MATEMATIKA 1

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM
BIOKEMIJA
1. LETNIK

PRIBLIŽNO RAČUNANJE

Ta fosil dinozavra je star 70 milijonov in šest let, pravi paznik v muzeju.

???

Ko sem se zaposlil pred šestimi leti so mi rekli, da je star 70 milijonov let...

Vse količine, ki jih dobimo z merjenjem so približne, zato njihov zapis mora vsebovati tudi informacijo o natančnosti.

Proton je 1836.12-krat težji od elektrona.

$$\underbrace{1836.\overbrace{12}^{\text{decimalna mesta}}}_{\text{značilna mesta}}$$

Število decimalnih mest je odvisno od zapisa:

1836.12=1.83612x103=183612x10-2

število značilnih mest pa je vedno enako.

Pomemben dogovor:

v zapisu obdržimo le značilna mesta, npr. če Avogadrovo število zapišemo kot *N*0=6.0x1023 pomeni, da je tudi zadnja ničla značilna (tj. pravilna).

Vsaka količina je rezultat zaokrožanja. Pri tem števke 0,1,2,3,4 zaokrožamo navzdol, 5,6,7,8,9 pa navzgor.

1.08462 = 1.085 zaokroženo na tri decimalke

= 1.08 zaokroženo na dve decimalki

Pozor: 1.085, zaokroženo na dve decimalki je 1.09!

Zato *N*0=6.0230x1023 pomeni

6.02295x1023 ≤ *N*0 < 6.02305x1023, oziroma (6.0230 ± 0.00005)x1023 ,

medtem ko *N*0=6.023x1023 pomeni

6.0225x1023 ≤ *N*0 < 6.0235x1023 oziroma (6.023 ± 0.0005)x1023

RAČUNSKA PRAVILA

(1.2846+21.72) / 13.14=**?**

kalkulator: 1.750730594

Katere decimalke je smiselno obdržati?

praktična pravila:

- natančnost rezultata ne more biti večja od natančnosti podatkov
- pri seštevanju in odštevanju naj bo število decimalnih mest rezultata enako najmanjšemu številu decimalnih mest faktorjev

(npr. 1.2846+21.72=23.00 in ne 23.0046)

- pri množenju in deljenju naj bo število značilnih mest rezultata enako najmanjšemu številu značilnih mest faktorjev

(npr. 23.0046/13.14=1.751 in ne 1.75 ali 1.750730594)

S titracijo smo 25 cm^3 raztopine NaOH nevtralizirali z 12.21 cm^3 raztopine HCl. Izračunaj koncentracijo NaOH, če je koncentracija HCl 0.0942 mol/dm^3.

$c = (12.21 \times 0.0942)/25.00 = 0.04600728$

$(12.215 \times 0.09425)/24.995 = 0.046059761$

$(12.205 \times 0.09415)/25.005 = 0.045954839$

Upoštevamo tri značilna mesta $\Rightarrow$ $\underline{c = 0.0460\ mol/dm^3}$

Koliko železa nastane, če se pri redukcijski reakciji

$$Fe_2O_3 + 3\,CO \rightarrow 2\,Fe + 3\,CO_2$$

porabi 503 g ogljikovega monoksida? (Fe 55.85 g/mol, CO 28.01 g/mol)

$$m = 503/28.01 \times 2/3 \times 55.85 = 668.634412$$

Števila molekul, ki nastopajo v reakciji (2 Fe, 3 CO) so cela, tj. točna, zato štejemo, da je število značilnih decimalk neskončno.

$$\underline{m = 669\ g}$$

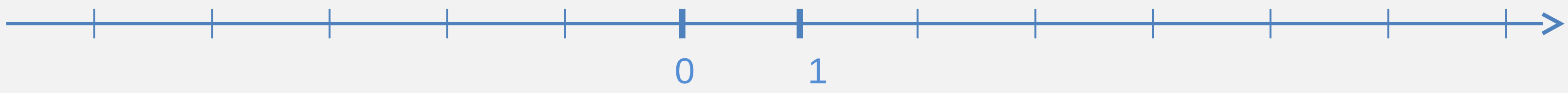
REALNA ŠTEVILA

Realna števila so vsa (končna in neskončna) decimalna števila.

Realna števila so teoretični konstrukt, ki nam omogoča, da točno izrazimo vse količine.
V splošnem ni mogoče podati neskončnega zaporedja decimalk, zato zapis in računanje z realnimi števili slonita na približkih in zaokroževanju.

Nekatera realna števila (npr. koreni, števili *π* in *e* ...) so podana implicitno in z njimi lahko včasih računamo točno, brez zaokroževanja (npr. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$, vendar pa $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nima nobenega preprostejšega zapisa).

Če na premici izberemo enotsko dolžino, lahko množico točk premice enačimo z množico realnih števil $\mathbb{R}$. Tako dobimo številsko premico.



(pravimo tudi, da smo na premici vpeljali koordinate)

Realna števila delimo na racionalna števila (ki jih lahko predstavimo z ulomki) in iracionalna števila (vsa ostala).

Decimalni zapis racionalnih števil je periodičen (pri končnih se periodično ponavlja števka 0), torej jih lahko podamo s končnim zapisom. Decimalk iracionalnih števil ni mogoče podati s končnim zapisom.

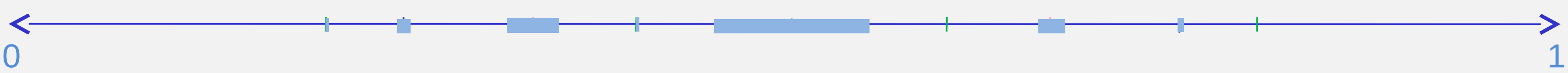
Iracionalnih števil je bistveno več kot racionalnih!

Premislek v dveh korakih; omejimo se na interval (0,1).

(a) Lahko naštejemo vse ulomke na intervalu (0,1): $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{5}\ \cdots$

V tem zaporedju so predstavljena vsa racionalna števila na (0,1), zato pravimo, da je množica racionalnih števil števna.

(b) Naštete ulomke lahko pokrijemo z vedno manjšimi intervalčki: 1/2 z intervalom širine 0.1, 1/3 z intervalom širine 0.01, 2/3 z intervalom širine 0.001 in tako naprej.



Unija teh intervalčkov vsebuje vsa racionalna števila na (0,1), njihova skupna dolžina pa je

$$0.1+0.01+0.001+\cdots = 0.1\times\frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{9} \approx 0.10101...$$

Ves preostanek (skoraj 90%!) intervala (0,1) tvorijo iracionalna števila...

Podobno se prepričamo, da lahko vsako števno množico pokrijemo s kolikor želimo majhno unijo intervalov. Pravimo, da ima vsaka števna množica mero nič. Skoraj vsa realna števila so iracionalna!

Glavna težava pri neskončnih decimalnih številih je, da se z njimi ne da računati.

Koliko je $0.07\underline{1428} + 0.2\underline{13}$, ali $3.71\underline{213} \cdot 0.5\underline{23}$?

V praksi si lahko pomagamo s približnim računanjem:

Realno število podamo z zaporedjem vedno boljših približkov,

npr. 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, 3.141592, ... , □ π.

Nato pa računamo s približki:

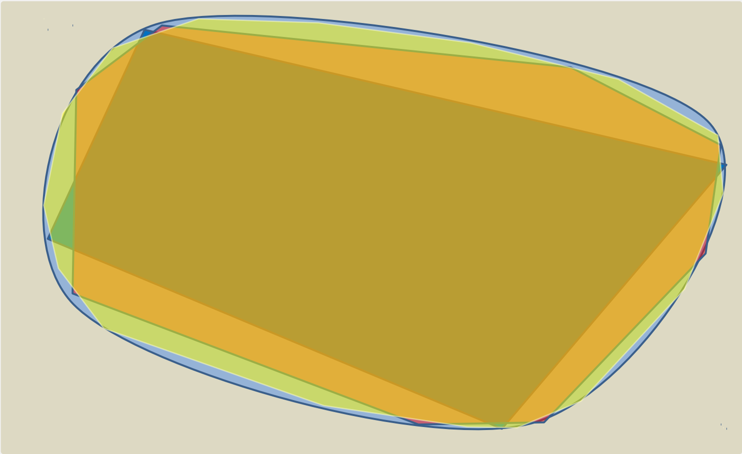
Če namesto $a,b \in \mathbb{R}$ vzamemo približka a',b', potem so

$a'+b'$, $a'-b'$, $a'b'$ in a'/b' približki za $a+b$, $a-b$, ab in a/b.

