MATEMATIKA 1

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM
BIOKEMIJA
1. LETNIK

LIMITE IN ZVEZNOST

LIMITA ZAPOREDJA

Število L je limita zaporedja (x_n), če so za dovolj velike n števila x_n blizu L.

Natančneje, L je limita zaporedja (x_n), če velja:

za vsako pozitivno število ε obstaja tako naravno število N, da je $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, za vse $n>N$.

Pišemo $L = \lim_{n} x_n$

LIMITA FUNKCIJE

Število L je limita funkcije f pri točki a če velja:

za vsako pozitivno število ε obstaja interval I okoli točke a, da je $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ za vse x iz I.

Pišemo $L = \lim_{x \to a} f(x)$

Limito pri $a=+\infty$ interpretiramo tako, da za interval I vzamemo primeren poltrak $(t, +\infty)$.
Tedaj lahko limito zaporedja gledamo kot posebni primer limite funkcije $x(n)$, ko gre *n* proti $+\infty$.

ZAPOREDJA, PODANA S REKURZIVNIM PRAVILOM

$x_0=1$ začetni člen

$x_{n+1}=x_n+3$ rekurzivno pravilo

$x_1=1+3=4$

$x_2=4+3=7$

$x_3=7+3=10$

. . . 1,4,7,10,… aritmetično zaporedje

$x_0=1$ začetni člen

$x_{n+1}=3x_n$ rekurzivno pravilo

$x_1=3$

$x_2=9$

$x_3=27$

. . . 1,3,9,27,… geometrično zaporedje

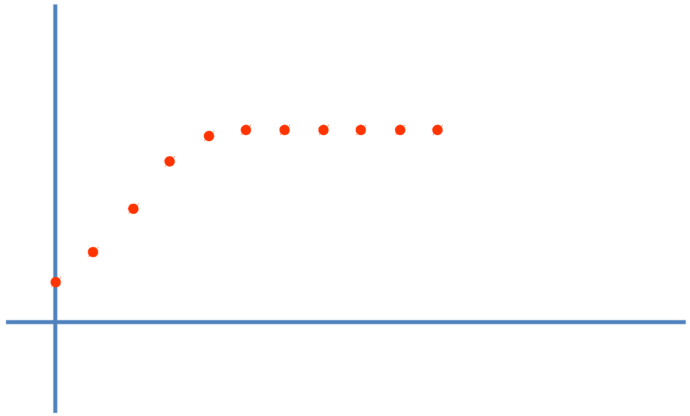
$x_0=0.1 \qquad x_{n+1}=2x_n(1-x_n)$

$x_1=2 \cdot 0.1 \cdot (1-0.1)=0.18$

$x_2=2 \cdot 0.18 \cdot (1-0.18)=0.2952$

$x_3=2 \cdot 0.2952 \cdot (1-0.2952)=0.41611392$

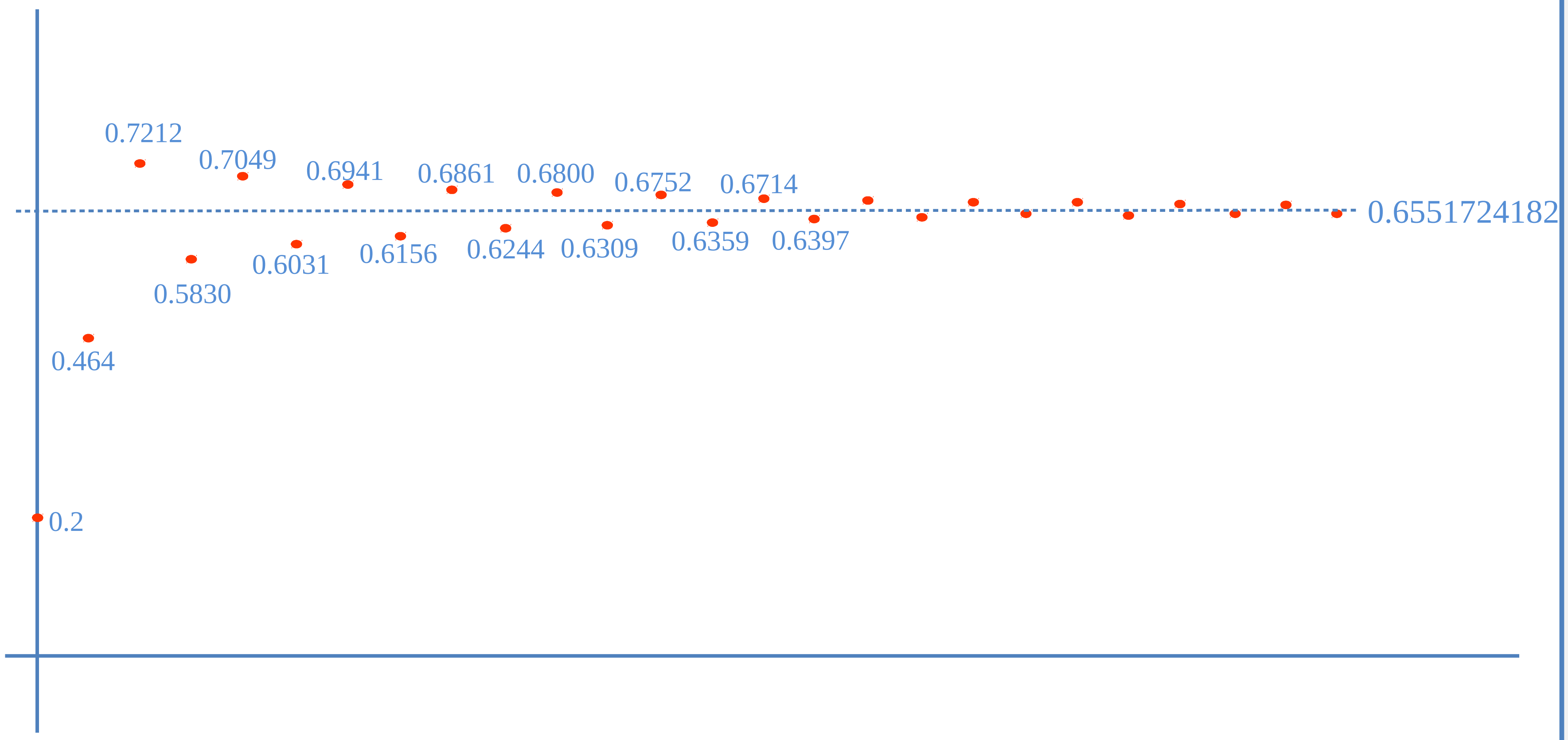
0.1, 0.18, 0.2952, 0.41611392, ... $\to$?



0.1
0.18
0.2952
0.4161
0.4859
0.4996
0.4999
0.5000
0.5000
0.5000
0.5000
. . .

