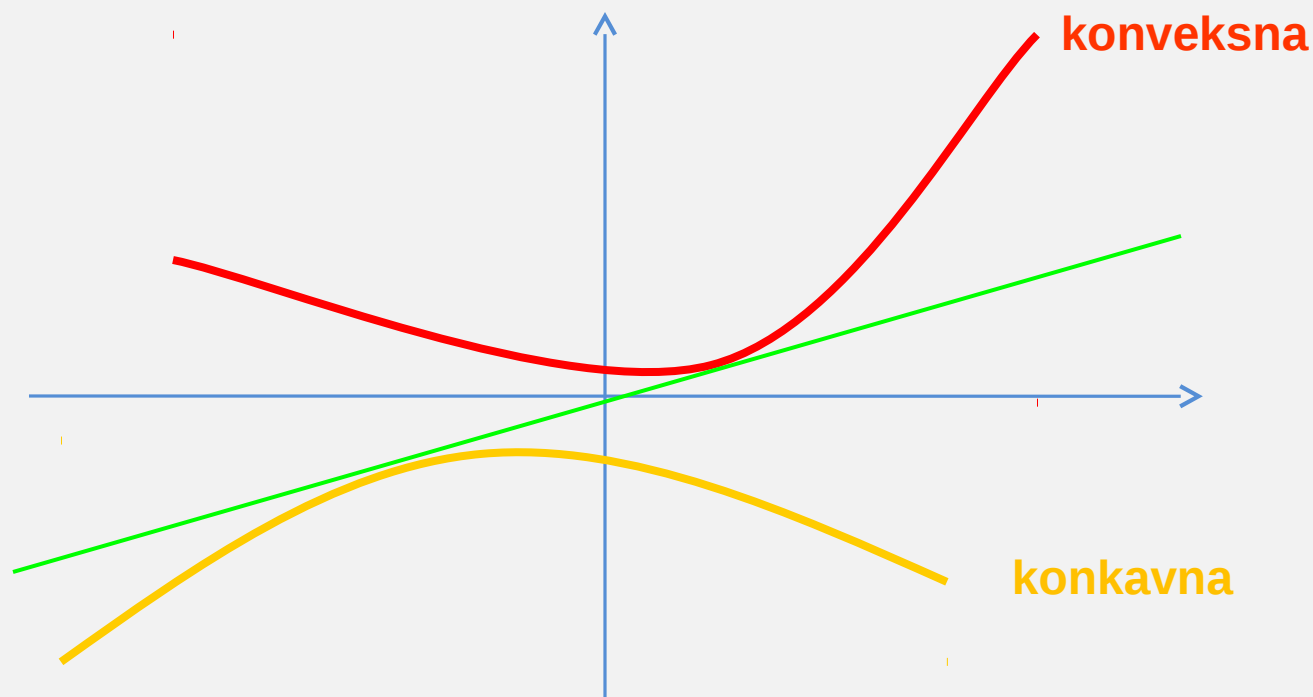
## Lokalni ekstremi



ravnovesne lege so  
tipični primeri lokalnih  
ekstremov

## Konveksnost in konkavnost

Funkcija je **konveksna**, če se njen graf krivi navzgor  
in **konkavna**, če se graf krivi navzdol.

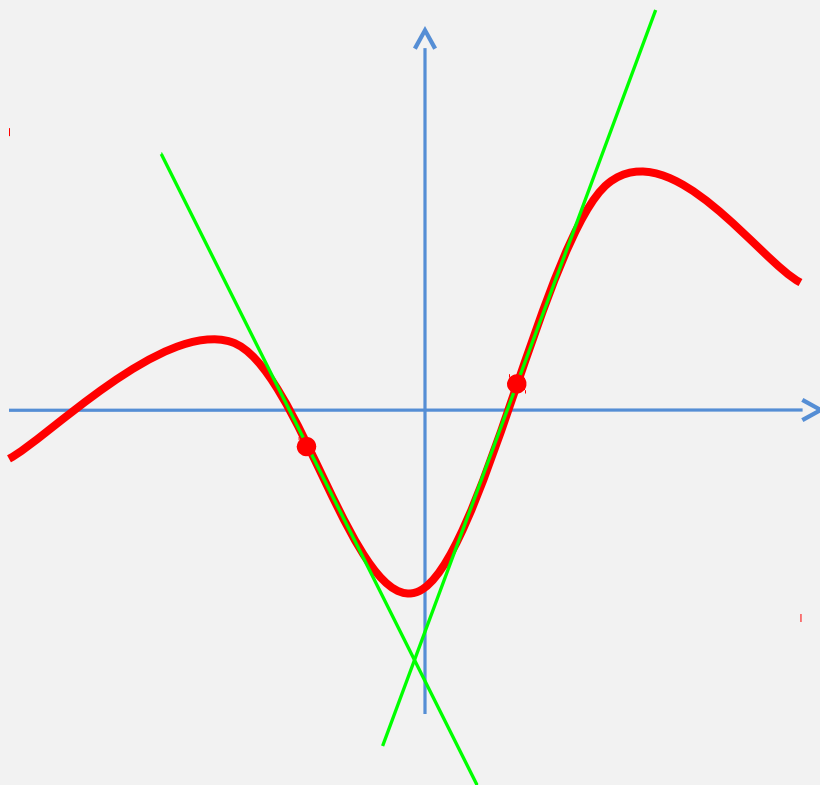


konveksnost grafa ponazarja  
pospeševanje procesa

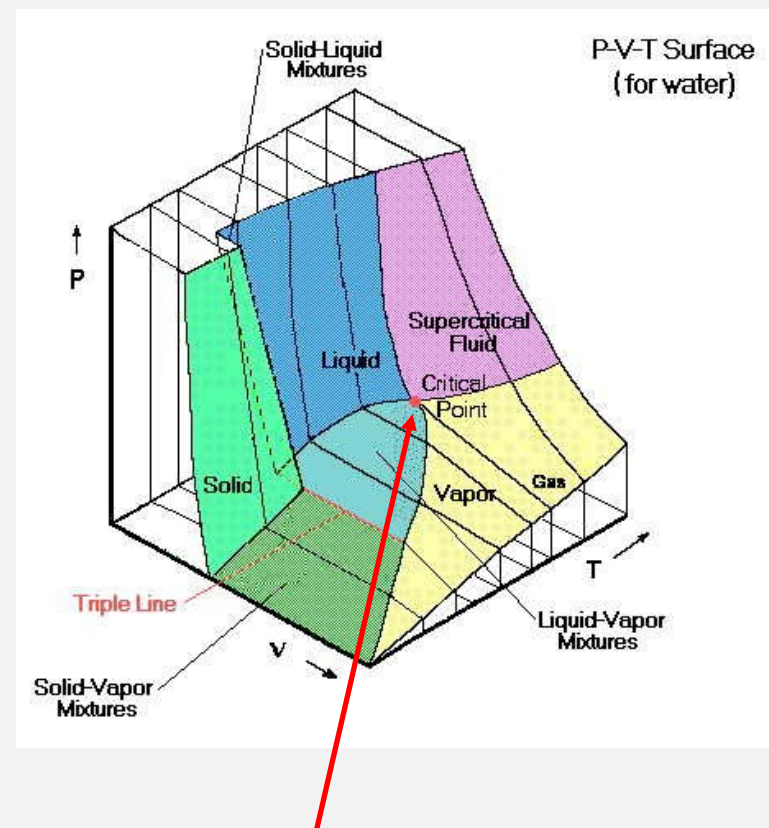
konkavnost grafa ponazarja  
pojemanje procesa