Vendar pozor, to niso vedno decimalni približki:

2.56 x 3.17 = 8.1152, medtem ko 2.5 x 3.1 = 7.75

Sčasoma so matematiki spoznali, da je omejevanje na decimalne približke okorno in nepraktično zato so realna števila in računske operacije raje opredelili drugače.



Kako bi opredelili ploščino lika na sliki?

Naravna možnost je, da jo aproksimiramo s ploščinami včrtanih mnogokotnikov.

Kako vemo, da je s tem podano neko realno število?
(torej neskončno decimalno število)

Opazimo najprej, da so ploščine mnogokotnikov so omejene (npr. s ploščino zunanjega pravokotnika).

Vsaka omejena množica realnih števil *A* ima natančno določen levi in desni rob.

<u>Premislek</u>: Desni rob bomo podali z zaporedjem decimalk .

Za decimalno število *d* rečemo, da *ne presega* množice *A*, če je *d* manjši ali enak od kakšnega elementa *A*.

Označimo s *c* največje celo število, ki ne presega *A*.
Naj bo naprej *d*1 največja števka, za katero decimalno število *c.d*1 ne presega *A*.
Podobno, naj bo *d*2 največja števka, za katero *c.d*1*d*2 ne presega *A*.
Nadaljujmo, naj bo *d*3 največja števka, da *c.d*1*d*2*d*3 ne presega *A*.

S tem postopkom dobimo realno število *s*=*c.d*1*d*2*d*3…, ki ima naslednji lastnosti:

(a) pri določanju *s* vedno vzamemo največjo možno decimalko, zato nobeno število iz *A* ni večje od *s.*

(b) če je *s*'<*s*, potem je neka decimalka s' manjša od istoležne decimalke *s*, zato je *s*' manjši od nekega elementa iz *A*, torej *A* presega vsako število, ki je manjše od *s*.

Število s je torej smiselno imeti za desni rob množice. Podobno opredelimo tudi levi rob.

Tako določenemu desnemu robu množice A pravimo natančna zgornja meja množice A, oziroma po latinsko supremum množice A, in zapišemo $s=\sup A$.

Vsaka navzgor omejena množica realnih števil ima natančno zgornjo mejo

Kadar je supremum s množice A hkrati njen element, pravimo, da je s maksimum množice A in pišemo $s=\max A$. Navzgor omejena množica ima vedno supremum, lahko pa se zgodi, da nima maksimuma.

Podobno ima vsaka navzdol omejena množica realnih števil natančno spodnjo mejo, ki ji pravimo tudi infimum in pišemo $s=\inf A$.

Kadar je $s=\inf A$ element množice A, pravimo, da je s minimum množice A in pišemo $s=\min A$. Navzdol omejena množica ima vedno infimum, lahko pa se zgodi, da nima minimuma.

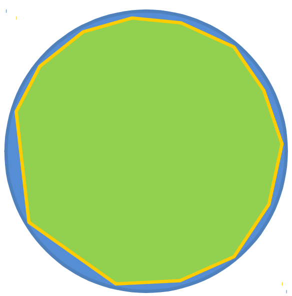
$\sup\{x \in \square \mid x < 1\} = \sup\{x \in \square \mid x < 1\} = 1$ (maksimuma ni)

$\sup\{x \in \square \mid x < 1\} = 0$ max=0

$\sup\{x \in \square \mid x^2 < 4\} = 2$

$\sup\{x \in \square \mid x^2 < 5\} = \sqrt{5}$

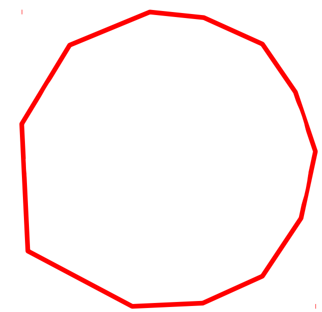
$\sup\{x \in \square \mid x^n < a\} = \sqrt[n]{a}$



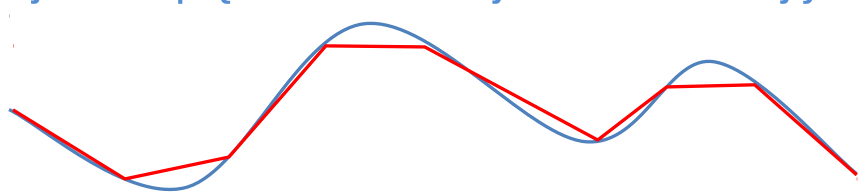
sup {ploščine krogu vrisanih mnogokotnikov}

= ploščina kroga =

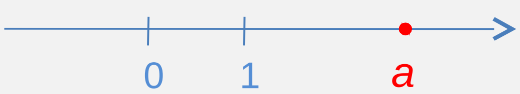
inf {ploščine krogu orisanih mnogokotnikov}

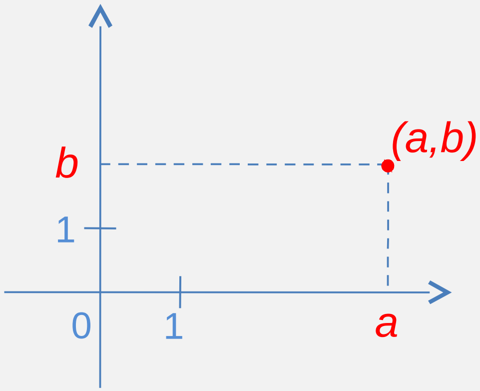


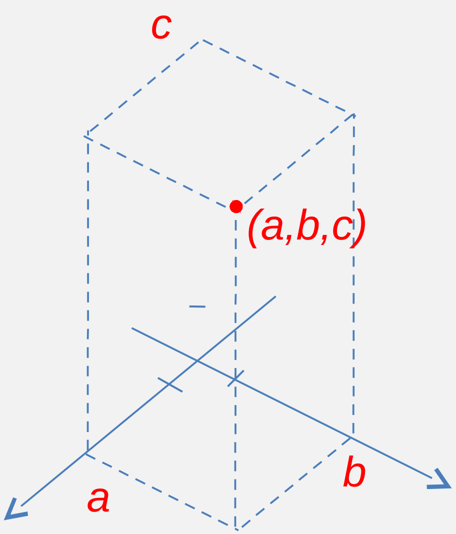
dolžina krivulje = sup {dolžine 'lomljenk' ob krivulji}



PROSTORSKA GEOMETRIJA







Če na premici določimo izhodišče in enoto, potem vsakemu realnemu številu ustreza točka na premici.

Številsko premico lahko enačimo z množico realnih števil ℝ.

Če na dveh pravokotnih premicah določimo izhodišče in enoto, potem vsakemu paru realnih številu ustreza točka v ravnini.

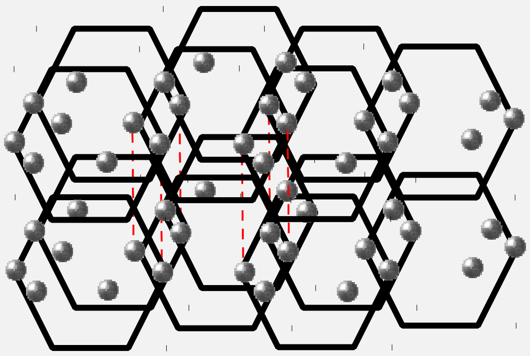
Ravnino lahko enačimo z množico parov realnih števil ℝ2.