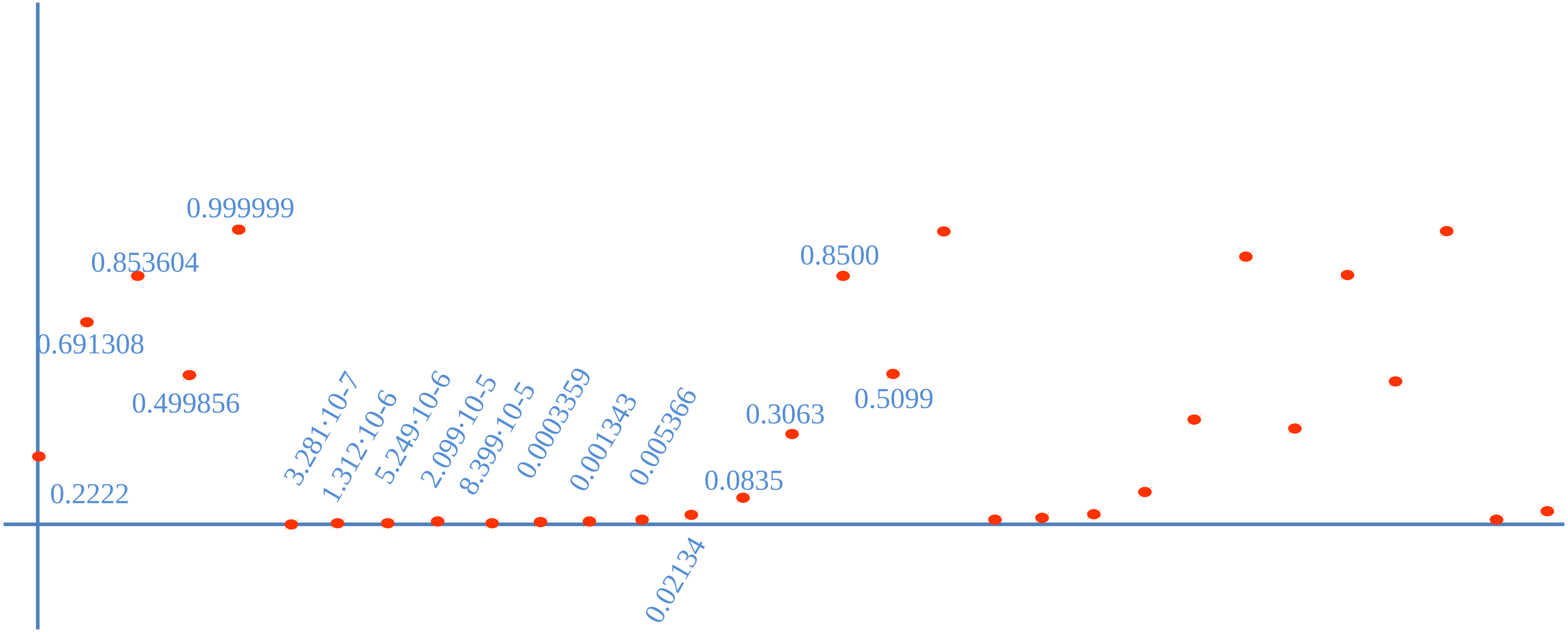
Limita je 0.5

$x_0 = 0.2 \qquad x_{n+1} = 2.9\, x_n(1 - x_n)$



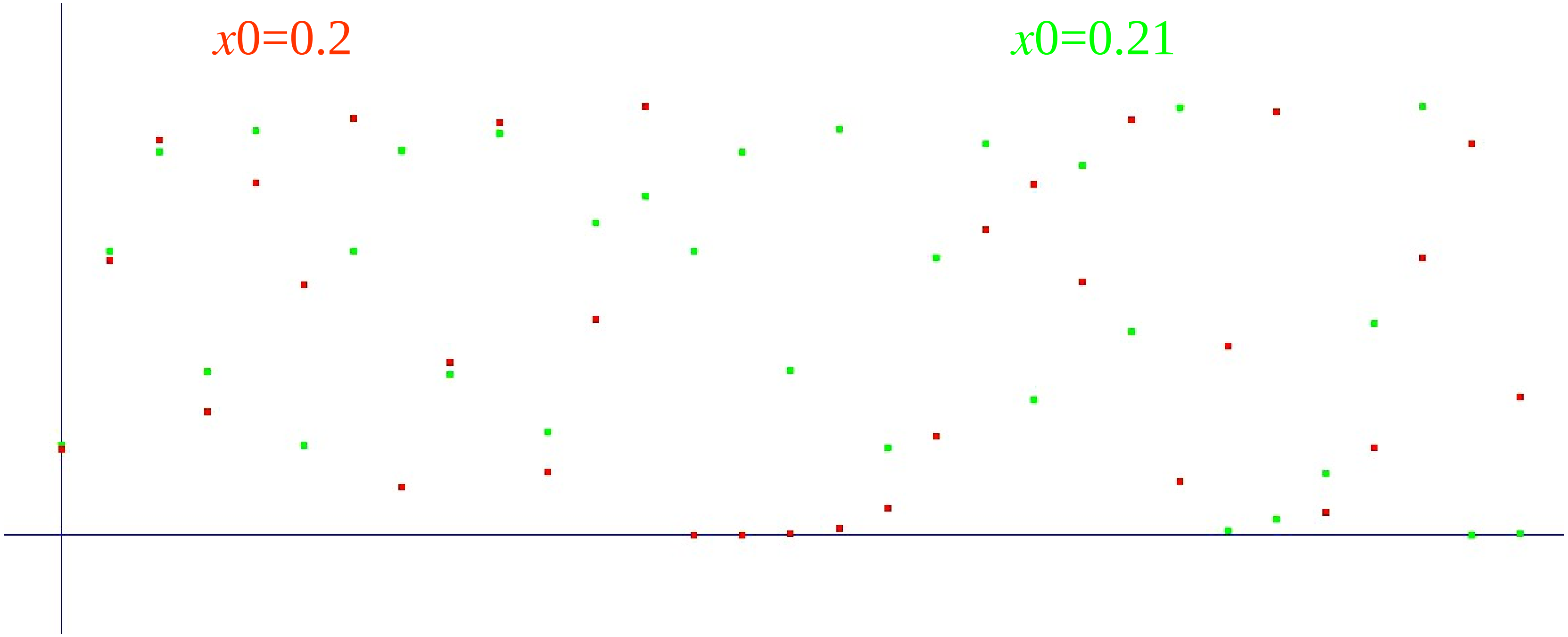
Limita je 19/29!

$x_0 = 0.2222$ $\quad x_{n+1} = 4\,x_n(1 - x_n)$



Zaporedje je kaotično – nima limite!

$x_{n+1} = 4\, x_n(1-x_n)$



Zaporedje je zelo občutljivo na začetno vrednost (in torej tudi na računske napake)!

NARAŠČAJOČA ZAPOREDJA IMAJO LIMITO

Zaporedje (x_n) je naraščajoče, če je $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots$

Če je (x_n) navzgor omejeno, ima natančno zgornjo mejo L.

Pokažimo, da je $L = \lim x_n$

- Izberimo pozitiven ε: potem je L-ε manj od L.
- Zaradi lastnosti natančne zgornje meje obstaja tak N, da je $x_N > L-\varepsilon$.
- (x_n) je naraščajoče, zato za vsak $n \ge N$ velja $L-\varepsilon < x_n \le L$.

- Za poljuben ε so pozni členi zaporedja ε-blizu L, torej je $L = \lim x_n$.

Vsako naraščajoče, navzgor omejeno zaporedje ima limito.

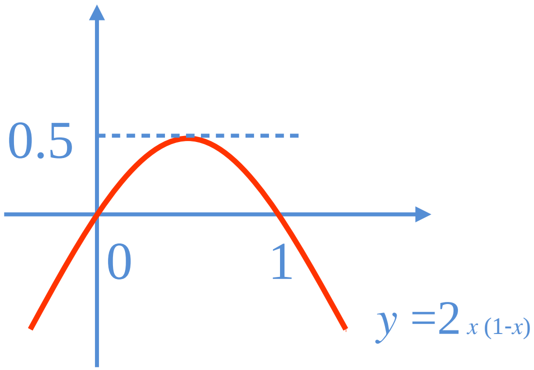
Če je naraščajoče zaporedje neomejeno, rečemo, da je njegova limita $+\infty$.

Analogno premislimo primer padajočih zaporedij.

$x_0 = 0.2$ $\quad$ $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$

$x_{n+1} - x_n = 2x_n(1-x_n) - x_n = x_n(1-2x_n)$

Če je $0 \leq x_n \leq 0.5$, je $x_n \leq x_{n+1}$.



Povrhu, če je $0 \leq x_n \leq 0.5$,

je $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n) \leq 0.5$

Zaporedje je naraščajoče in omejeno, torej ima limito.

RAČUNSKA PRAVILA ZA LIMITE

(veljajo za zaporedja in za funkcije)

Če je $\lim f_1 = L_1, \quad \lim f_2 = L_2,$

potem je $\lim\left(f_1 + f_2\right) = L_1 + L_2$

$$\lim\left(f_1 - f_2\right) = L_1 - L_2$$

$$\lim\left(f_1 \times f_2\right) = L_1 \times L_2$$

$$\lim \frac{f_1}{f_2} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{če je } L_2 \neq 0)$$

Povrhu, če je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L_1$ in je $\lim\limits_{x\to L_1} f_2(x) = L_2,$ potem je $\lim\limits_{x\to a} f_2\left(f_1(x)\right) = L_2$

Pravila smemo uporabiti le kadar limite obstajajo!

ZVEZNE FUNKCIJE

Funkcija f je **zvezna** pri točki a, če je f definirana v a in je $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Funkcija f je zvezna, če je zvezna pri vseh točkah kjer je definirana.

Primeri: vse elementarne funkcije, večina funkcij, ki nastopajo pri modeliranju naravnih procesov.

Alternativna definicija:

Funkcija f je zvezna pri točki a, če je v tej točki definirana in če za vsak pozitiven ε obstaja tak interval I okoli točke a, da je $|f(a)-f(x)|<\varepsilon$ za vse $x \in I$.

Intuitivno: funkcija je zvezna pri a, če je za x, ki je blizu a, vrednost $f(x)$ blizu $f(a)$.

Funkcija n spremenljivk je zvezna pri neki točki v $\mathbb{R}^n$ če je v tej točki definirana in se njena limita pri tej točki ujema s funkcijsko vrednostjo.

(npr. $f(a,b) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$)

ZVEZNOST ELEMENTARNIH FUNKCIJ

$f, g: A \to B$ zvezni funkciji

$$\lim_{x\to a}\left(f+g\right)(x)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)=\left(f+g\right)(a)$$

$\Rightarrow$ $f+g$ je zvezna.

Podobno sklepamo za ostale računske operacije.

$f: A \to B$, $g: B \to C$ zvezni funkciji

$$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right)=g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)=g\left(f(a)\right)$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ je zvezna.

Vse osnovne funkcije so zvezne, računske operacije in sestavljanje funkcij pa ohranjajo zveznost.

Vse elementarne funkcije so zvezne.

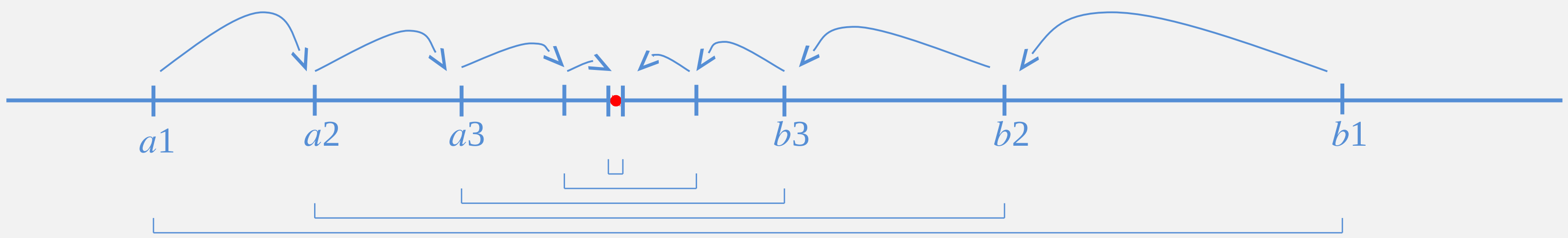
PRINCIP SENDVIČA

Če se v zaporedju vloženih zaprtih intervalov

$$[a1,b1] \supseteq [a2,b2] \supseteq [a3,b3] \supseteq \ldots$$

dolžine intervalov manjšajo proti 0 (tj. $\lim(bn-an)=0$),

potem je v njihovem preseku natanko ena točka



Leva krajišča intervalov so naraščajoče omejeno zaporedje, zato imajo limito A. Desna krajišča so padajoče omejeno zaporedje in imajo limito B. Presek vseh intervalov je ravno interval $[A,B]$.

Ne more biti $A < B$, ker v zaporedju obstaja interval krajši od $B-A$. Zato je $A=B$ in v preseku je samo ena točka.

LASTNOSTI ZVEZNIH FUNKCIJ

Vsaka zvezna funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je omejena

Sklepali bomo s protislovjem in ovrgli možnost, da je f neomejena.

$[a,b]$ razpolovimo: če bi bila f neomejena, bi morala biti neomejena vsaj na eni izmed polovic. To polovico še naprej razpolovimo in sklepamo enako: vsaj na enem delu je f neomejena. Z nadaljevanjem postopka dobimo padajoče zaporedje intervalov na katerih je f neomejena in je vsak polovica prejšnjega, torej gredo njihove širine proti 0.

Naj bo p točka, ki je po principu sendviča presek teh intervalov. Po konstrukciji je f neomejena na vsakem intervalu, ki vsebuje p. Po drugi strani je f zvezna pri p, zato na nekem intervalu okoli p velja $f(x)\in[f(p)-1, f(p)+1]$. Dobili smo, da je na nekem intervalu okoli p funkcija f hkrati omejena in neomejena.

Privzetka, da je f zvezna in obenem neomejena si nasprotujeta. Torej, če je f zvezna, potem mora biti omejena.

Vsaka zvezna funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zavzame maksimum in minimum.