## Prevoji

**Prevoji** so točke, pri katerih funkcija preide iz konveksne v konkavno, ali obratno.



Prevoj je točka, pri kateri proces preide iz pospeševanja v zaviranje ali obratno.

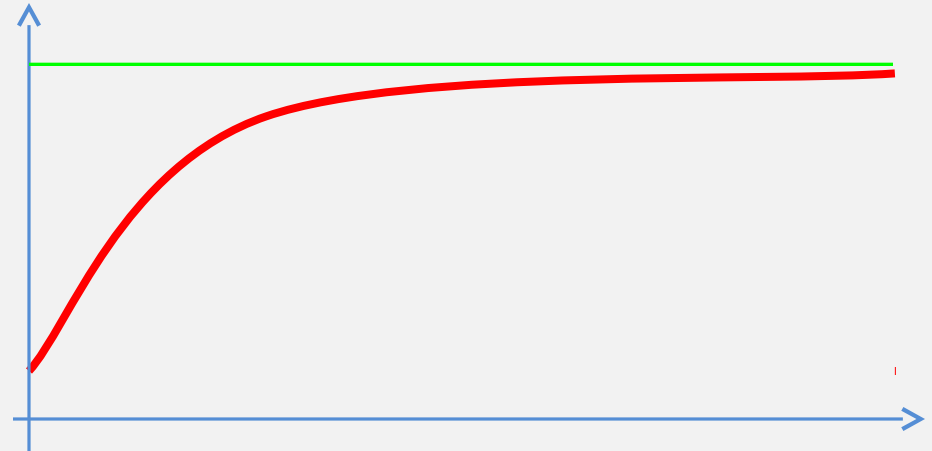


**Kritična točka snovi je prevoj na kritični izotermi.**

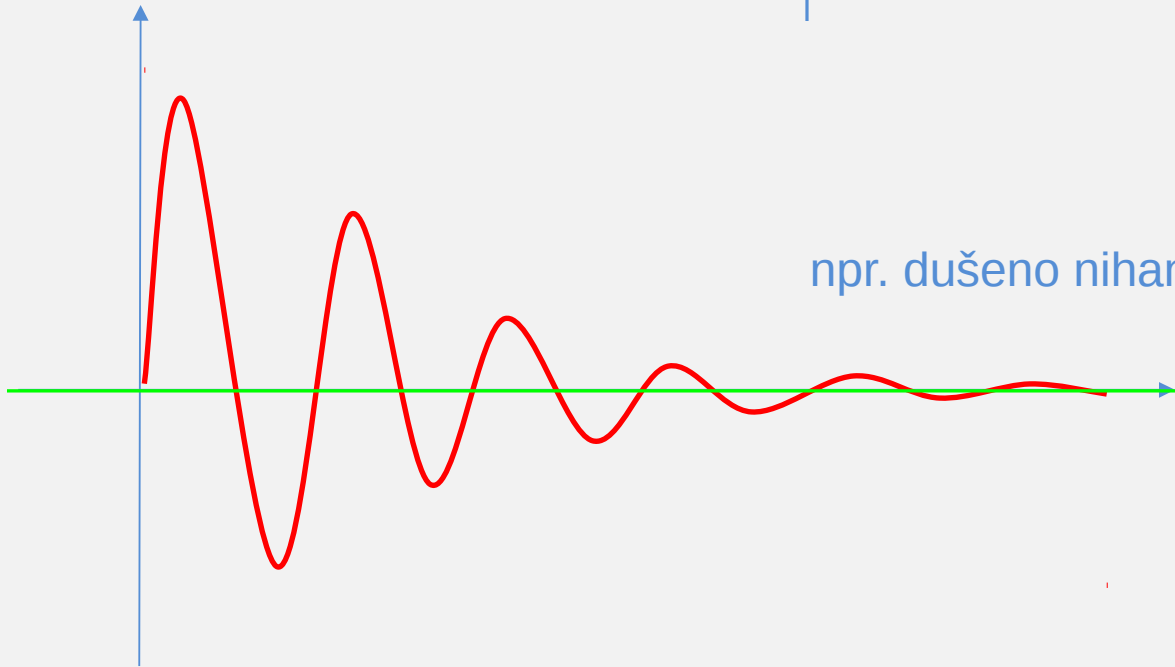
## Asimptote

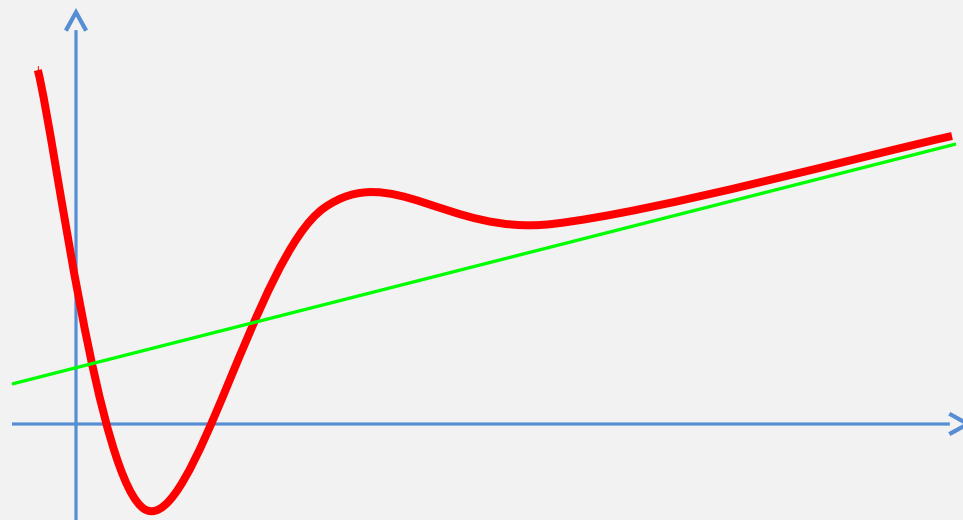
Vodoravna asimptota

npr. temperatura posode, ki se segreje le do temperature vira



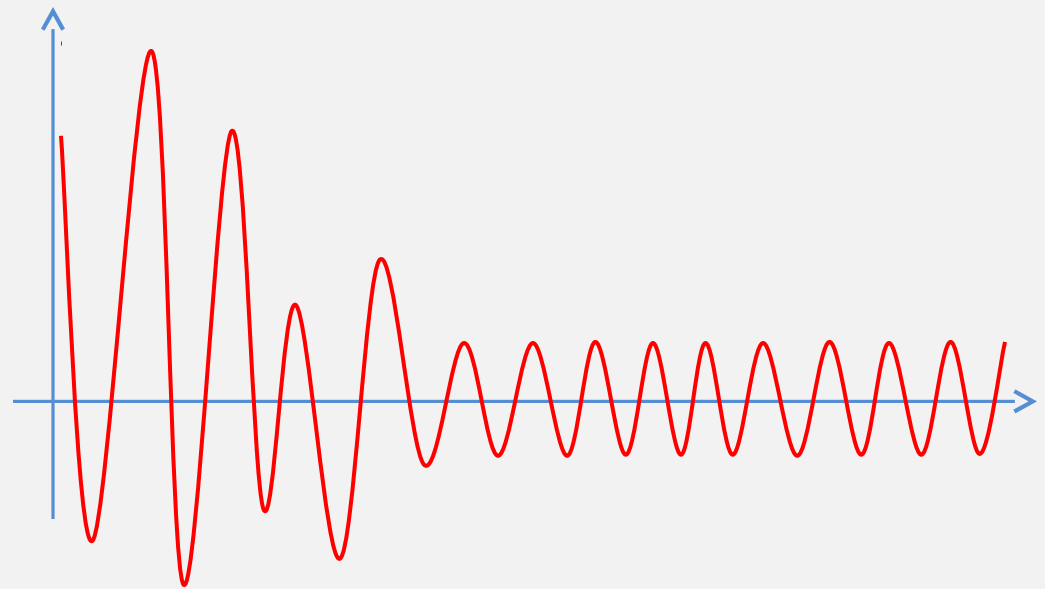
npr. dušeno nihanje





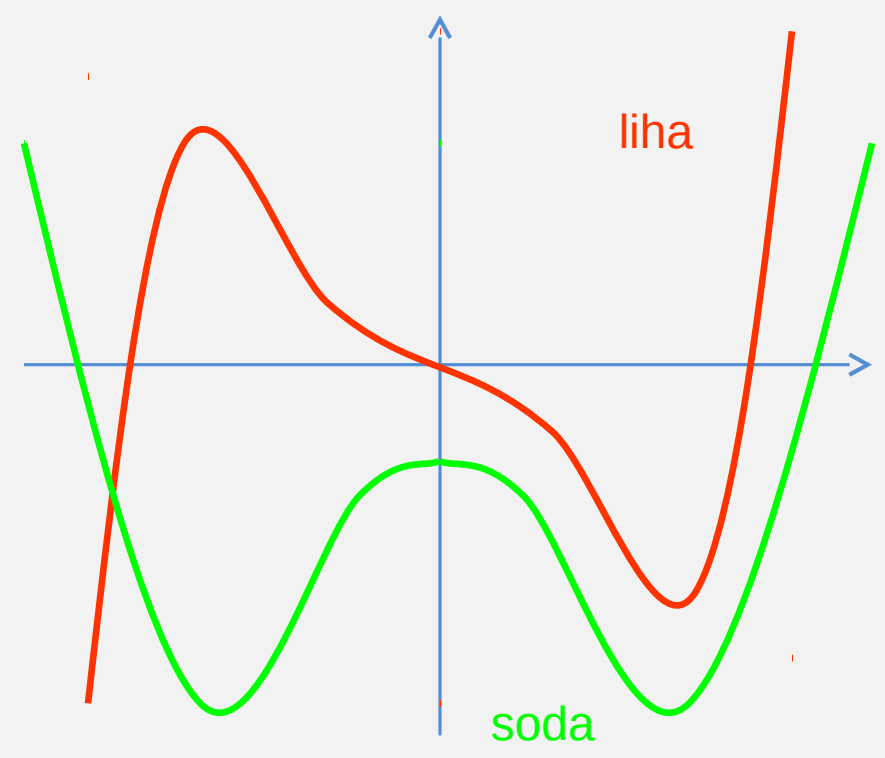
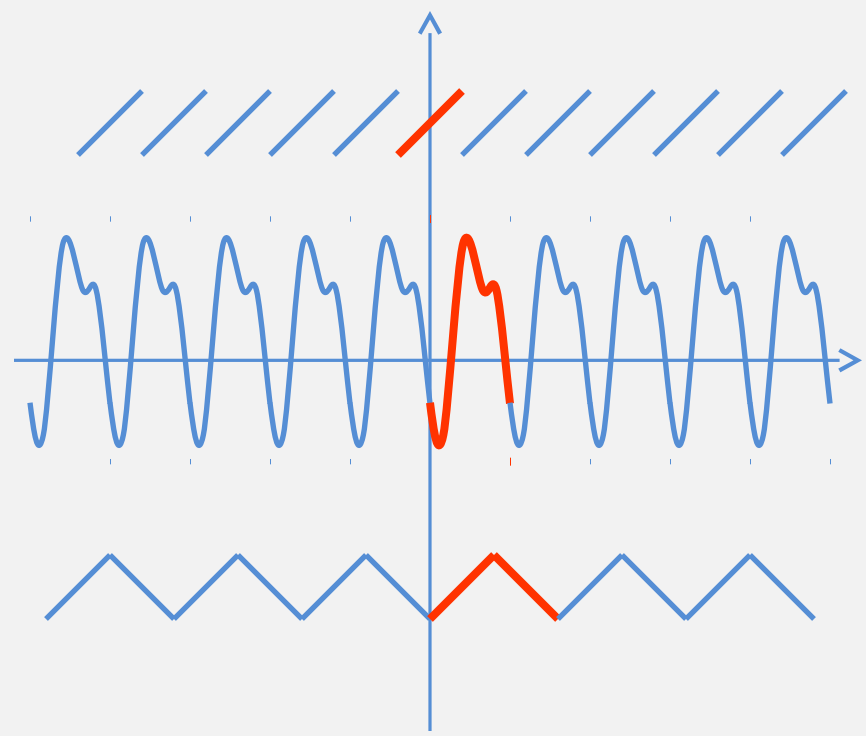
Linearna asimptota

Vsiljeno nihanje, asimptota je sinusoida





### Periodičnost in simetrija



## ELEMENTARNE FUNKCIJE

Polinomi

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 1$$

Racionalne funkcije

$$Q(x) = \frac{x^2 - 3x - 5}{x^3 + x + 1}$$

Algebrajske funkcije

$$A(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^2-1}}{x + \sqrt[5]{x^2} + \sqrt{x}}$$

Eksponentne

in

logaritmske funkcije

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{-x}$$

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Kotne

in

ločne funkcije

$$u(x) = \sin(2x - 1) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v(x) = \arcsin \frac{1+x}{1-x} \quad w(x) = \operatorname{arctg}(1+x^2)$$

Elementarne funkcije dobimo s pomočjo računskih operacij in sestavljanja iz osnovnih funkcij.