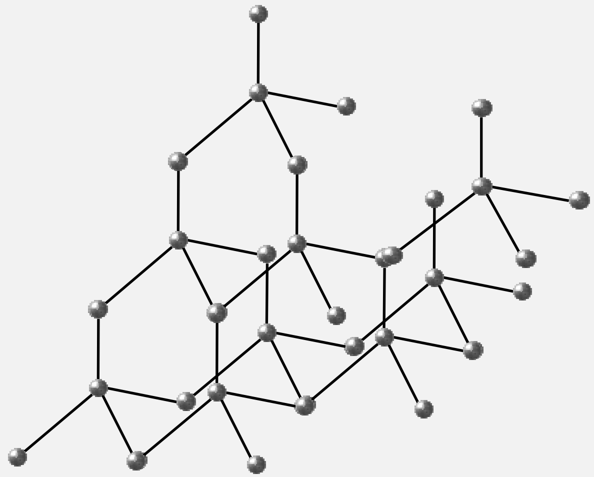
Če na treh pravokotnih premicah določimo izhodišče in enoto, potem vsaki trojici realnih številu ustreza točka v prostoru.

Prostor lahko enačimo z množico trojic realnih števil ℝ3.

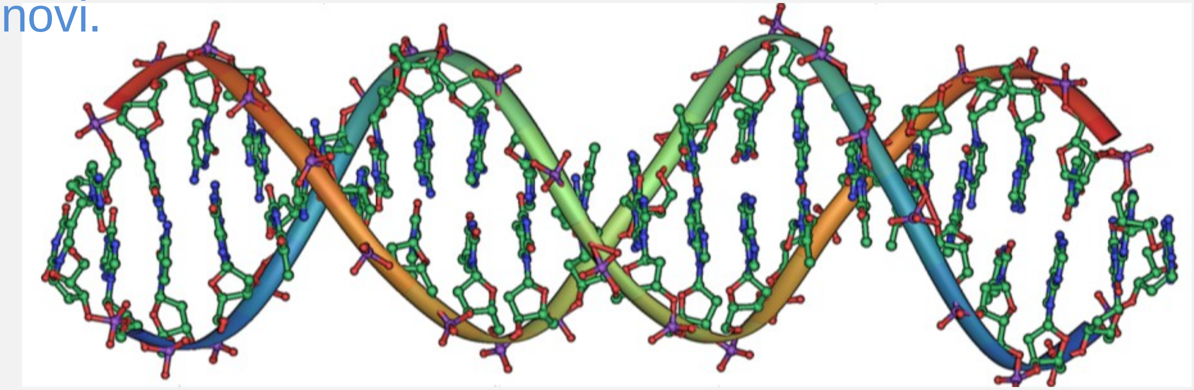
Ravninska geometrija obravnava objekte (točke, premice, krivulje) v ravnini.

Prostorska geometrija obravnava objekte (točke, premice, ravnine, krivulje, ploskve) v prostoru.





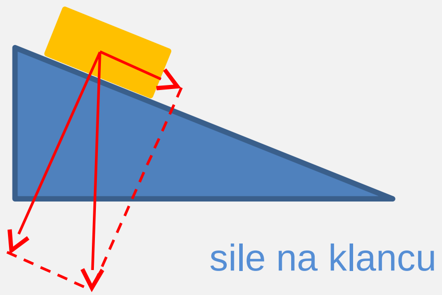
Prostorska geometrija je osnova za študij strukture snovi.

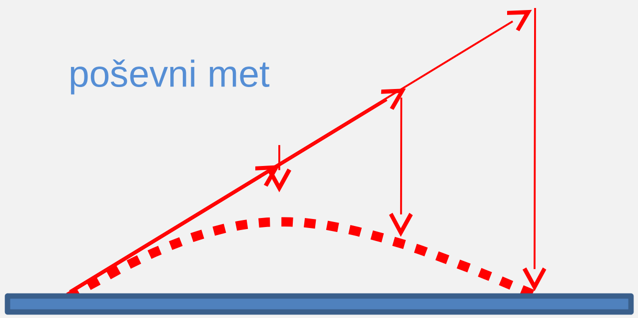


Geometrične količine, dolžine, ploščine, prostornine, kote itn. lahko izrazimo s pomočjo koordinat, vendar so formule zapletene in neintuitivne. Lažji in geometrično nazornejši pristop je z uporabo vektorskega računa.

VEKTORJI

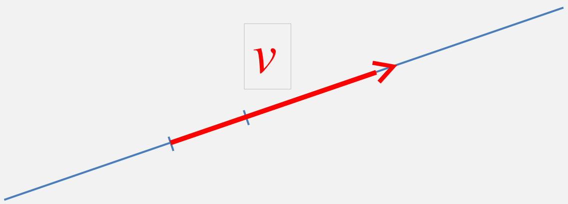
Pojem vektorske količine izvira iz fizike, kjer ga sistematično uporabljamo za ponazoritev sil, hitrosti, tokov in drugih fizikalnih količin.



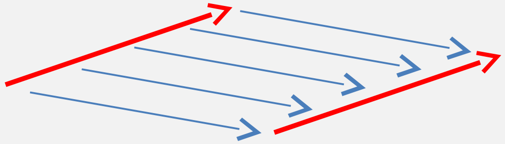


Vektor je matematični objekt, ki ga določata velikost in smer.

Vektorje ponazorimo z usmerjenimi daljicami: smer vektorja je določena s premico in njeno orientacijo, velikost pa z dolžino daljice

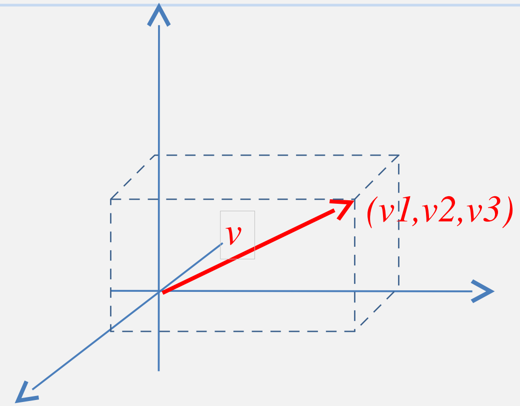


Dve usmerjeni daljici predstavjata isti vektor, če lahko eno premaknemo v drugo z vzporednim premikom
(torej, če sta enako dolgi in sta vzporedni v isto smer).



Vsak vektor lahko ponazorimo z daljico, ki se začenja v izhodišču. Tedaj je vektor določen s koordinatami končne točke, ki jim pravimo komponente vektorja.

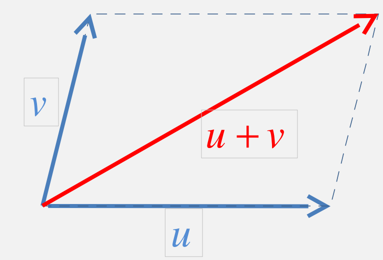
Usmerjena daljica od $(x1,x2,x3)$ do $(y1,y2,y3)$ predstavlja vektor s komponentami $(y1\text{-}x1,y2\text{-}x2,y3\text{-}x3)$.



Nekatere količine in operacije se enostavno izražajo s komponentami.

Velikost vektorja dobimo s pomočjo Pitagorovega izreka: $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Vektorje seštevamo po paralelogramskem pravilu: vektorja predstavimo z usmerjenima daljicama s skupnim prijemališčem in vzamemo diagonalo dobljenega paralelograma.

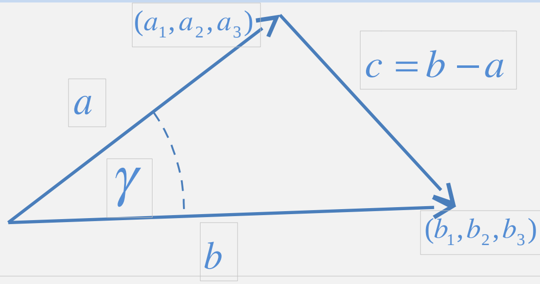


Komponente vsote dobimo tako, da seštejemo istoležne komponente sumandov: $(u1,u2,u3)+(v1,v2,v3)=(u1+v1,u2+v3,u3+v3)$

Vektor pomnožimo s številom *k* tako, da ohranimo smer, dolžino pa pomnožimo s *k*.