Vemo že, da je zaloga vrednosti funkcije f omejena, zato ima natančno zgornjo mejo M. Denimo, da f ne doseže vrednosti M v nobeni točki intervala $[a,b]$. Potem predpis

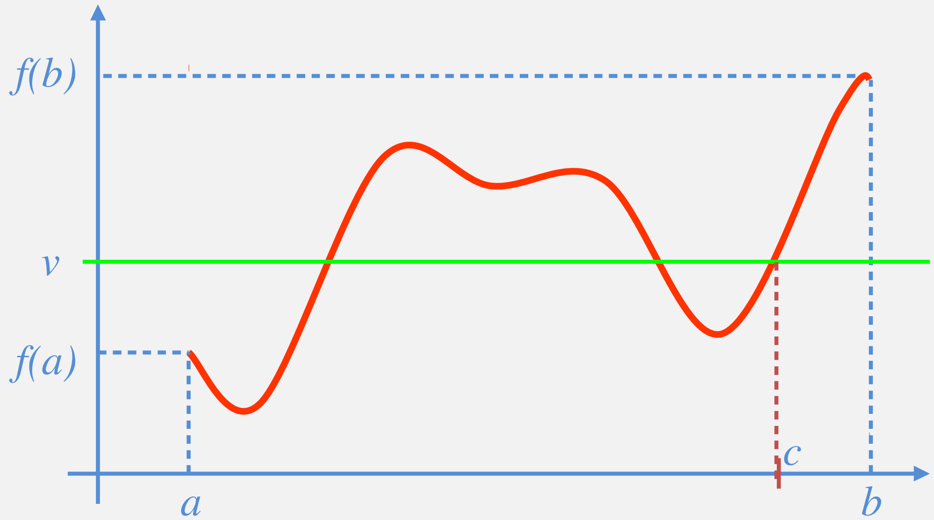
$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$$

podaja zvezno funkcijo $g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Obenem je razlika $M-f(x)$ poljubno blizu 0, zato je funkcija g neomejena. To pa je v protislovju z ugotovitvijo, da je g zvezna, zato sklepamo, da je $f(x)=M$ za nek $x\in[a,b]$, torej f zavzame maksimum M na $[a,b]$.

Podobno sklepamo, da f zavzame tudi minimum na intervalu $[a,b]$.

Zvezna funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom.

Privzemimo $f(a)<f(b)$ in izberimo neko vmesno vrednost v: $f(a)<v<f(b)$.



Množica vseh $x\in[a,b]$ za katere velja $f(x)<v$ je neprazna in omejena, zato ima natančno zgornjo mejo, ki jo označimo s c.

Trdimo $f(c)=v$.

Res, $f(c)$ ne more biti večji od v, saj so poljubno blizu c točke v katerih so vrednosti f manjše od v.

Po drugi strani pa $f(c)$ ne more biti niti manjši od v, saj so v vseh točkah intervala, ki so desno od c vrednosti f večje od v.

Ostane le še možnost $f(c)=v$, kar pomeni, da na poljubnem intervalu znotraj področja definicije funkcija f zavzame vse vmesne vrednosti. Posebej to velja za vse vrednosti med minimumom in maksimumom.

Zvezna funkcija definirana na zaprtem intervalu zavzame minimum, maksimum ter vse vmesne vrednosti.

Njena zaloga vrednosti je zaprti interval $[\min f, \max f]$.

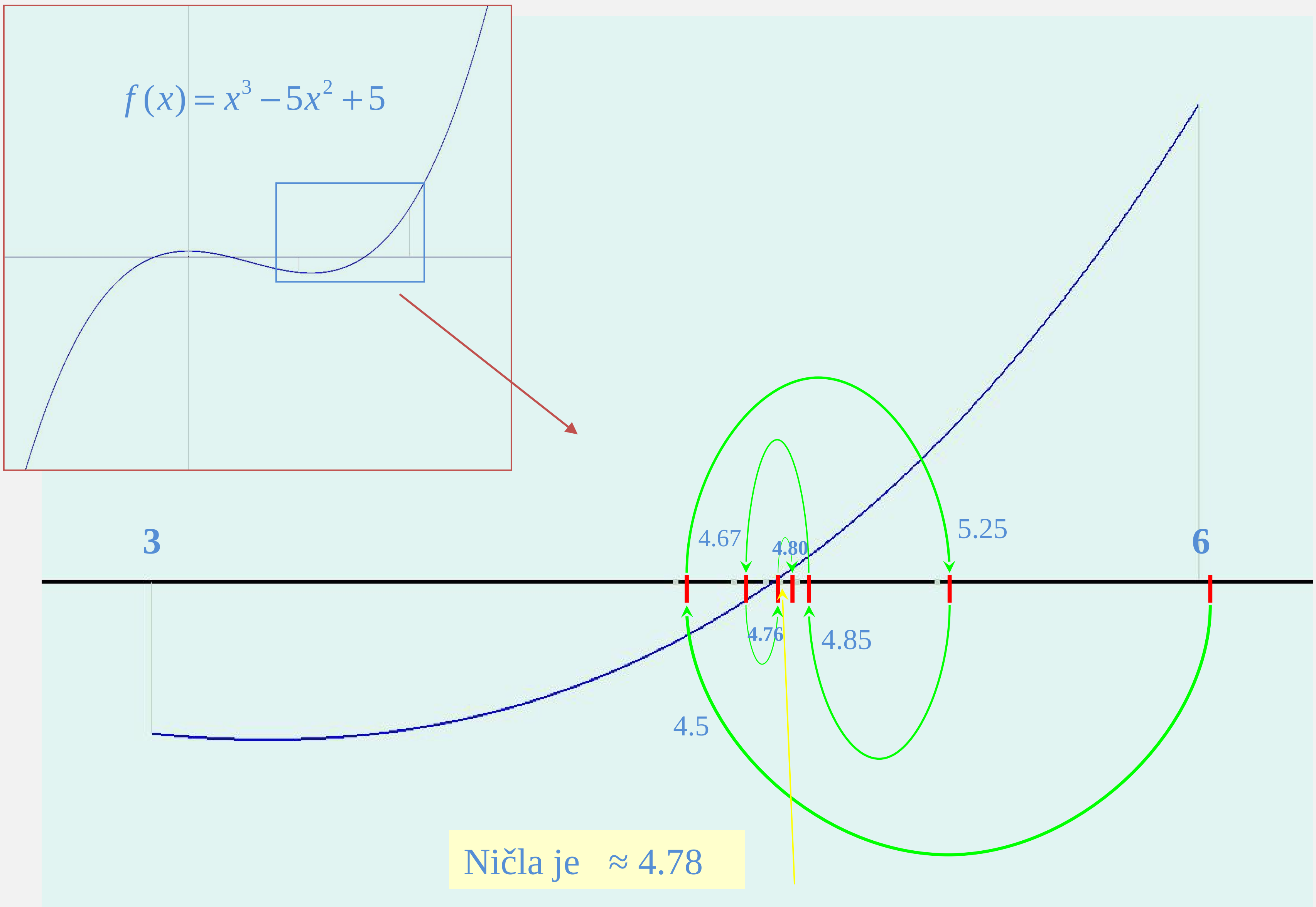
Enačba $f(x) = c$ ima rešitev na intervalu $[a,b]$, če je c v zalogi vrednosti funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Če je funkcija zvezna, je dovolj preveriti, ali f zavzame vrednost, ki je manjša od c ter vrednost, ki je večja od c.

Ali je enačba $x4\text{-}x\text{-}3=2$ rešljiva?

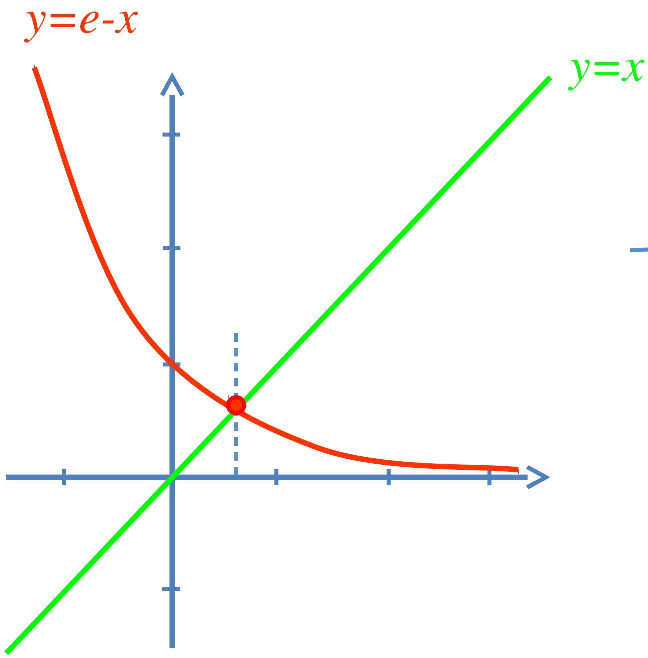
Funkcija $f(x) = x4\text{-}x\text{-}3$ je povsod zvezna, $f(0)=-3$ in $f(2)=11$.
Sklepamo, da ima enačba $x4\text{-}x\text{-}3=2$ vsaj eno rešitev na intervalu $[0,2]$.

V splošnem ugotavljamo rešljivost enačbe $f(x) = c$ na intervalu $[a,b]$ tako, da poiščemo minimum in maksimum funkcije f na intervalu $[a,b]$ in preverimo, ali se c nahaja vmes.

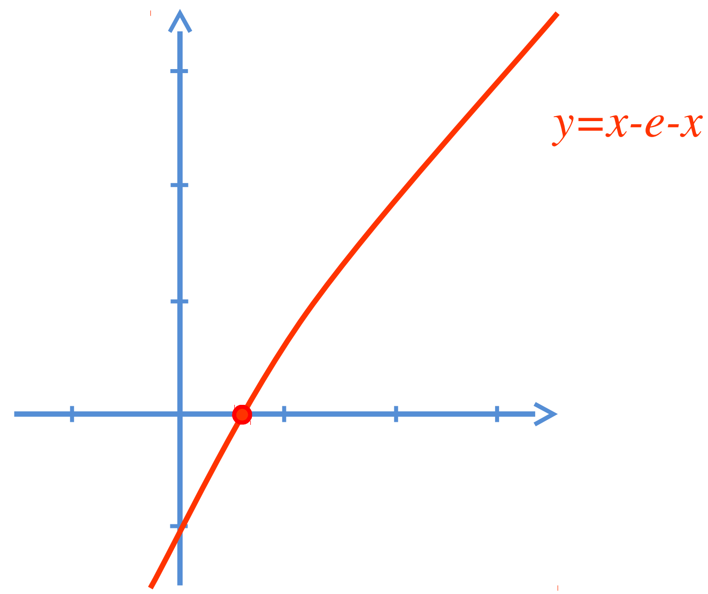
BISEKCIJA - DOLOČANJE NIČEL ZVEZNIH FUNKCIJ



Enačbo $x=e-x$ reši na dve decimalki natančno.