Osnovne funkcije:

potence  $x^n, n \in \mathbb{C}$

eksponentna  $e^x$

koreni  $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{C}$

logaritemska  $\ln x$

sinus

$\sin x$

arkus sinus

$\arcsin x$

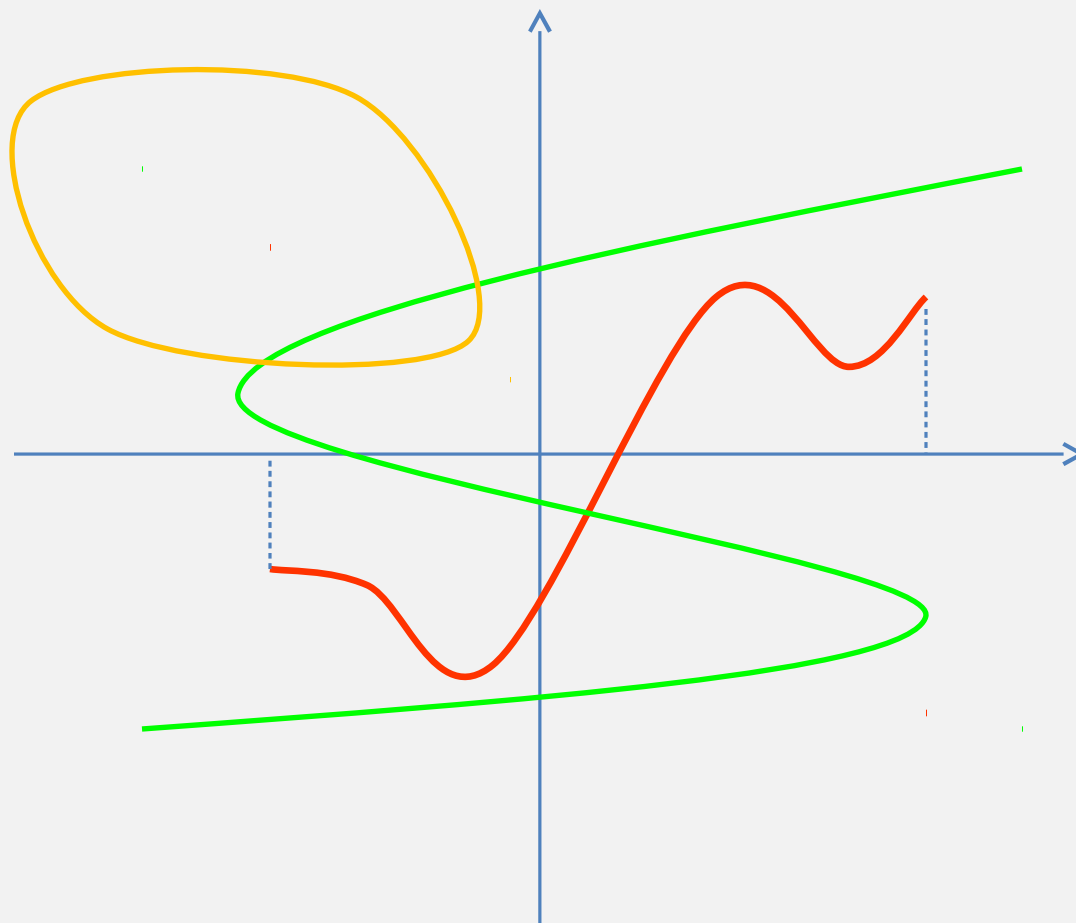
arkus tangens

$\operatorname{arctg} x$

## Funkcije podane z grafom

Funkcija  $f:A \rightarrow B$  je predpis, ki vsakemu argumentu priredi eno funkcijsko vrednost.

Krivulja v ravnini je graf neke funkcije če jo vsaka navpična premica seka največ enkrat.



## OBRATNE FUNKCIJE

$$f: A \rightarrow B$$

**Praslika**  $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$  (množica rešitev enačbe  $f(a) = b$ )

Predpis  $b \mapsto f^{-1}(b)$  določa funkcijo, če imajo množice  $f^{-1}(b)$  natanko en element za vse  $b \in B$ .

Tedaj je  $f$  **bijektivna**, predpis

$$f^{-1}: B \rightarrow A, \quad b \mapsto f^{-1}(b)$$

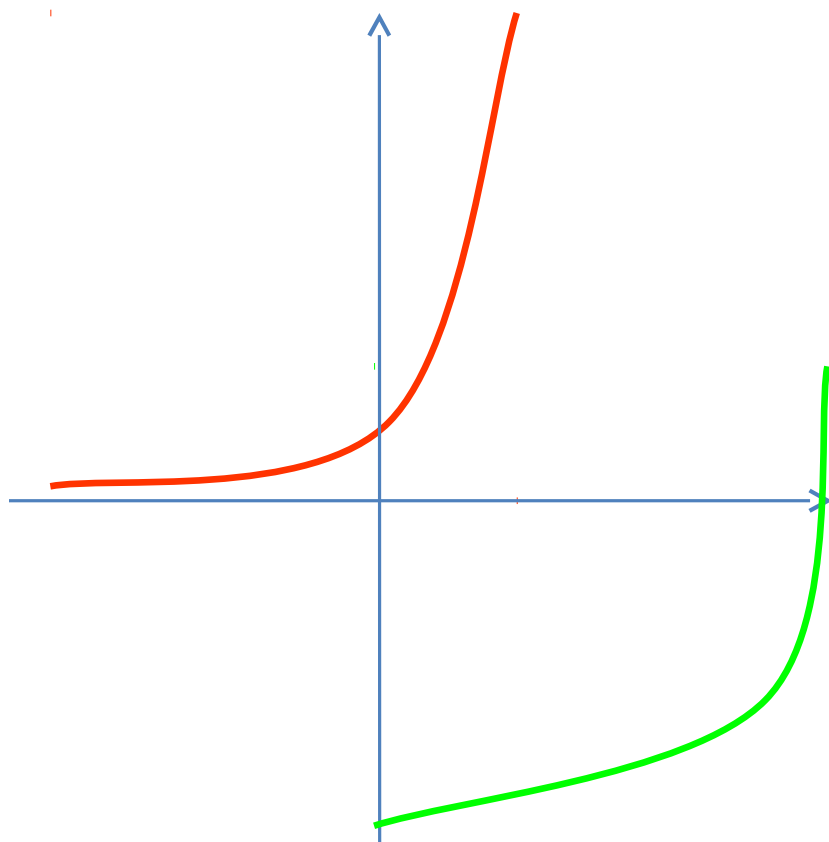
pa je **obratna** (inverzna) funkcija za  $f$ .