Komponente produkta dobimo tako, da s *k* pomnožimo komponente vektorja: $k\cdot(v1,v2,v3)=(kv1,kv2,kv3)$

Tudi kot med vektorjema se da izraziti s komponentami:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - ((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2)}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} =$$

$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Formula je zapletena. Lahko jo poenostavimo, če vpeljemo operacijo, imenovano skalarni produkt:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

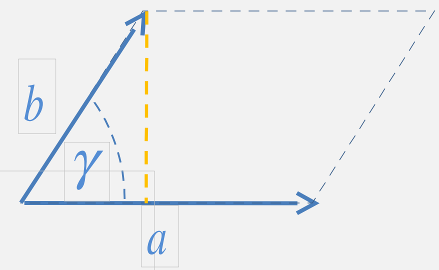
Velja:

skalarni produkt dveh vektorjev je enak produktu njunih velikosti in kosinusa kota, ki ga oklepata.

Tedaj se velikost vektorja $\vec{a}$ izraža z $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa s $\cos\gamma = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna natanko takrat, ko $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Izrazimo ploščino paralelograma, ki ga oklepata vektorja:



$$P = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\gamma$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1-\cos^2\gamma} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

Poskusimo najprej za $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$= \sqrt{\cancel{a_1^2b_1^2} + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + \cancel{a_2^2b_2^2} - \cancel{a_1^2b_1^2} - 2a_1b_1a_2b_2 - \cancel{a_2^2b_2^2}}$$

$$= \sqrt{a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2} = \sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} = |a_1b_2-a_2b_1|$$

Račun za trirazsežne vektorje je še precej daljši, na koncu pa se spet veliko členov uniči, ostane pa vsota polnih kvadratov:

$$P = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

Tudi formula za ploščino je zelo zapletena, poenostavitev pa ni prav na dlani. Vpeljemo še eno operacijo, imenovano vektorski produkt:

$$(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=(a_2b_3-a_3b_2,\,a_3b_1-a_1b_3,\,a_1b_2-a_2b_1)$$

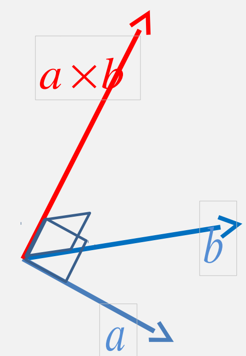
Vektorski produkt je torej vektor (za razliko od skalarnega produkta, ki je število) in ima naslednje lastnosti:

$|a\times b|$ je enak ploščini paralelograma, ki ga oklepata a in b

a in b sta vzporedna natanko takrat, ko je $a\times b=0$

$a\times b$ je pravokoten na a in b:

$$(a_1,a_2,a_3)\times(a_2b_3-a_3b_2,\,a_3b_1-a_1b_3,\,a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-a_2a_1b_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1=0$$

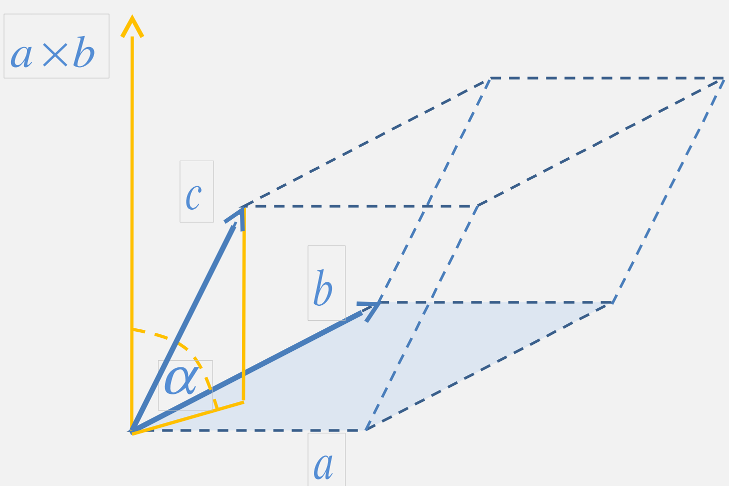


Nadaljnje lastnosti skalarnega in vektorskega produkta:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a} \qquad \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

(Enako velik vektor v nasprotni smeri.)

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \qquad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$



$$V=\text{osnova}\times\text{višina}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\times\left|\vec{c}\right|\times\sin\alpha$$
$$=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\times\left|\vec{c}\right|\times\cos(90-\alpha)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$$

Prostornina paralelepipeda se izraža z mešanim (vektorskim in potem skalarnim) produktom vektorjev stranic.

VEKTORJI - POVZETEK

	KOMPONENTNI ZAPIS	GEOMETRIČNI POMEN
SKALARNI PRODUKT	$(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$	$a\cdot b$ JE PRODUKT VELIKOSTI a IN b S KOSINUSOM VMESNEGA KOTA $a\cdot b=0 \iff a$ IN b STA PRAVOKOTNA
VEKTORSKI PRODUKT	$(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$	$a\times b$ JE VEKTOR, KI JE PRAVOKOTEN NA a IN b, NJEGOVA VELIKOST JE PLOŠČINA VMESNEGA PARALELOGRAMA $a\times b=0 \iff a$ IN b STA VZPOREDNA

DOLŽINA VEKTORJA $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

KOT MED VEKTORJEMA $\cos\gamma=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

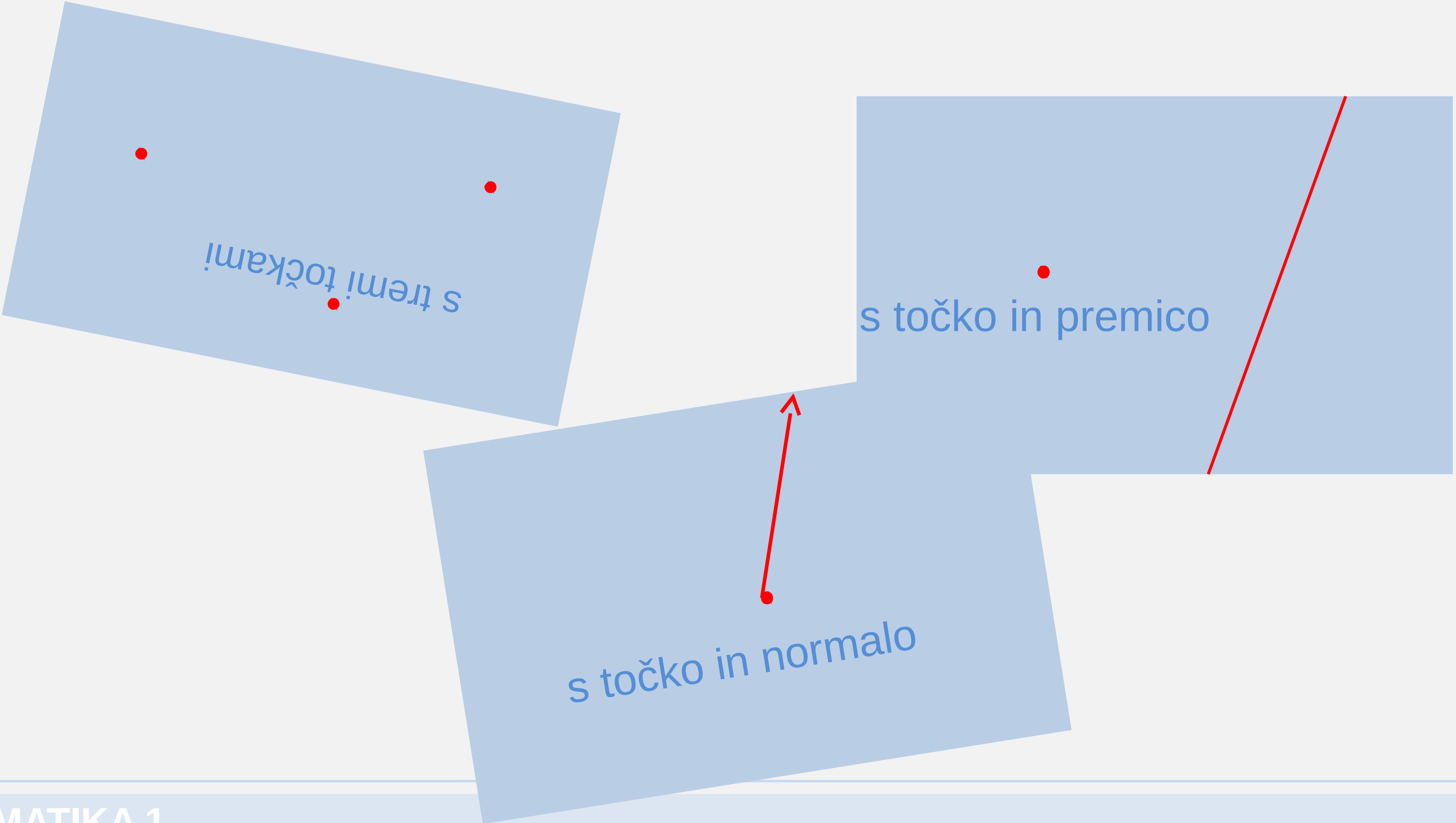
PLOŠČINA PARALELOGRAMA $|\vec{a}\times\vec{b}|$

PROSTORNINA PARALELEPIPEDA $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

PROSTORSKA GEOMETRIJA

Osnovni objekti prostorske geometrije so točke. premice in ravnine. Točke so podane s svojimi koordinatami. Nekoliko presenetljivo so ravnine lažje za obravnavo kot premice, zato se jih lotimo prej.