Prevedemo na: $x-e-x=0$



Iščemo ničlo funkcije $f(x)=x\text{-}e\text{-}x$

$f(0)=-1$, $f(1)=1-1/e\approx 0.63$, torej ima f ničlo na intervalu $[0,1]$

$f(0.5)=-0.106$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.5,1]$

$f(0.75)=0.277$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.5,0.75]$

$f(0.62)=0.082$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.5,0.62]$
(ker iščemo rešitev na dve decimalki natančno, ni potrebno računati $f(0.625)$)

$f(0.56)=-0.011$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.56,0.62]$

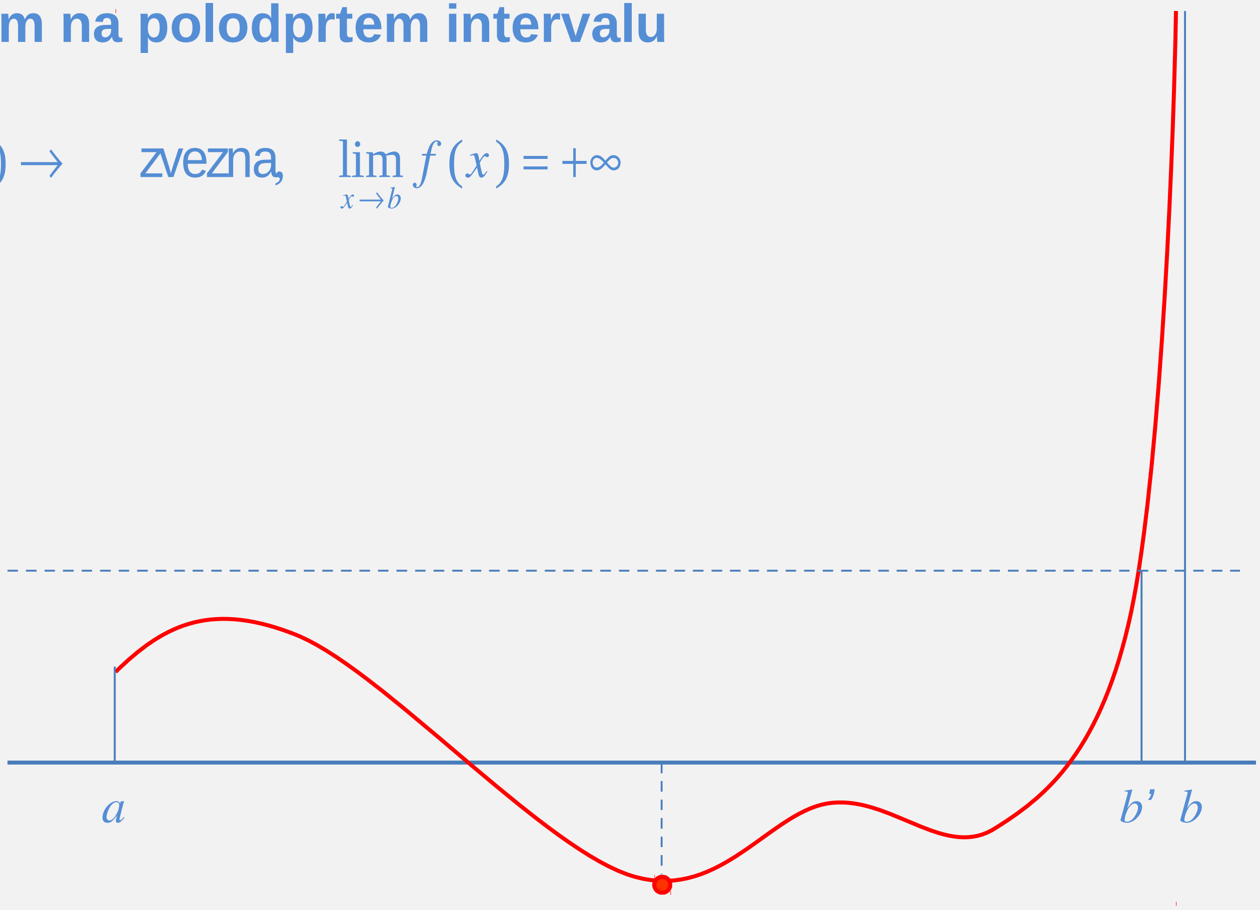
$f(0.59)=0.035$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.56,0.59]$

$f(0.57)=0.004$, zato nadaljujemo na intervalu $[0.56,0.57]$

Prvi dve decimalki vseh števil na intervalu $[0.56,0.57]$ se ujemata, zato lahko postopek bisekcije ustavimo in za približno rešitev vzamemo $\underline{x=0.56}$.
(natančnejša rešitev je x = 0.5671432986 – računanje z bisekcijo bi zahtevalo še dodatnih 25 korakov)

Ekstrem na polodprtem intervalu

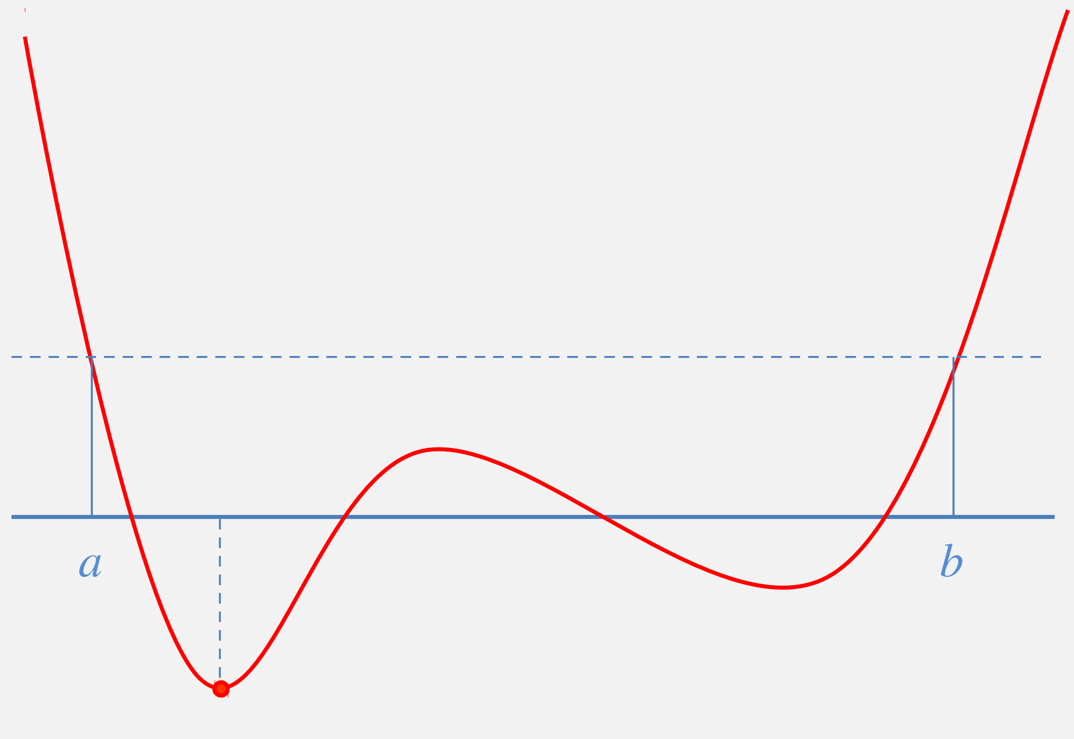
$f:[a,b)\to$ zvezna, $\lim_{x\to b} f(x)=+\infty$



Funkcija je navzgor neomejena, zato nima maksimuma.
Minimum na intervalu $[a,b']$ obstaja zaradi zveznosti in je obenem minimum na $[a,b)$.

Ekstrem na neomejenem intervalu

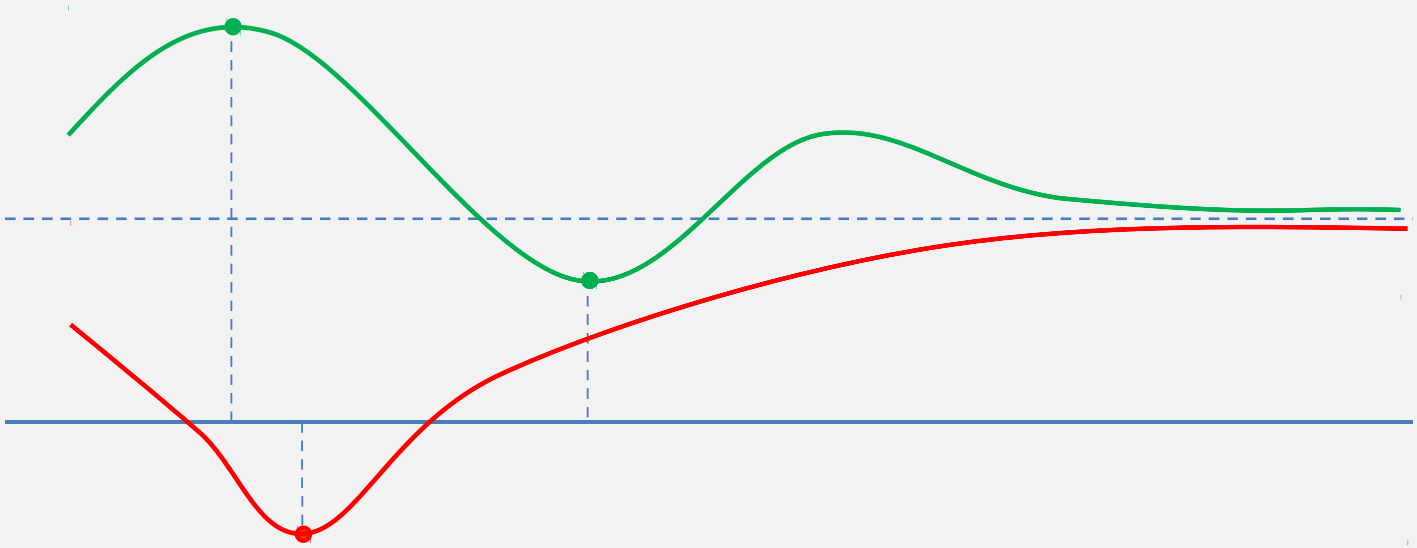
$f: \quad \to \quad$ zvezna, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$



Funkcija nima maksimuma, minimum na $[a,b]$ pa je obenem globalni minimum.

Polinom sode stopnje ima vedno en globalni ekstrem: minimum, če je vodilni koeficient pozitiven, oz. maksimum, če je vodilni koeficient negativen.