$f$  je **surjektivna**, če imajo  $f^{-1}(b)$  vsaj en element.

$f$  je **injektivna**, če imajo  $f^{-1}(b)$  največ en element.

Kadar funkcija ni bijektivna, lahko včasih zožimo njeno domeno ali kodomeno in tako dobimo sorodno funkcijo, ki je bijektivna.

## EKSPONENTNA FUNKCIJA



injektivna



surjektivna



Zožimo kodomeno na  $(0, +\infty)$ .

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  je  
bijektivna.

Obratna funkcija je

$$\exp^{-1} = \ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

## TANGENS

injektivna



surjektivna



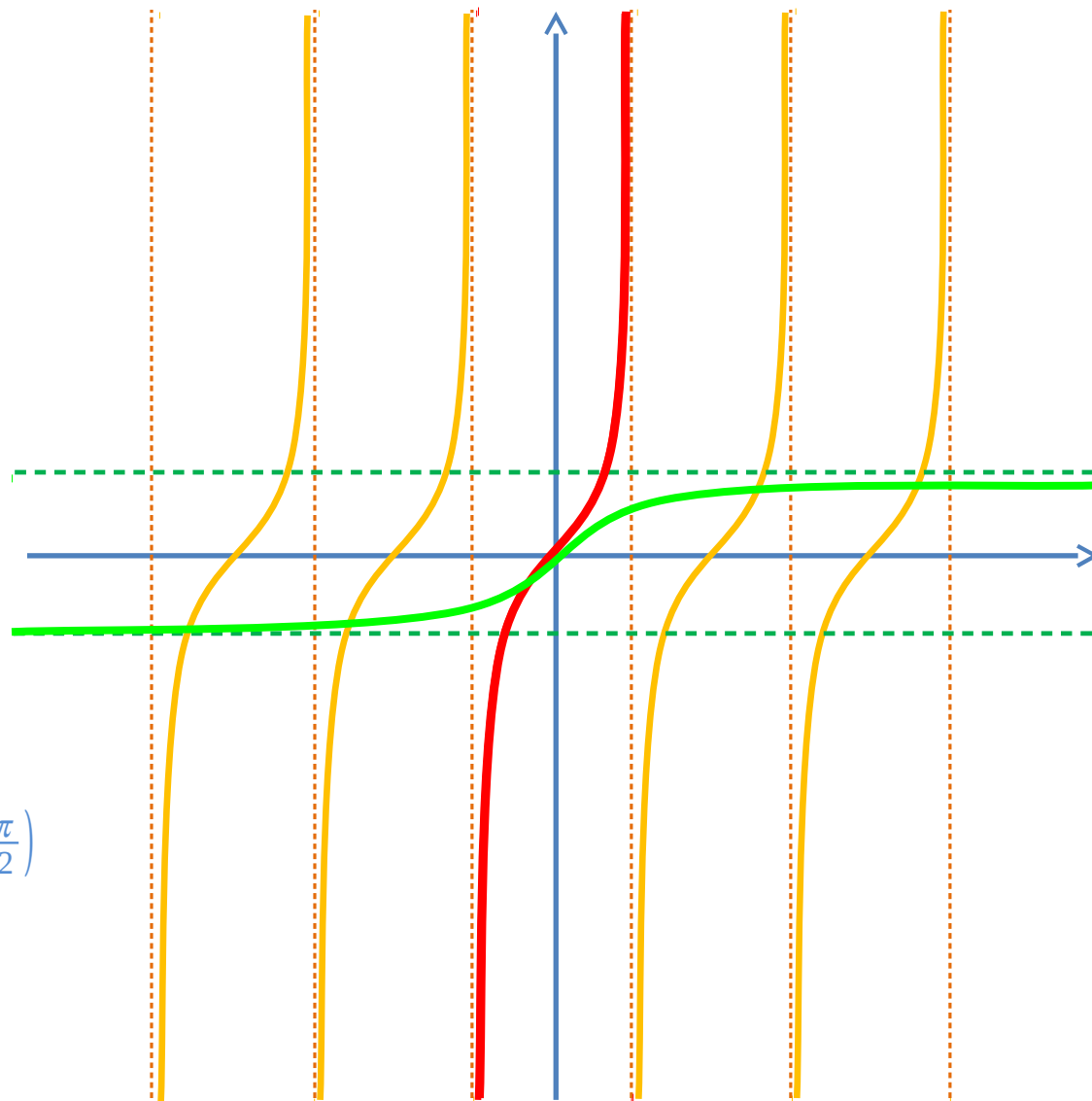
Zožitvev  $\text{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$

je bijektivna.

Obratna funkcija

$\text{arc tg} = \text{tg}^{-1} : \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