Ravnino lahko opredelimo na različne načine:

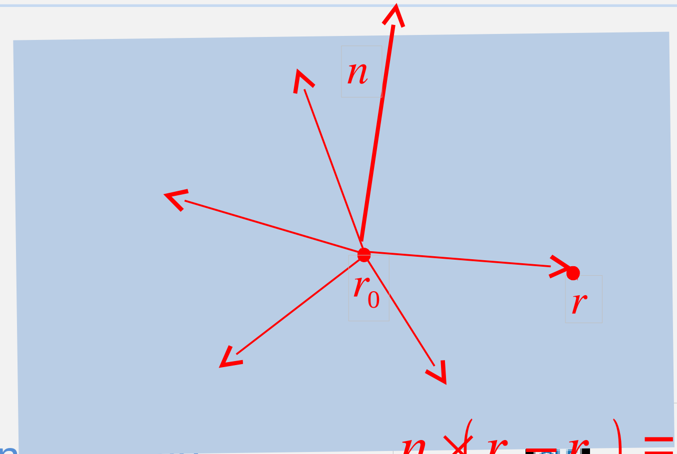


ENAČBA RAVNINE

Označimo $\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{n} = (a, b, c)$



Pogoj, da točka (x,y,z) leži na ravnini izrazimo vektorsko: (normala je pravokotna na vse daljice v ravnini)

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Po komponentah pa dobimo ($d = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 = ax_0 + by_0 + cz_0$)

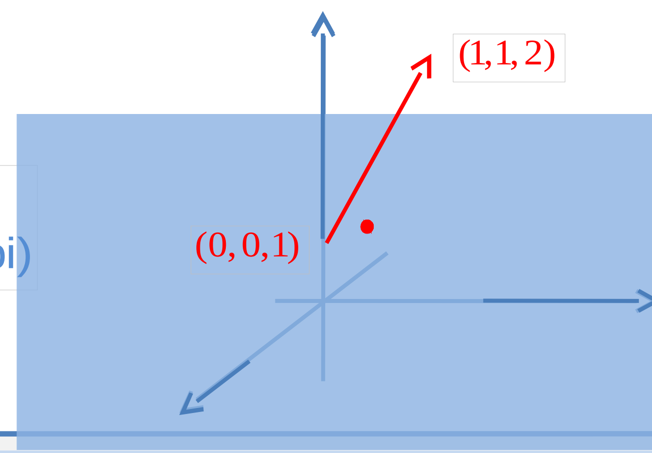
$$ax + by + cz = d$$

Vsaka linearna zveza med koordinatami točk v prostoru predstavlja ravnino.

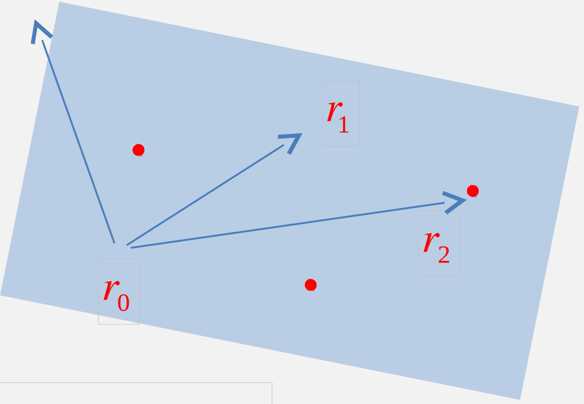
Katero ravnino določa enačba $x+y+2z=2$?.

$\vec{n} = (1,1,2)$

$\vec{r}_0 = (0,0,1)$ (izberemo točko, ki ustreza enačbi)



RAVNINA SKOZI TRI DANE TOČKE



Normala: $\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\times(\vec{r}_2 - \vec{r}_0)$.

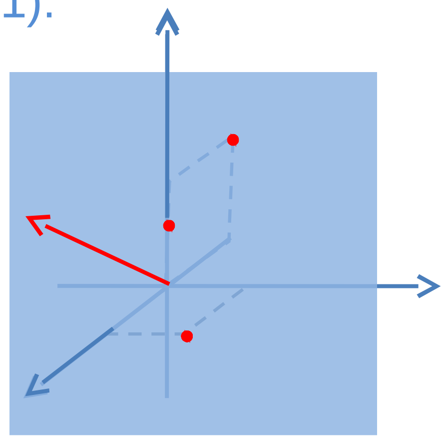
Pogoj, da točka $\vec{r}$ leži na ravnini: $\left((\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\times(\vec{r}_2 - \vec{r}_0)\right)\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Enačba ravnine skozi točke (1,1,0), (-1,0,2) in (0,0,1):

$$\left((-2,-1,2)\times(-1,-1,1)\right)\cdot\left((x,y,z)-(1,1,0)\right) = 0$$

$$(1,0,1)\cdot\left((x,y,z)-(1,1,0)\right) = 0$$

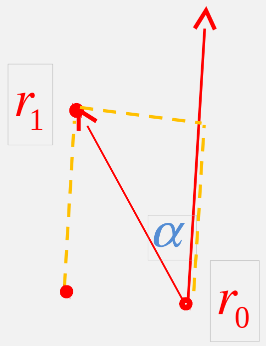
$$x + z = 1$$



RAZDALJA MED TOČKO IN RAVNINO

Razdalja je enaka projekciji vektorja do točke na smer normale.

$$d = |\vec{r}_1 - \vec{r}_0| \cos\alpha = \frac{\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|}$$



(po potrebi vzamemo absolutno vrednost)

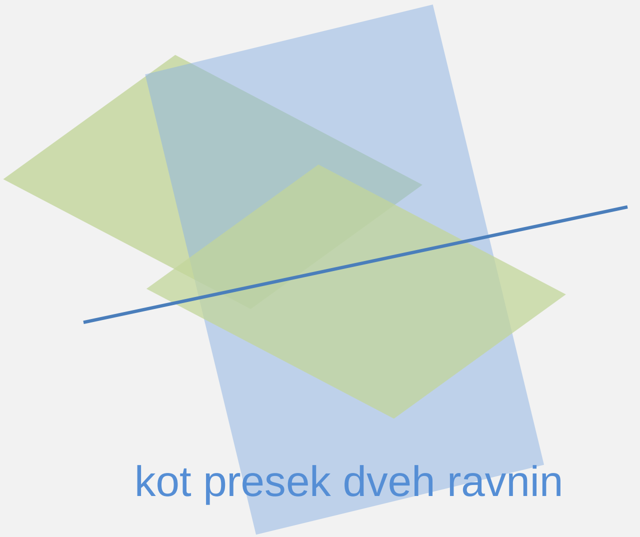
Po koordinatah: $d = \dfrac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

(v normirano enačbo ravnine vstavimo koordinate točke)

Koliko je točka (0,3,1) oddaljena od ravnine $x+y+2z=2$?

$$d = \frac{|1 \times 0 + 1 \times 3 + 2 \times 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Tudi premico lahko opredelimo na različne načine:

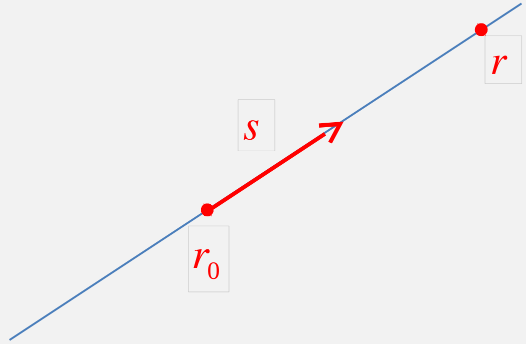


ENAČBA PREMICE

Označimo $\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$s = (a, b, c)$



Pogoj, da točka *(x,y,z)* leži na premici izrazimo vektorsko: $s \times (r - r_0) = 0$