Ekstrem in asimptota



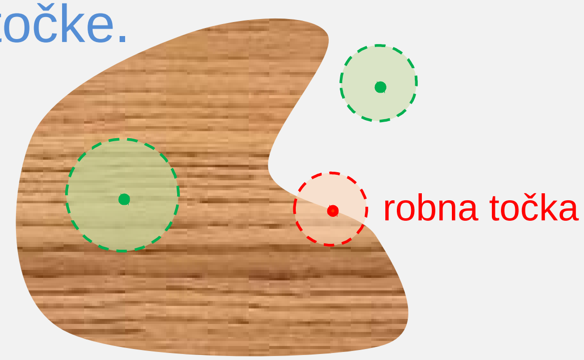
Funkcija, ki ima vodoravno asimptoto, zavzame vsaj enega izmed ekstremov.

EKSTREMI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

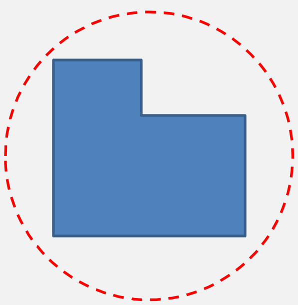
Ali so tudi v $\mathbb{R}^n$ območja, za katera vsaka zvezna funkcija n spremenljivk $f: A \to \mathbb{R}$ zavzame minimum in maksimum?

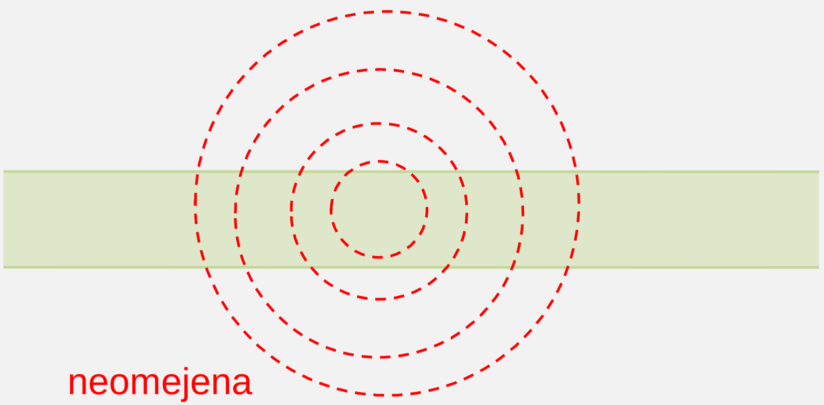
$A \subset \mathbb{R}^n$ je *zaprta*, če vsebuje vse svoje robne točke.

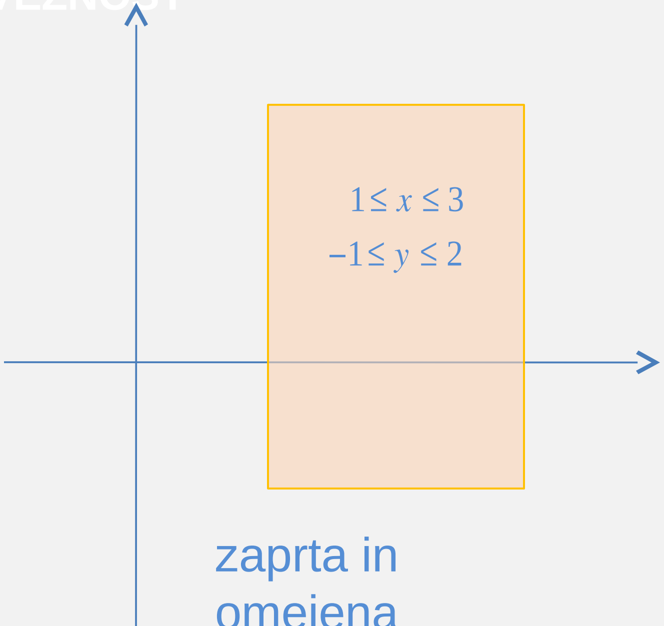
a je *robna točka* A če so v njeni bližini točke, ki so v A in točke, ki niso v A.



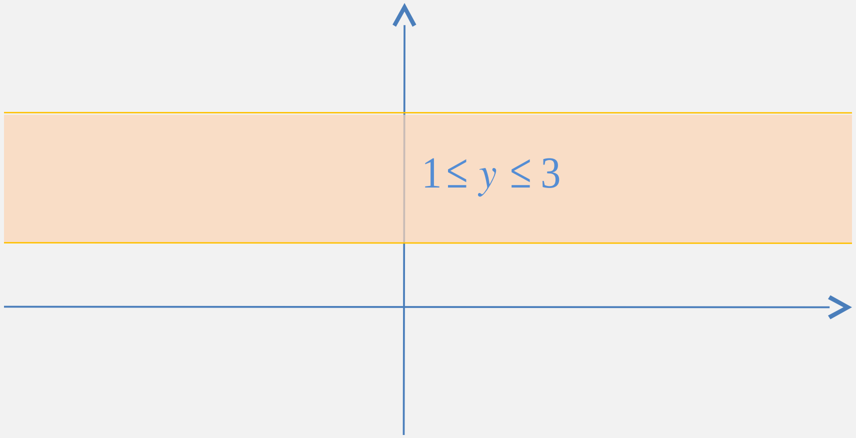
$A \subset \mathbb{R}^n$ je *omejena*, če je vsebovana v nekem dovolj velikem krogu.



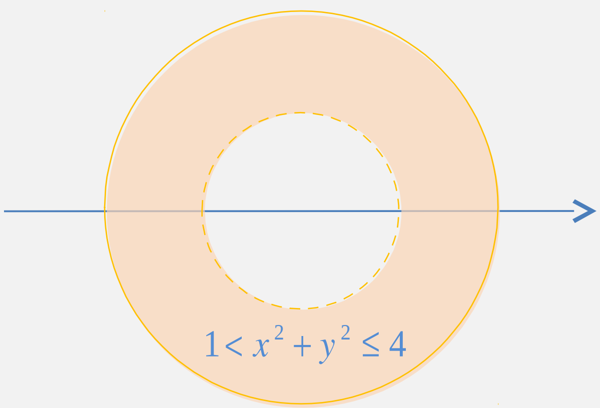




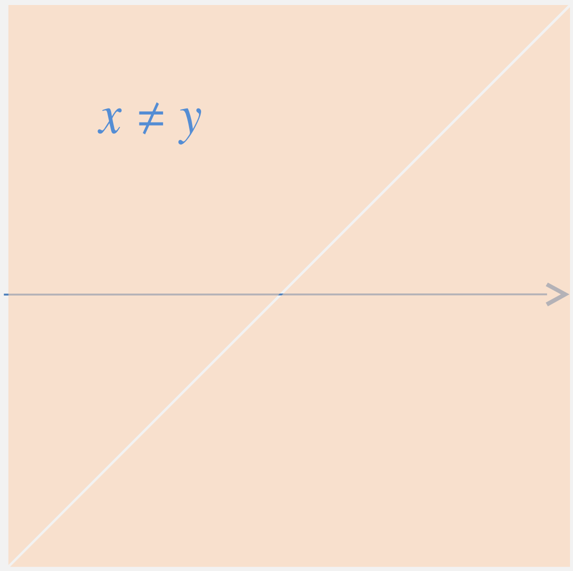
zaprta in omejena



zaprta, ni omejena



omejena, ni zaprta



ni zaprta, ni omejena

Presek zaporedja vedno manjših zaprtih in omejenih množic v $\mathbb{R}^n$ je ena točka.

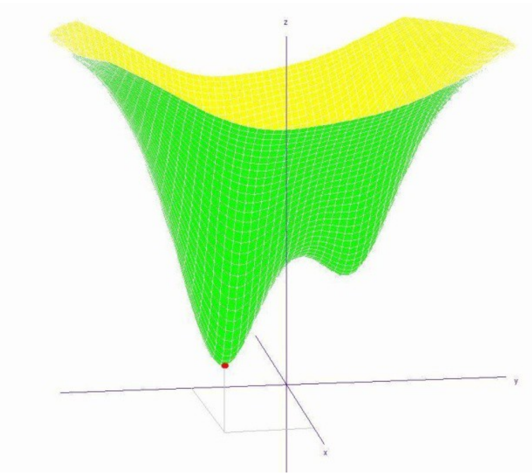
Podobno kot za funkcije ene spremenljivke premislimo, da je zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, definirana na zaprti in omejeni množici $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena. Dodatno ugotovimo, da zavzame natančno zgornjo in spodnjo mejo.

Zvezna funkcija na omejeni in zaprti množici zavzame maksimum in minimum.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezna in

$f(x,y) \to +\infty$ za $x \to \infty$ ali $y \to \infty$

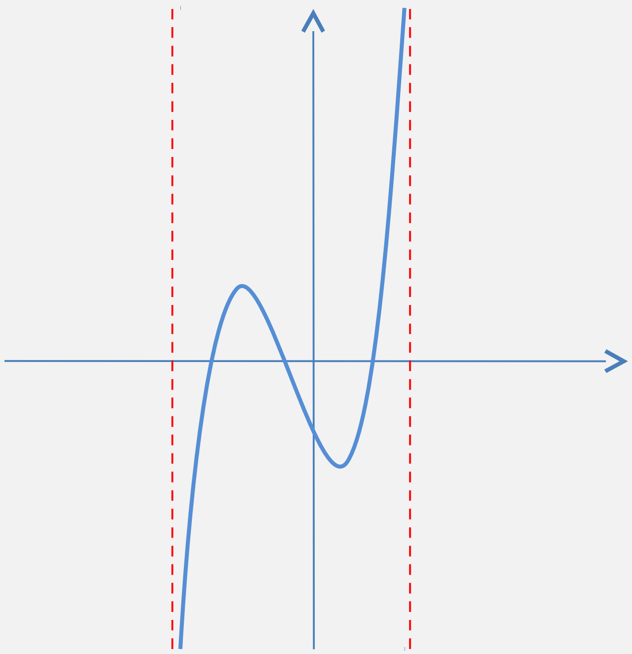
Funkcija f zavzame minimum.