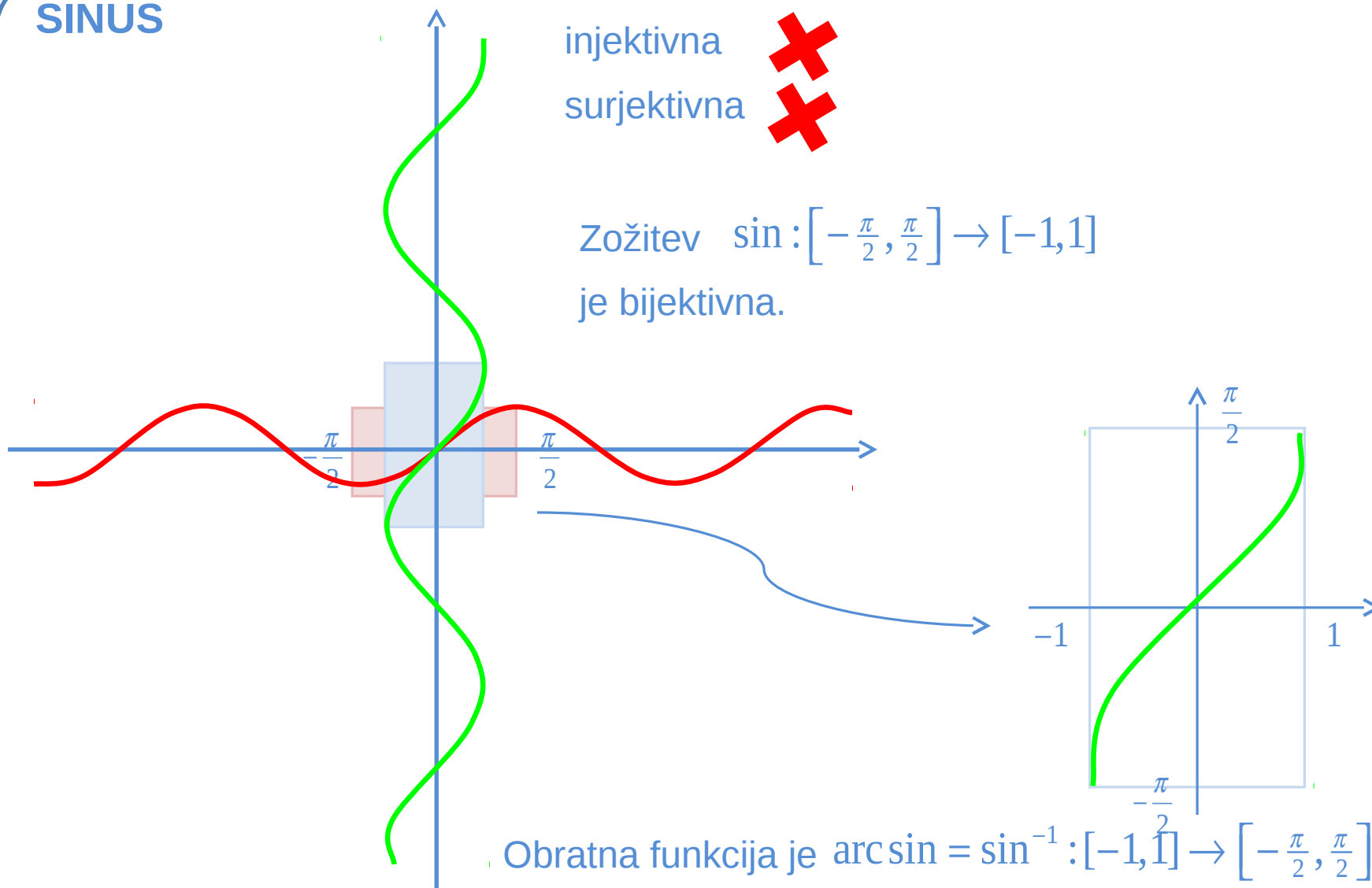
je strogo naraščajoča, ima  
vodoravni asimptoti  $y = \pm\pi/2$



## SINUS

injektivna **×**  
 surjektivna **×**

Zožitev  $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$   
 je bijektivna.



Obratna funkcija je  $\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



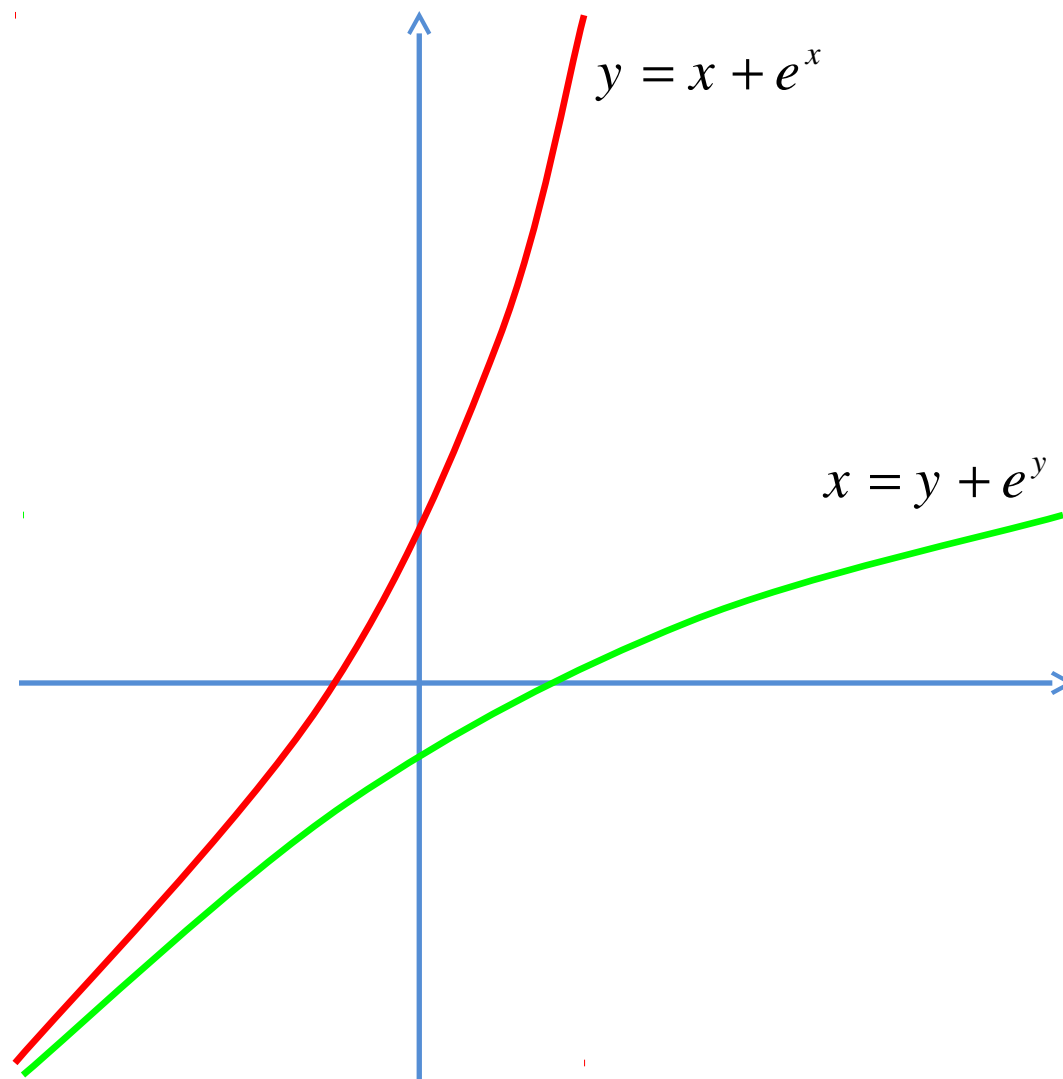
$$f(x) = x + e^x$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je bijekcija

Obratna funkcija

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ni elementarna funkcija.