(daljica na premici je vzporedna s smerjo)

Po komponentah pa dobimo

$$(a,b,c)\times\left((x-x_0),(y-y_0),(z-z_0)\right)=$$

$$=\left(b(z-z_0)-c(y-y_0),\, c(x-x_0)-a(z-z_0),\, a(y-y_0)-b(x-x_0)\right)=(0,0,0),$$

torej

$$b(z-z_0)=c(y-y_0)$$

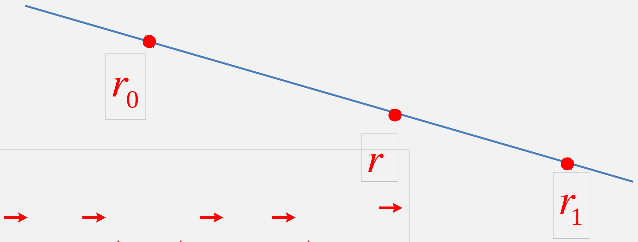
$$c(x-x_0)=a(z-z_0)$$

$$a(y-y_0)=b(x-x_0)$$

Enačbe lahko uredimo v kanonično obliko:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

PREMICA SKOZI DANI TOČKI



Smer $s = r_1 - r_0$:

Pogoj, da točka $\vec{r}$ leži na premici : $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}$

Enačba po komponentah: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

Enačba premice skozi (1,0,-1) in (2,2,1):

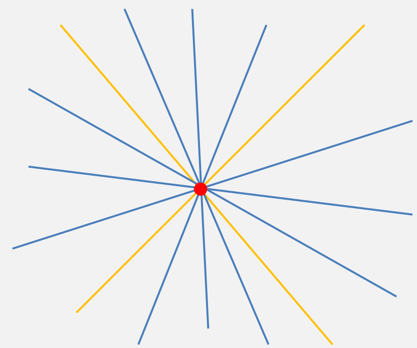
$$\vec{s} = (1,2,2), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Če je katera od komponent vektorja smeri enaka 0, se enačba premice poenostavi:

$$\vec{r}_0 = (1,-1,2), \quad \vec{s} = (2,0,-1) \Rightarrow \quad \frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{-1}, \quad y = -1$$

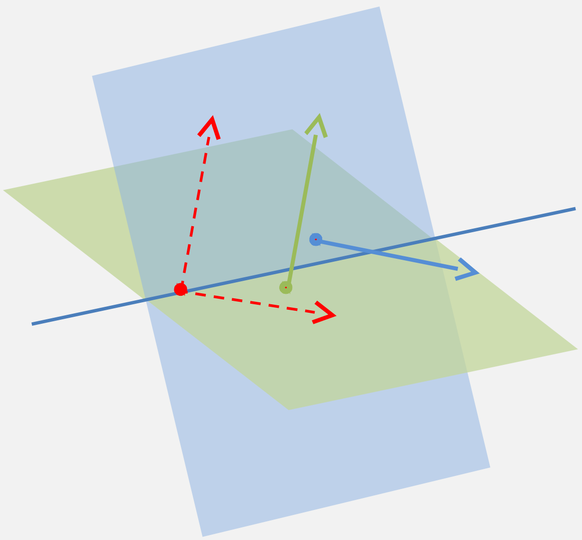
PREMICA KOT PRESEK DVEH RAVNIN

Skozi točko v ravnini lahko potegnemo nešteto premic. Poljubni dve izmed teh določata točko.

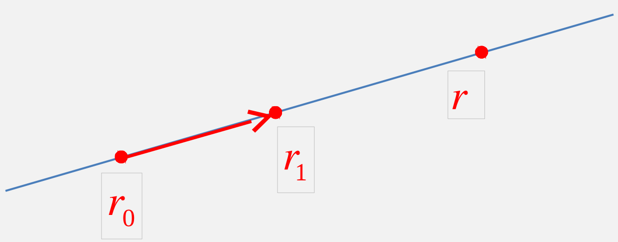


Podobno skozi premico v prostoru lahko postavimo nešteto ravnin. Poljubni dve izmed teh ravnin enolično določata premico.

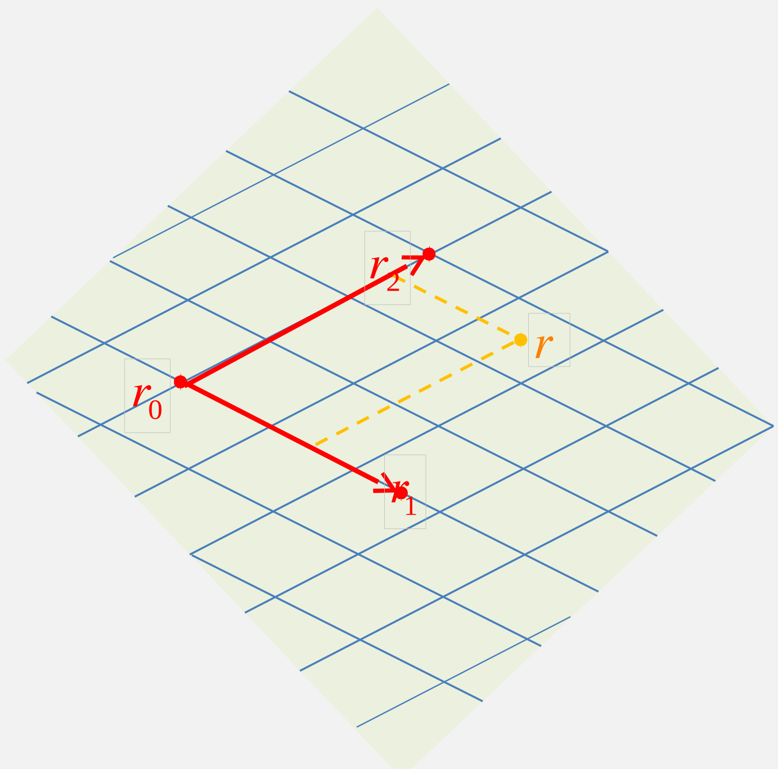
Ravnini z normalami $\vec{n}_0$ in $\vec{n}_1$ določata premico s smerjo $\vec{s}=\vec{n}_0\times\vec{n}_1$, za $\vec{r}_0$ pa vzamemo eno točko iz preseka.



PARAMETRIČNI OPIS PREMICE IN RAVNINE



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \times \vec{s} = \vec{r}_0 + t \times \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 \right), \quad t \in$$



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1 \times \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 \right) + t_2 \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_0 \right), \quad t_1, t_2 \in$$

VEKTORSKI PROSTORI

Vsak vektor na premici skozi izhodišče lahko zapišemo kot $v = a \cdot v$
kjer je v smerni vektor premice in a poljubno število.

Vsak vektor na ravnini skozi izhodišče lahko zapišemo kot $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$
kjer sta v_1, v_2 vektorja na ravnini in $a1, a2$ poljubni števili.

Izraz $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n$ imenujemo linearna kombinacija vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Podobno je polinom $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$ linearna kombinacija potenc $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Množico, v kateri lahko tvorimo linearne kombinacije (in za katere veljajo običajna računska pravila) imenujemo **linearni prostor** ali **vektorski prostor**.

Dovolj je, če preverimo, ali so linearne kombinacije dveh vektorjev $a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$ vsebovane v množici.

Primeri linearnih prostorov so še realna in kompleksna števila, funkcije, ipd.

Cela števila niso linearni prostor, ker pri množenju z realnimi števili ne dobimo nujno cela števila.

Pozitivna realna števila niso linearni prostor, ker v njih ne moremo odštevati.