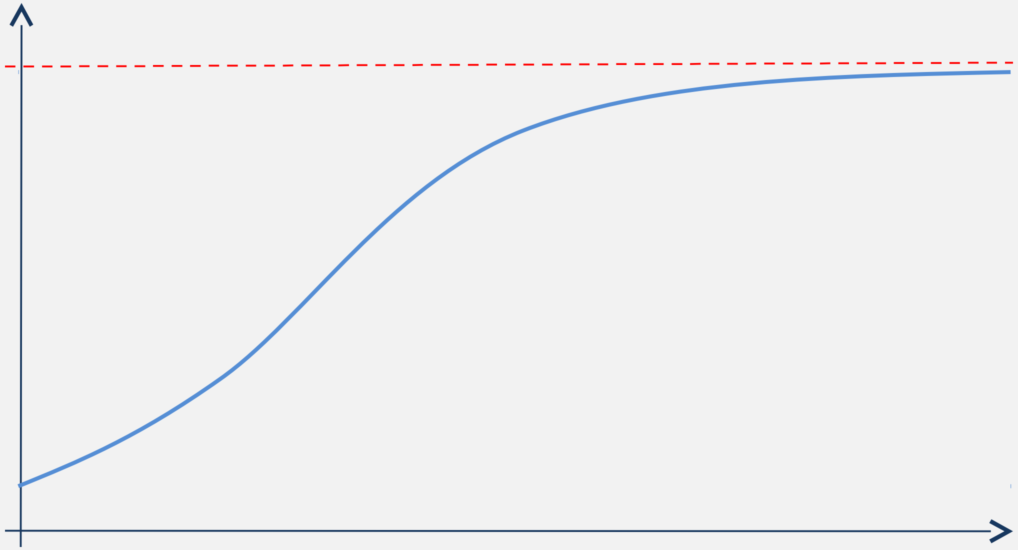


ASIMPTOTE

Pol pri b:

$$\lim_{x \to b} f(x) = \to +\infty \quad \text{ali} \quad \lim_{x \to b} f(x) = \to -\infty$$

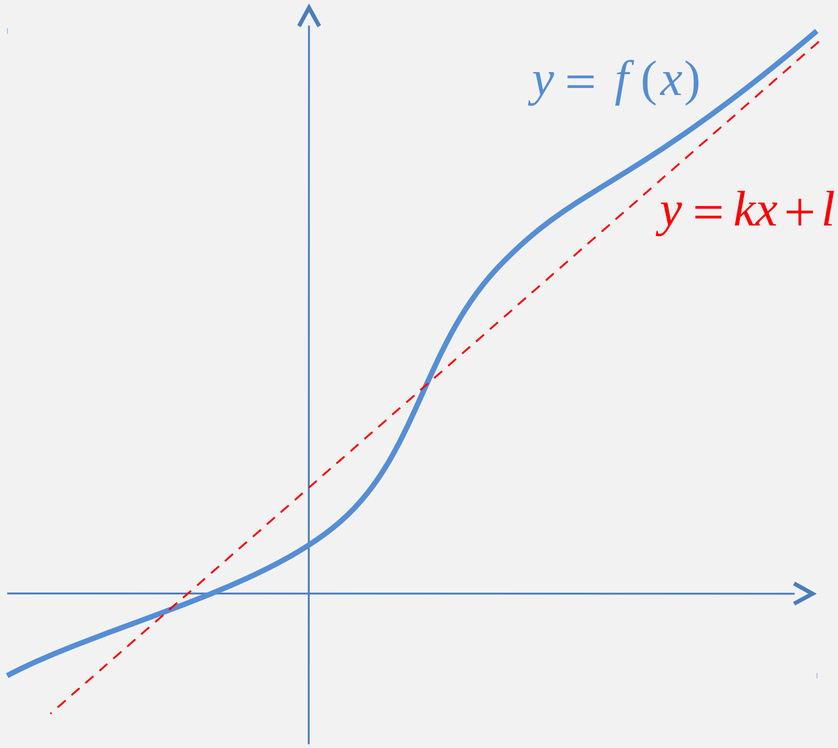




Vodoravna asimptota:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

POŠEVNA ASIMPTOTA



$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (kx + l) = 0$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$l = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx$$

$$f(x)=\sqrt{x^4+3x^3+5}-x^2$$

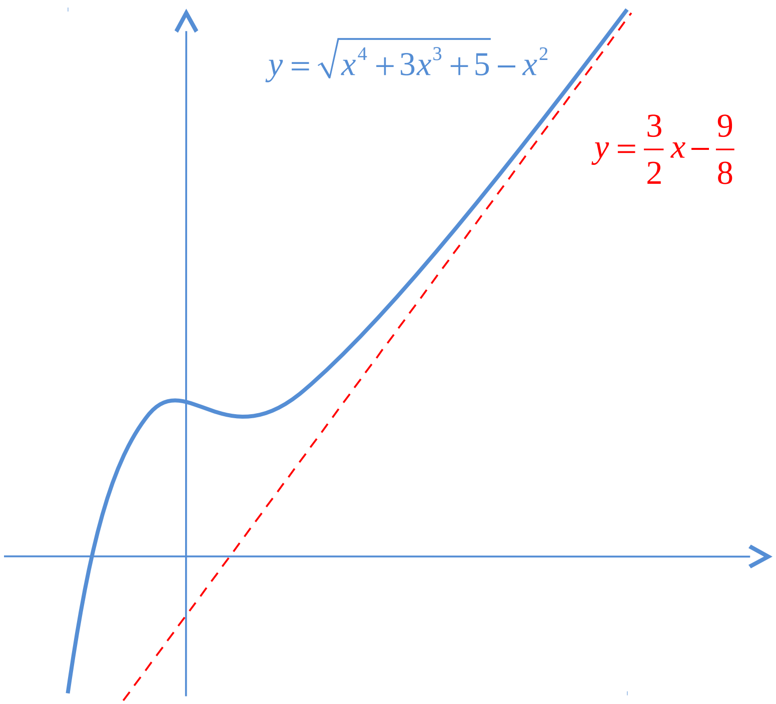
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+3x^3+5}-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^3+5-x^4}{x(\sqrt{x^4+3x^3+5}+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5}{x(\sqrt{x^4+3x^3+5}+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x^3}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^4}}+1)}=\frac{3}{2}$$

$$l=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^4+3x^3+5}-x^2-\frac{3}{2}x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^3+5-x^4-3x^3-\frac{9}{4}x^2}{\sqrt{x^4+3x^3+5}+x^2+\frac{3}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{9}{4}x^2}{\sqrt{x^4+3x^3+5}+x^2+\frac{3}{2}x}=-\frac{9}{8}$$



Asimptota: $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}$

REKURZIVNA ZAPOREDJA

$$x_0 = a \qquad x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$x_0 = 1 \qquad x_n = x_{n-1} + 0.5$

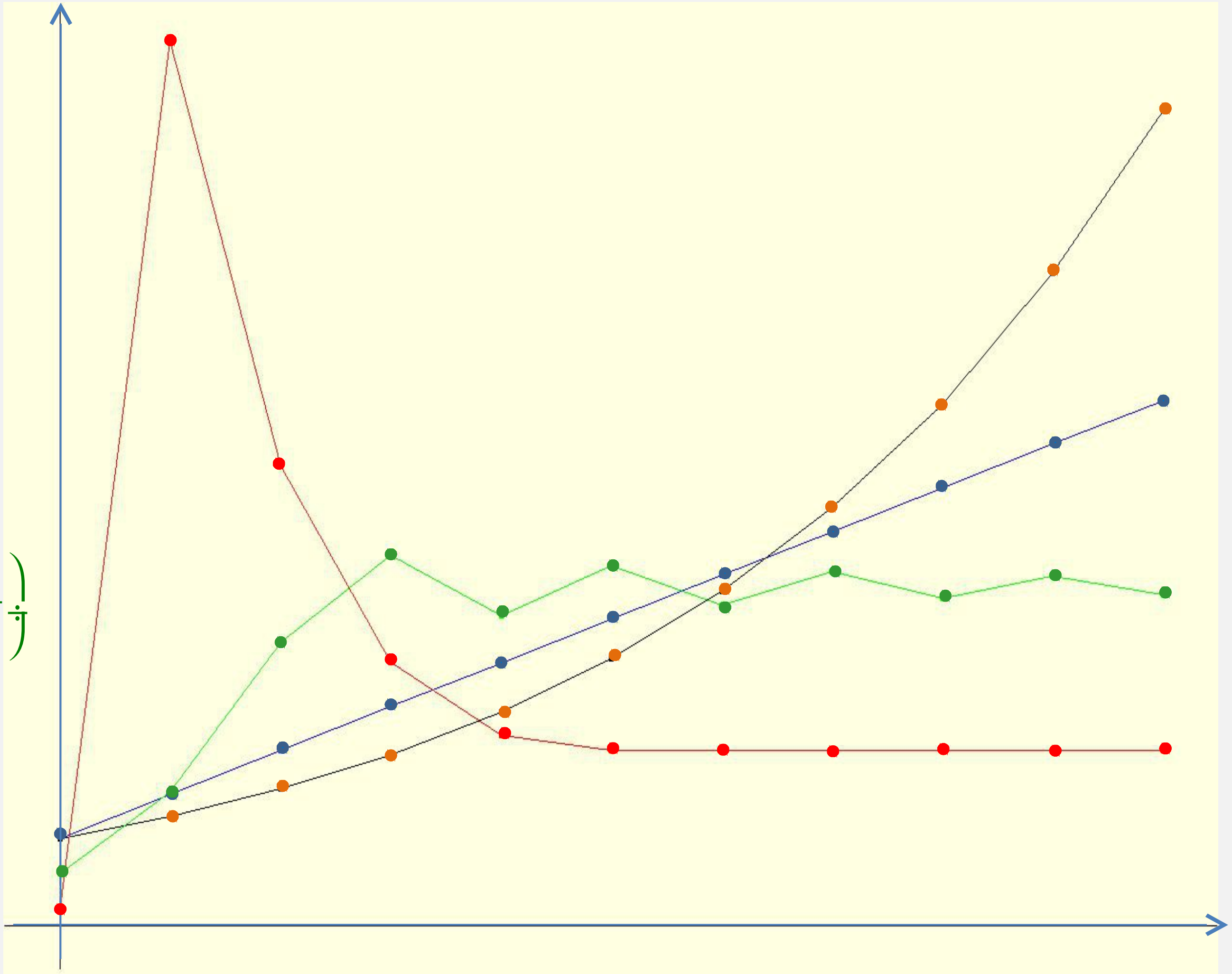
(aritmetično zaporedje)

$x_0 = 1 \qquad x_n = 1.25 \times x_{n-1}$

(geometrično zaporedje)

$x_0 = 0.6 \qquad x_n = \frac{17 x_{n-1}}{6}\left(1 - \frac{x_{n-1}}{6}\right)$

$x_0 = 0.2 \qquad x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 4}{2 x_{n-1}}$



$$x_0 = a \qquad x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Privzemimo, da je f zvezna.

Če zaporedje konvergira, potem za $x = \lim\limits_{n} x_n$ velja

$$x = \lim_{n} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n} x_{n-1}) = f(x)$$

Edine možne limite rekurzivnega zaporedja so rešitve enačbe $f(x)=x$.

Točka x je negibna točka preslikave f, če velja $f(x)=x$.

Negibne točke f so edini kandidati za limite rekurzivnega zaporedja, določenega z f.