## FUNKCIJSKE ENAČBE, IMPLICITNE FUNKCIJE

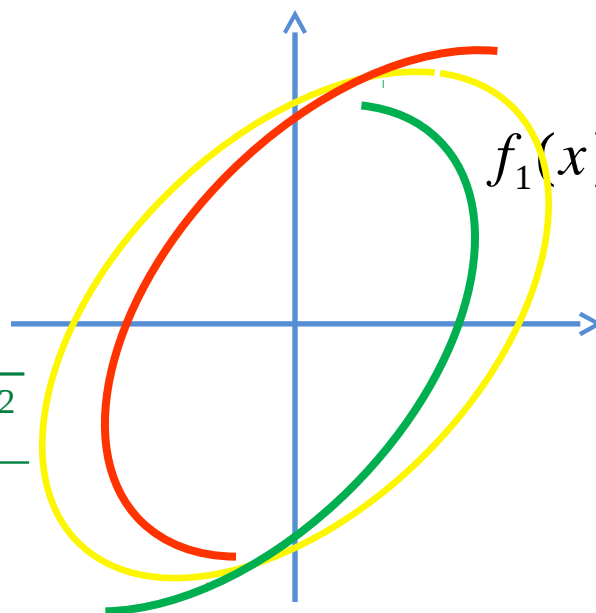
$$F(x,y)=0$$

$f: A \rightarrow B$  je **rešitev funkcijske enačbe**, če je  $F(x,y)$  definirana za  $x \in A$ ,  $y \in B$  in je  $F(x,f(x))=0$  za vse  $x \in A$ .

Za funkcijo  $f$  pravimo, da je podana **implicitno**.

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

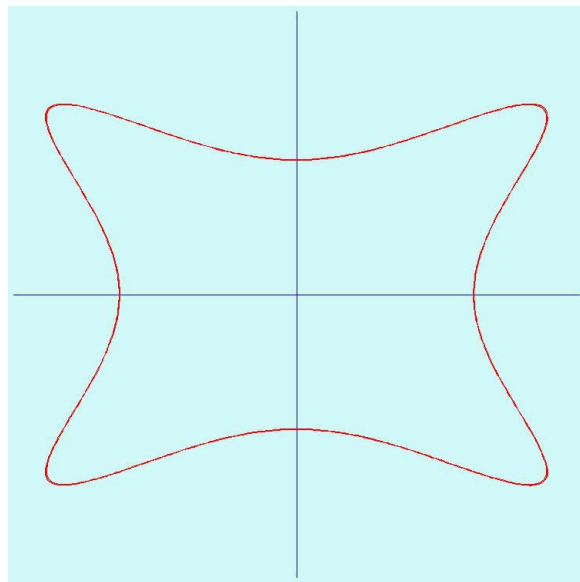
$$f_2(x) = \frac{-x - \sqrt{12 - 3x^2}}{2}$$



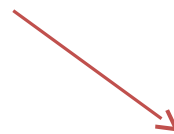
$$f_1(x) = \frac{-x + \sqrt{12 - 3x^2}}{2}$$

$$f_1, f_2 : [-2, 2] \rightarrow$$

$$x^4 - 3x^2y^2 + 3y^4 = 1$$



Implicitna enačba določa funkcijo na odseku med dvema navpičnima tangentama

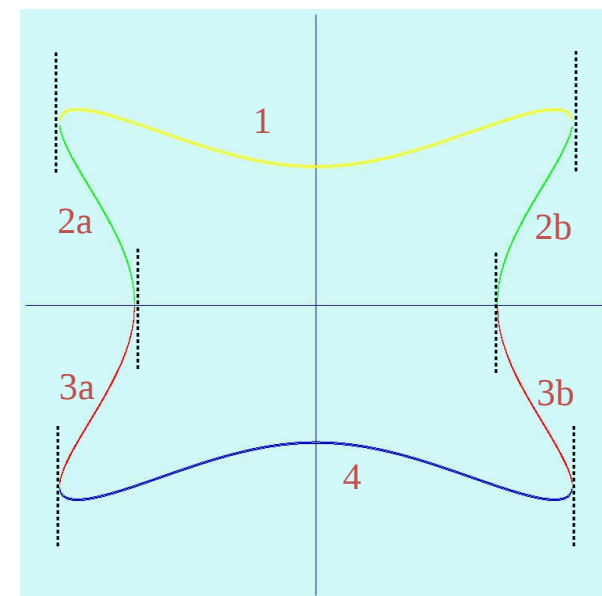


$$f_1(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + \sqrt{12 - 3x^4}}{6}}$$

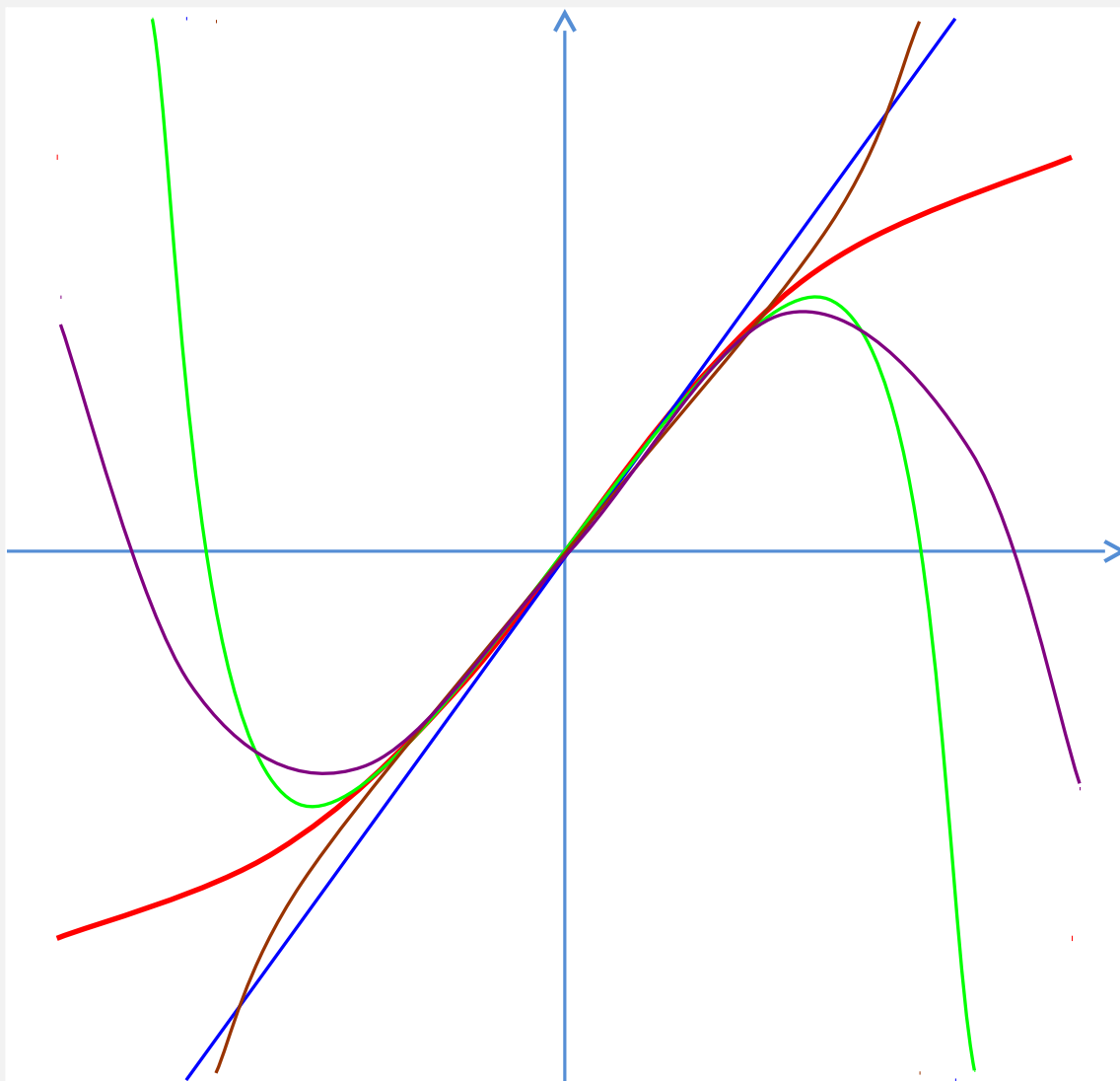
$$f_2(x) = \sqrt{\frac{3x^2 - \sqrt{12 - 3x^4}}{6}}$$