Najbolj značilni primer vektorskega prostora tvorijo realne n-terice. Elementi so oblike $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, seštevamo in množimo jih po komponentah:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

$$k\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)=(k\cdot x_1,\ k\cdot x_2,\dots,\ k\cdot x_n)$$

V vektorskem prostoru lahko ene elemente izrazimo kot linearne kombinacije drugih elementov. Včasih vse elemente izrazimo s pomočjo zelo majhnega števila vektorjev.

$$(2,3,-5)=2\times(1,0,0)+3\times(0,1,0)-5\times(0,0,1)$$

ali v splošnem

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1\times(1,0,\dots,0)+x_2\times(0,1,\dots,0)+\dots+x_n\times(0,\dots,0,1)$$

polinomi

$$x^3-2x+4=4\times1-2\times x+1\times x^3$$

kompleksna števila

$$2-3i=2\times1-3\times i$$

Naj bo $V=\left\{(x,y,z) \quad {}^{3}; x+2y+z=0\right\}$.

Za $(x,y,z),(x',y',z')\in V, a,a'\in$ dobimo

$a\cdot(x,y,z)+a'\cdot(x',y',z')=(ax+a'x',ay+a'y',az+a'z')$ in

$(ax+a'x')+2(ay+a'y')+(az+a'z')=a\underbrace{(x+2y+z)}_{0}+a'\underbrace{(x'+2y'+z')}_{0}=0$

V je tudi vektorski prostor, ki ga tvorijo trojice (oz. vektorji v prostoru), vendar ne vse.

Za podmnožico vektorskega prostora, ki je tudi sama podprostor, pravimo, da je vektorski podprostor.

Ravnine in premice skozi izhodišče so podprostori v prostoru vseh vektorjev v IR3.

Ravnina, ki ne gre skozi izhodišče, ni podprostor prostora vektorjev v IR3.

Polinomi, ki imajo ničlo v točki 1 so podprostor v vektorskem prostoru vseh polinomov.

Vzemimo polinoma $p(x),q(x)$, za katera je $p(1)=q(1)=0$: tedaj je $(a\cdot p+b\cdot q)(1)=ap(1)+bq(1)=0$.

Ali je mogoče v vsakem vektorskem prostoru izbrati nekaj vektorjev in s pomočjo njih izraziti vse ostale?

Množica vektorjev B je **baza** vektorskega prostora V, če lahko vsak vektor iz V na en sam način izrazimo kot linearno kombinacijo elementov B.

Baza vektorskega prostora mora biti \`ravno prav velika': če je premajhna, se nekaterih elementov V ne bo dalo izraziti z elementi baze; če ima preveč elementov pa se bo dalo elemente V izraziti na (pre)več različnih načinov.

Vektor $\vec{v}$ lahko na en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, če ima enačba $x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{v}_n = \vec{v}$ eno samo rešitev.

Če $\vec{v}$ lahko zapišemo na dva različna načina:

$$\vec{v} = x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{v}_n = x_1' \cdot \vec{v}_1 + x_2' \cdot \vec{v}_2 + \cdots + x_n' \cdot \vec{v}_n,$$

potem je $(x_1 - x_1') \cdot \vec{v}_1 + (x_2 - x_2') \cdot \vec{v}_2 + \cdots + (x_n - x_n') \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ neničelni zapis vektorja $\vec{0}$.

Vektorji $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ so linearno neodvisni, če ima enačba $x_1 \cdot \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + x_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ eno samo rešitev in sicer $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Zapis vektorja kot linearne kombinacije neodvisnih vektorjev je vedno enoličen.

V vektorskem prostoru V imamo neskončno mnogo možnih izbir za bazo, vsem tem bazam pa je skupno le to, da imajo enako mnogo elementov. Številu elementov baze pravimo **dimenzija** prostora V in ga označimo $\dim_V$.

V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ lahko za bazo vzamemo vektorje (1,0,0), (0,1,0) in (0,0,1). Poljuben vektor lahko zapišemo kot linearno kombinacijo teh treh in sicer na en sam način:

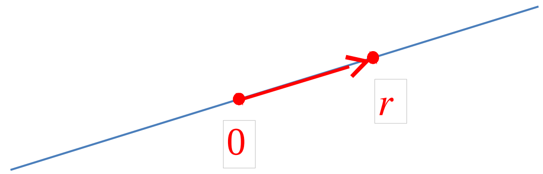
$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 \times (1,0,0) + x_2 \times (0,1,0) + x_3 \times (0,0,1)$$

Dimenzija prostora $\mathbb{R}^3$ je 3.
Podobno je dimenzija prostora $\mathbb{R}^n$ enaka n.

V vektorskem prostoru vseh polinomov lahko za bazo vzamemo vse potence: 1, x, x^2, x^3, ...
Vektorski prostor vseh polinomov je neskončnodimenzionalen.

Kompleksna števila so dvodimenzionalni vektorski prostor z bazo: 1, i.

Premica skozi izhodišče je vektorski prostor, v katerem lahko za bazo vzamemo (katerikoli) njen smerni vektor. Premica skozi izhodišče je enodimenzionalni vektorski prostor.



Ravnina skozi izhodišče je vektorski prostor, v katerem lahko za bazo vzamemo katerakoli vektorja, ki ležita v ravnini, vendar ne na isti premici. Ravnina je dvodimezionalni vektorski prostor.

V ravnini z enačbo $x+y+2z=0$ lahko za bazo vzamemo vektorja (2,0,-1) in (0,2,-1):

Če za (x,y,z) velja $x+y+2z=0$, potem je $z=-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}$ in $(x,y,z)=\frac{x}{2}(2,0,-1)+\frac{y}{2}(2,0,-1)$.

V vektorskem prostoru IR3 lahko za bazo vzamemo katerekoli tri vektorje, ki ne ležijo v isti ravnini.

LINEARNE FUNKCIJE

V,W linearna prostora.
Funkcija $L:V\to W$ je **linearna**, če ohranja linearne kombinacije, tj. če velja

$$L(a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2+\cdots+a_n\cdot v_n)=a_1\cdot L(v_1)+a_2\cdot L(v_2)+\cdots+a_n\cdot L(v_n)$$

Zadošča preveriti, če velja $L(a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2)=a_1\cdot L(v_1)+a_2\cdot L(v_2)$.

$L:\ ^3\to\ ^2,\quad L(x,y,z)=(x,y+2z)$ je linearna.

$$\begin{aligned}L\big(a(x,y,z)+a'(x',y',z')\big)&=L(ax+a'x',ay+a'y',az+a'z')=\big(ax+a'x',ay+a'y'+2(az+a'z')\big)\\&=a(x,y+2z)+a'(x',y'+2z')=aL(x,y,z)+a'L(x',y',z')\end{aligned}$$

$L:\ ^2\to\ ,\quad L(x,y)=x-2y$ je linearna.

$K:\ ^2\to\ ,\quad K(x,y)=x-2y+1$ ni linearna.

$$K\big(a(x,y)+a'(x',y')\big)=L(ax+a'x',ay+a'y')=ax+a'x'-2(ay+a'y')+1$$

$$aK(x,y)+a'K(x',y')=a(x-2y+1)+a'(x'-2y'+1)=ax+a'x'-2(ay+a'y')+a+a'$$

Odvajanje je linearna preslikava, saj velja $(a\cdot u(x)+b\cdot v(x))'=a\cdot u'(x)+b\cdot v'(x)$.

LINEARNE ENAČBE

Linearna enačba je enačba oblike

$$L(x)=w$$

kjer je $L:V\to W$ linearna funkcija in

□W

$2x+3y=-2$ je linearna enačba, kjer je $L:\ {}^{2}\to\ ,\ L(x,y)=2x+3y,\ w=-2$

$$\left.\begin{aligned}2x+y&=1\\-x+2y&=3\end{aligned}\right\}$$

je linearna enačba, kjer je $L:\ {}^{2}\to\ {}^{2},\ L(x,y)=(2x+y,-x+2y),\ w=(1,3)$

Z ustrezno izbrano linearno funkcijo L in vektorjem w lahko poljubni sistem linearnih enačb strnjeno zapišemo kot eno linearno enačbo.

$f'(x)+2f(x)=x-1$

je diferencialna enačba, ki jo lahko zapišemo kot linearno enačbo $L(f)=w$ za

$L:\{\text{odvedljive funkcije}\}\to\{\text{funkcije}\},\ L(f)=f'+2f$ in $w=x-1$

Želimo odgovoriti na dve vprašanji:

a) Ali je enačba $L(x)=w$ rešljiva?
b) Če je enačba rešljiva, kaj so vse njene rešitve?