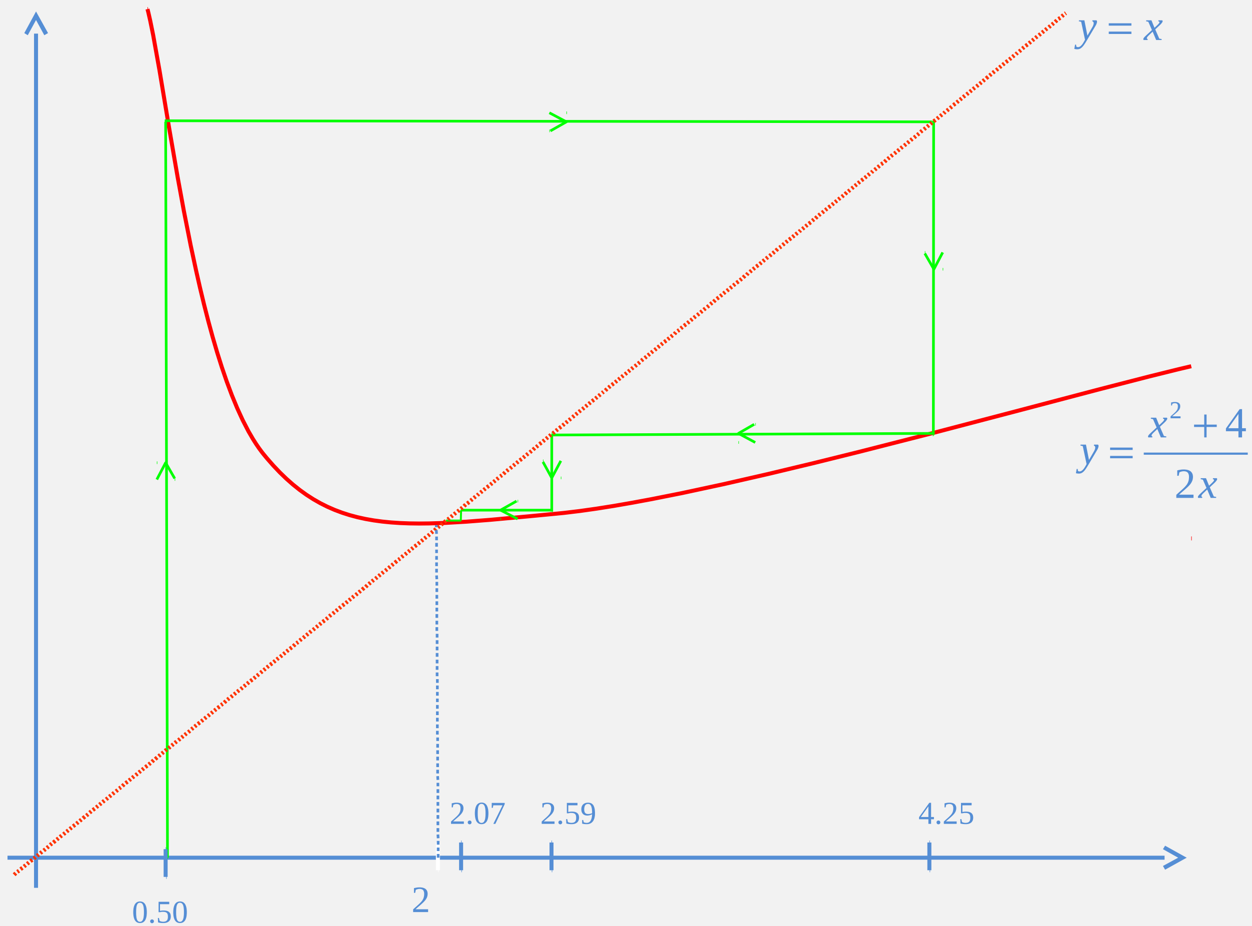
Ali zaporedje konvergira in katera negibna točka je limita, je odvisno od začetnega člena.

Obstoj limite: grafično

$x_0 = 0.5 \qquad x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 + 4}{2x_{n-1}}$

$x = \dfrac{x^2 + 4}{2x} \implies 2x^2 = x^2 + 4 \implies x = \pm 2$

n	xn
0	0.50
1	4.25
2	2.59
3	2.07
4	2.00
5	2.00
...	...



Obstoj limite: analitično

Če za primeren $k < 1$ velja

$$|f(x) - f(x')| < k \cdot |x - x'| \quad \text{za vse} \quad x, x' \in I,$$

potem pravimo, da je funkcija f skrčitev na intervalu I,

Privzemimo, da je f skrčitev na intervalu I okoli negibne točke x.

$$x_n \in I \quad \Rightarrow \quad |x - x_{n+1}| = |f(x) - f(x_n)| < k\,|x - x_n| \quad \Rightarrow$$

$$|x - x_{n+m}| < k^m\,|x - x_n| \quad \Rightarrow \quad \lim_n x_n = x$$

Za takšno negibno točko pravimo, da je privlačna negibna točka (atraktor).

Rekurzivno zaporedje, ki se približa privlačni negibni točki, proti tej točki tudi konvergira.

$|f'(x)| < 1 \quad \Rightarrow \quad x$ je privlačna negibna točka.

$$x_n = a x_{n-1}(1 - x_{n-1})$$

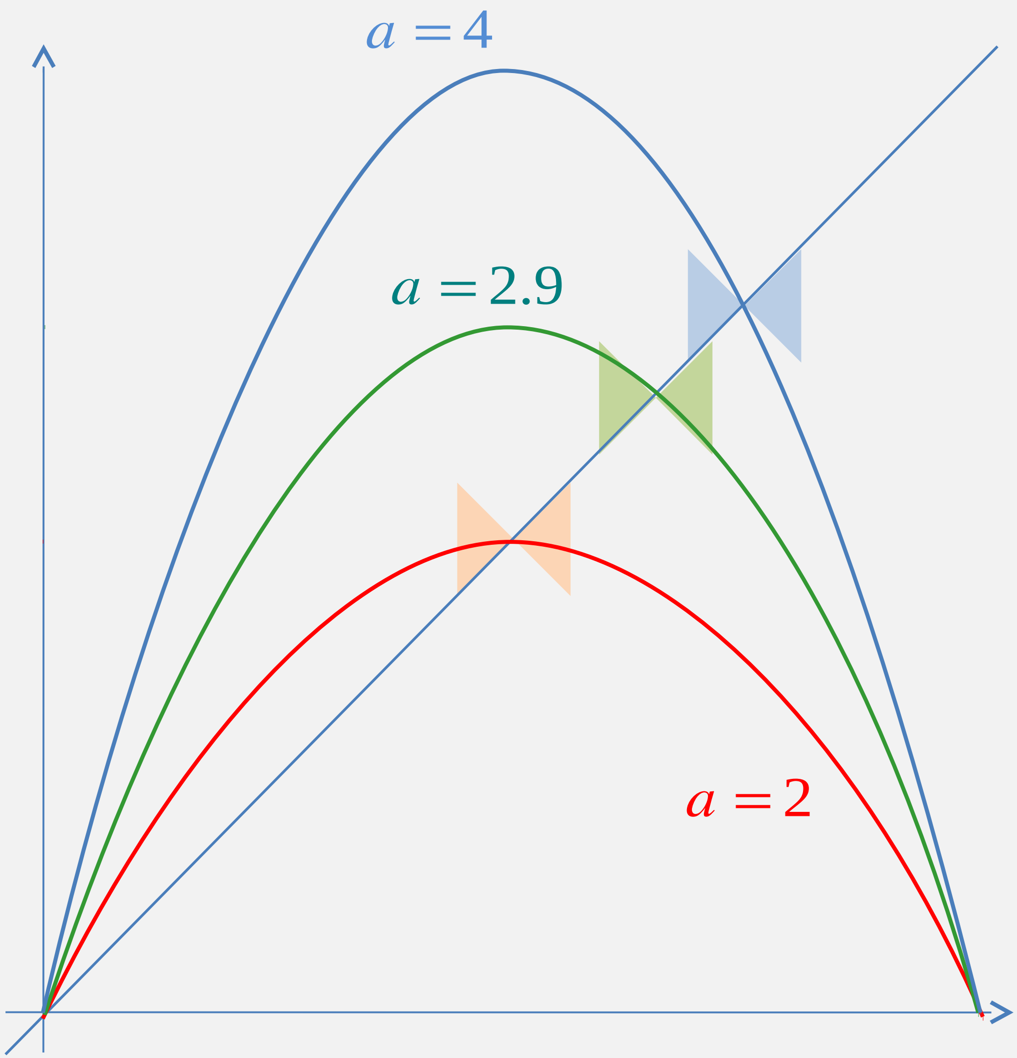
$$(f(x) = ax(1-x))$$

$$x = \frac{a-1}{a} \qquad f'(x) = 2 - a$$

Negibna točka je privlačna, če graf funkcije poteka skozi senčeno območje.