$$f_3(x) = -\sqrt{\frac{3x^2 - \sqrt{12 - 3x^4}}{6}}$$

$$f_4(x) = -\sqrt{\frac{3x^2 + \sqrt{12 - 3x^4}}{6}}$$



## ZAPOREDJA FUNKCIJ

Taylorjevi približki za funkcijo  $\text{arctg}(x)$ 

$$f_1(x) = x$$

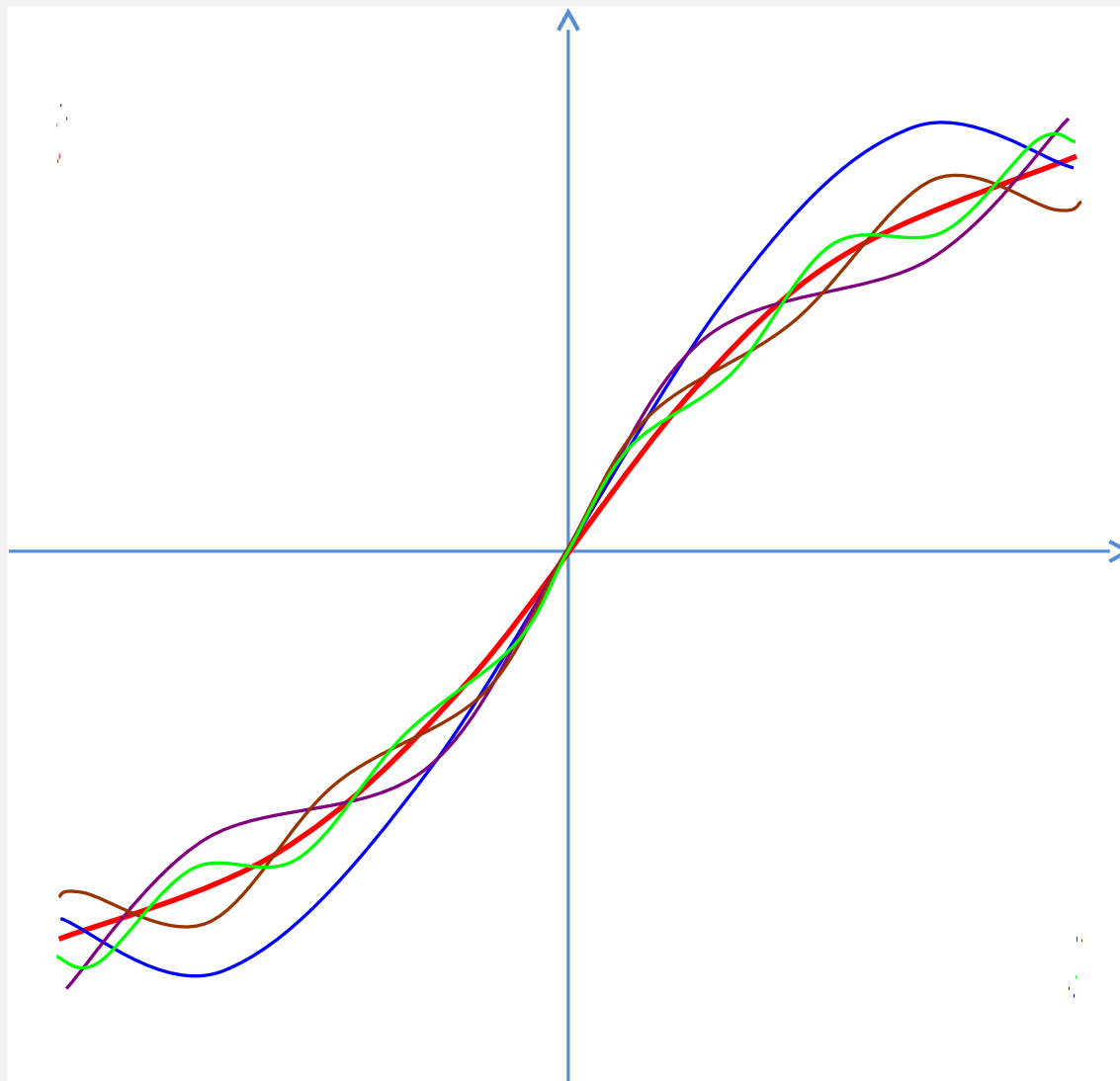
$$f_2(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

$$f_3(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

$$f_4(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$



$$f(x) = \text{arctg}(x)$$



$$f_1(x) = 1.19 \cdot \sin(x)$$

$$f_2(x) = 1.19 \cdot \sin x - 0.38 \cdot \sin 2x + 0.29 \cdot \sin 3x$$

$$f_3(x) = 1.19 \cdot \sin x - 0.38 \cdot \sin 2x + 0.29 \cdot \sin 3x - 0.20 \cdot \sin 4x + 0.16 \cdot \sin 5x$$

$$f_4(x) = 1.19 \cdot \sin x - 0.38 \cdot \sin 2x + 0.29 \cdot \sin 3x - 0.20 \cdot \sin 4x + 0.16 \cdot \sin 5x - 0.13 \cdot \sin 6x + 0.12 \cdot \sin 7x$$



$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

Fourierjevi približki za funkciju  $\operatorname{arctg}(x)$