$a = 2, 2.9$ privlačni negibni točki

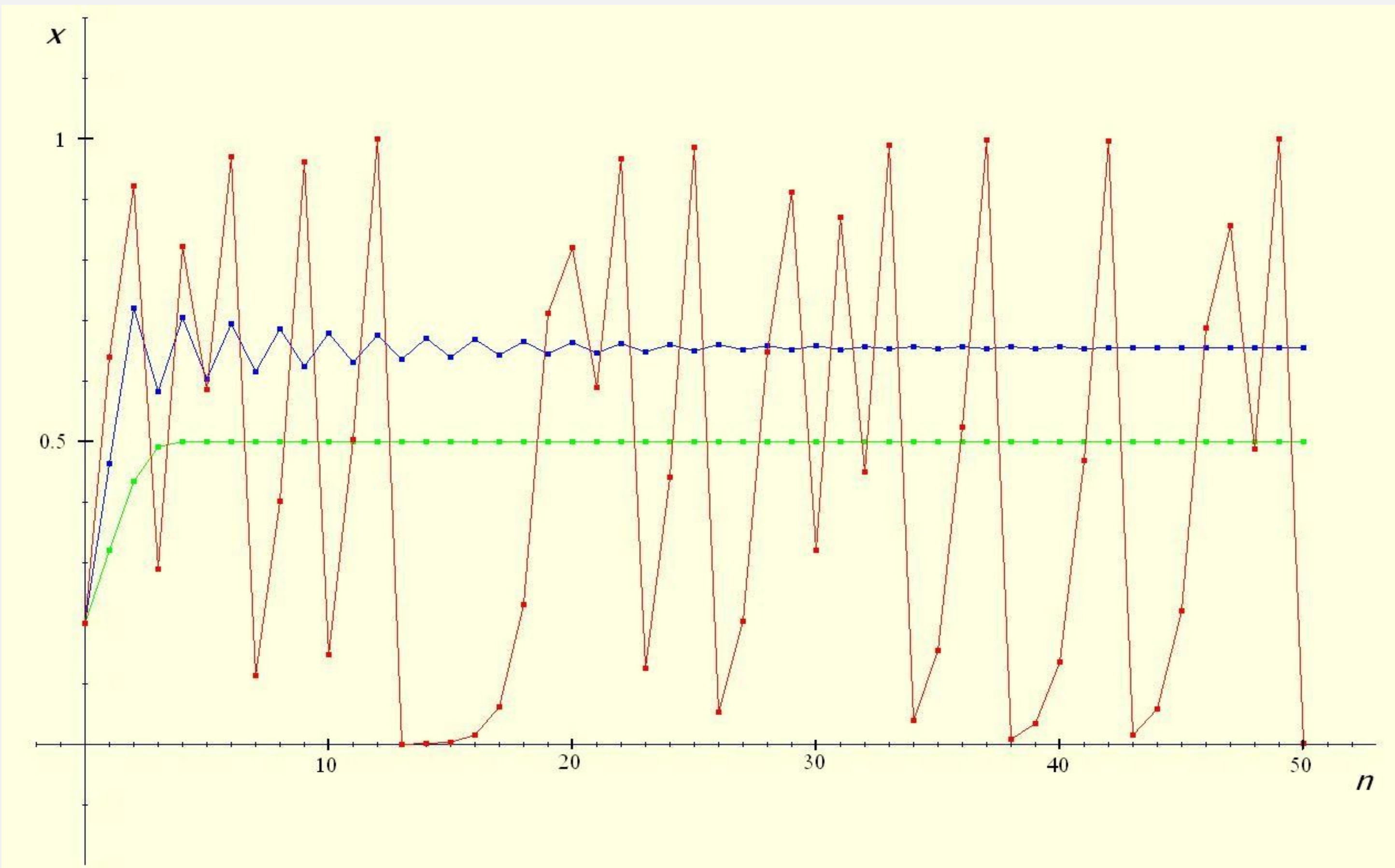
$a = 4$ odbojna negibna točka



Obnašanje zaporedja

$$x_0 = 0.2, \quad x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

za različne izbire parametra a :



$a = 2.9$

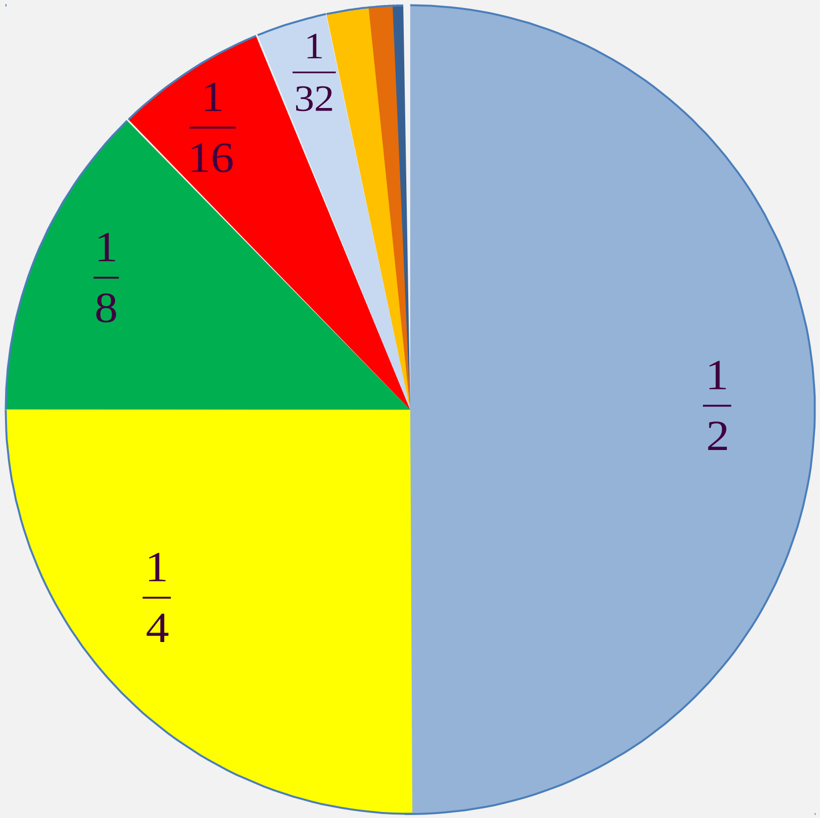
$a = 2$

$a = 4$

VRSTE

Ali je mogoče sešteti neskončno števil, npr. vse člene nekega zaporedja?

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = ?$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$\cdots\cdots$$

zaporedje delnih vsot

Vsoto vrste opredelimo kot limito zaporedja delnih vsot.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = \lim_n s_n$$

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=?$$ (geometrijska vrsta)

$$s_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\lim_n a\,\frac{1-q^n}{1-q}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q} & \text{za } -1<q<1\\ \text{ne obstaja} & \text{za } q\notin(-1,1)\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\ldots=?$$

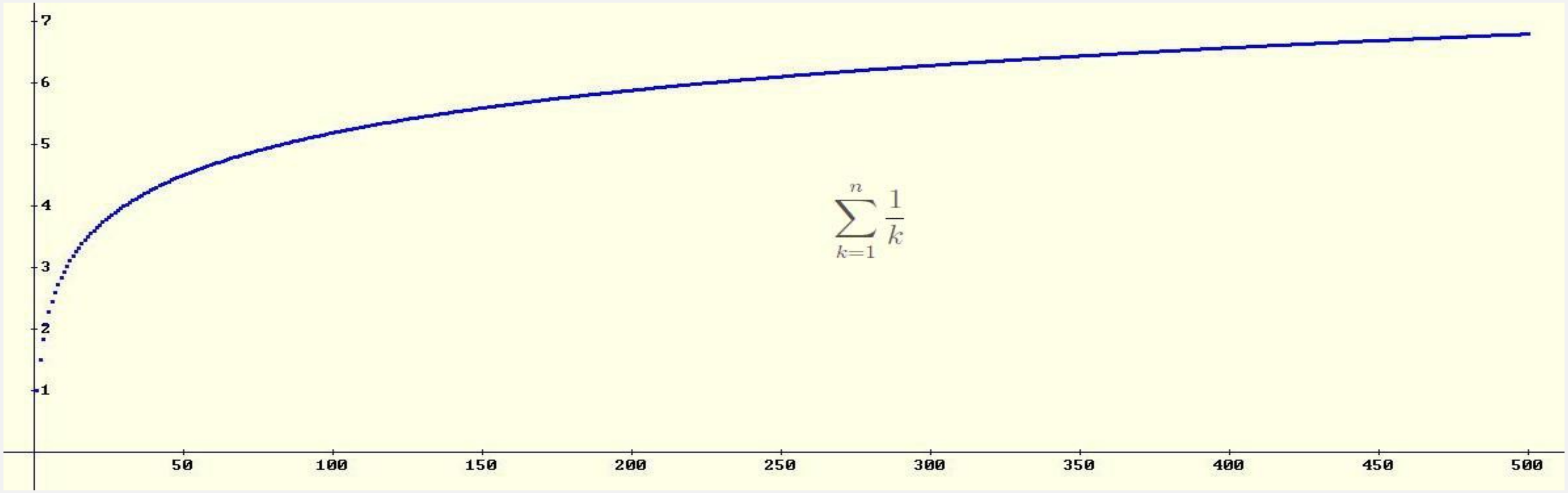
$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$s_n=(1-\cancel{\frac{1}{2}})+(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}})+(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}})+\ldots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_n 1-\frac{1}{n+1}=1$$

Harmonična vrsta $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots=?$$

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$



$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\ldots$$

Čeprav se sumandi manjšajo, je vsota neskončna!

VRSTE S POZITIVNIMI ČLENI $(x_n \geq 0)$

Zaporedje delnih vsot je naraščajoče.

 Limito ima, ko je navzgor omejeno.

Primerjalna kriterija za konvergenco vrst

I. $0 \leq x_n \leq y_n$

$$\sum_{1}^{\infty} y_n \text{ obstaja} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} x_n \text{ obstaja}$$

II. $0 \leq x_n, y_n,$ in je $\lim\limits_{n} \dfrac{x_n}{y_n} = C \neq 0, \infty$ (tj. členi obeh vrst so primerljivo veliki)

$$\sum_{1}^{\infty} y_n \text{ obstaja} \Leftrightarrow \sum_{1}^{\infty} x_n \text{ obstaja}$$

Geometrijska vrsta: $\sum_{1}^{\infty} q^n$ konvergira za $q<1$

Harmonična vrsta: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergira za $r>1$

Vrsto lahko seštejemo, če gre splošni člen dovolj hitro proti 0.

Hitrost konvergence ocenimo tako, da poiščemo primerljivo geometrijsko ali harmonično vrsto.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)=?$$

$$\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}=\frac{(n^3+1)-(n^3-1)}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}=\frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}$$ je primerljivo z $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Ker je $r=\frac{3}{2}>1$, vsota obstaja.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\approx 3.024$$

SPLOŠNE VRSTE

$$\sum_{1}^{\infty} |x_n| \text{ obstaja} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} x_n \text{ obstaja}$$

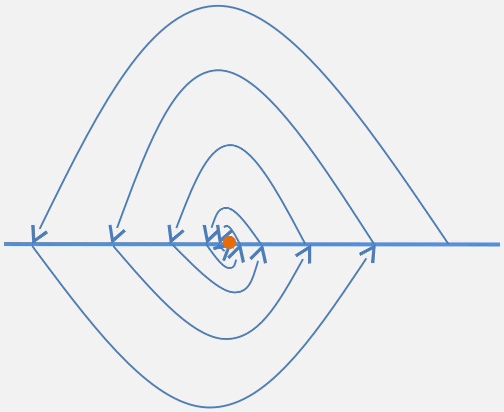
Ogledamo si, kako se spreminjajo delne vsote: razlika med m-to in n-to delno vsoto je $|x_m+\ldots+x_n|$, kar je manj od $|x_m|+\ldots+|x_n|$, kolikor je razlika delnih vsot vrste iz absolutnih vrednosti. Zato, če konvergira vrsta iz absolutnih vrednosti, konvergira tudi osnovna vrsta.

ALTERNIRAJOČE VRSTE

Kaj pa $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, pri kateri prirejena vrsta iz absolutnih vrednosti divergira?

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq 0, \quad \lim_n x_n = 0 \quad \Rightarrow$$

za delne vsote velja: $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$



Razlika dveh zaporednih delnih vsot gre proti 0, zato po principu sendviča zaporedje delnih vsot konvergira. Razlika med delno in celotno vsoto je manjša od prvega člena, ki ga izpustimo.

$$S = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots \text{ obstaja in } |S - s_n| < x_{n+1}$$