Za linearno funkcijo $L:V\rightarrow W$ vpeljemo:

$Z(L)=\{L(v)\in W;\ v\in V\}$ zaloga vrednosti L ('slika' L)

$N(L)=\{v\in V;\ L(v)=0\}$ ničelna množica L ('jedro' L)

> $N(L)$ je podprostor prostora V, $Z(L)$ pa je podprostor prostora W.

Res, če sta $v,v'\in N(L)$, potem je $L(av+a'v')=aL(v)+a'L(v')=0$, torej je tudi $av+a'v'\in N(L)$.

Poleg tega, za $L(v),L(v')\in Z(L)$ je $aL(v)+a'L(v')=L(av+a'v')$, torej je tudi $aL(v)+a'L(v')\in Z(L)$.

> Vsota dimenzij zaloge vrednosti in ničelne množice je ravno dimenzija V.
>
> $\dim Z(L)+\dim N(L)=\dim V$

Izberimo bazo $L(x1),\ldots, L(xi)$ za $Z(L)$ in bazo $y1,\ldots,yj$ za $N(L)$. Za vsak $v\in V$ lahko enolično izrazimo $L(v)= a1\ L(x1)+\ldots+ai\ L(xi)= L(a1\ x1+\ldots+ai\ xi)$. Tedaj je $v-(a1\ x1+\ldots+ai\ xi)$ v ničelni množici L in ga lahko enolično izrazimo kot $v-(a1\ x1+\ldots+ai\ xi)= b1\ y1+\ldots+bj\ yj$. Sklepamo, da lahko v enolično izrazimo kot $v=a1\ x1+\ldots+ai\ xi+ b1\ y1+\ldots+bj\ yj$, torej je dimenzija V enaka $i+j$.

Naj bo ena x_0 rešitev enačbe: $L(x_0) = w$.

Če je $x_1 - x_0 \in N(L)$, potem je tudi rešitev x_1 enačbe, ker je

$$L(x_1) = L(x_0 + x_1 - x_0) = L(x_0) + L(x_1 - x_0) = w + 0 = w.$$

Obratno, če je $L(x_1) = w$, potem je $L(x_1 - x_0) = w - w = 0$, torej je $x_1 - x_0 \in N(L)$.

a) Enačba $L(x)=w$ rešljiva, če je $w \in Z(L)$.

b) Če je $L(x_0)=w$, potem so vse rešitve enačbe dane z $x_0 + N(L) = \{ x_0 + v;\ v \in N(L)\}$.

Velikost jedra $N(L)$ funkcije L določa velikost množice rešitev enačbe $L(x)=w$:

Če je dimenzija vektorskega prostora $N(L)$ enaka n, potem lahko zapišemo splošno rešitev v kateri nastopa n parametrov. Pravimo, da je množica rešitev n-parametrična.

Če je x_0 rešitev enačbe $L(x)=w$ in če je $v_1, v_2, \ldots, v_n$ baza prostora $N(L)$, potem je splošna rešitev enačbe dana z $x = x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_n v_n$, kjer so $t_1, t_2, \ldots, t_n$ poljubna realna števila.

Rešimo enačbo $(1,0,2)\times \vec{x} = (2,1,0)$.

Funkcija $L: {}^3 \to {}^3$, $L(\vec{x}) = \vec{v}\times\vec{x}$ je linearna $\left(\text{velja } \vec{v}\times(a\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}) = a\cdot\vec{v}\times\vec{x}+b\cdot\vec{v}\times\vec{y}\right)$, zato je $(1,0,2)\times\vec{x} = (2,1,0)$ linearna enačba.

V zalogi vrednosti funkcije $L(\vec{x}) = (1,0,2)\times\vec{x}$ so vektorji, ki so pravokotni na $(1,0,2)$, zato $(2,1,0)\notin Z(L)$ in enačba ni rešljiva.

Rešimo enačbo $(1,0,2)\times\vec{x} = (2,1,-1)$.

Vektor $(2,1,-1)$ je pravokoten na $(1,0,2)$ zato je vsebovan v zalogi $Z(L)$ funkcije $L(\vec{x}) = (1,0,2)\times\vec{x}$. Enačba je rešljiva.

Eno rešitev enačbe dobimo tako, da vzamemo primerno dolg vektor v smeri, ki je pravokotna na $(1,0,2)$ in $(2,1,-1)$:

$(1,0,2)\times(2,1,-1) = (-2,5,1)$ in $(1,0,2)\times(-2,5,1) = (-10,-5,5) = -5\cdot(2,1,-1)$, zato lahko vzamemo $\vec{x}_0 = \frac{1}{5}(2,-5,-1)$.

Jedro funkcije $L(\vec{x}) = (1,0,2)\times\vec{x}$ tvorijo vektorji, ki so vzporedni z $(1,0,2)$.
Prostor je enodimenzionalen, za bazo lahko vzamemo kar vektor $(1,0,2)$.

Splošna rešitev enačbe $(1,0,2)\times\vec{x} = (2,1,-1)$ je $\vec{x} = \frac{1}{5}(2,-5,-1) + t\cdot(1,0,2) = (t+\frac{2}{5}, -1, 2t-\frac{1}{5})$.

MATRIČNI OPIS LINEARNIH FUNKCIJ

Linearno funkcijo L: ℝ3 → ℝ lahko določimo takole

$$L(x1,\ x\ 2,\ x\ 3)=L(x1\cdot(1,0,0)+x2\cdot(0,1,0)+x3\cdot(0,0,1))=x1\cdot L(1,0,0)+x2\cdot L(0,1,0)+x3\cdot L(0,0,1))$$

Vrednost L je določena s tremi števili: $a1=L(1,0,0)$, $a2=L(0,1,0)$ in $a3=L(0,0,1)$.

Če poznamo $a1,a2,a3$ lahko $L(x1,\ x\ 2,\ x\ 3)$ izračunamo kot skalarni produkt:

$$L(x1,\ x\ 2,\ x\ 3)=x1\ a1+\ x2\ a2+\ x3\ a3=\ (a1,a2,a3)\cdot(x1,\ x\ 2,\ x\ 3)$$

Podobno je linearna funkcija n spremenljivk določena z n–terico števil $a1,a2,...,an$ in jo lahko izračunamo kot skalarni produkt

$$L(x1,\ x\ 2,...,\ x\ n)=\ (a1,a2,...,an)\cdot(x1,\ x\ 2,...,\ x\ n)$$

Nasploh, če je V n – dimenzionalni vektorski prostor z bazo $v_1, v_2, \dots, v_n$, je linearna funkcija $L: V \to$ določena z vrednostmi na bazi $a_1 = L(v_1), a_2 = L(v_2), \dots, a_n = L(v_n)$:

S pomočjo števil $a_1, a_2, \dots, a_n$ enostavno izračunamo $L(x)$ za vse $x \in V$:

(a) x zapišemo kot linearno kombinacijo elementov baze $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

(b) $L(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$

Linearno funkcijo L:$V \to W$ iz n-dimenzionalnega v m-dimenzionalni vektorski prostor tvori m linearnih funkcij n spremenljivk, ki jih lahko predstavimo s tabelo $m \times n$ števil.

Za $v=(v_1,v_2,v_3)$ je z $L(x)=v\times x$ podana linearna funkcija $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

$$L(x_1,x_2,x_3)=(v_2x_3-v_3x_2,\ v_3x_1-v_1x_3,\ v_1x_2-v_2x_1).$$

Prva komponenta je podana z vektorjem $(0,-v_3,v_2)$, druga z vektorjem $(v_3,0,-v_1)$ in tretja z vektorjem $(-v_2,v_1,0)$.

Če jih zapišemo po vrsticah dobimo tabelo

$$\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stolpci pa so ravno vrednosti L na bazi (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1).

$$\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

V vektorski prostor z bazo $v_1,v_2,\ldots,v_n$ W vektorski prostor z bazo $w_1,w_2,\ldots,w_m$

Linearna funkcija $L:V\to W$ je povsem določena z vrednostmi na bazi V:

$$L(x_1v_1+x_2v_2+\ldots+x_nv_n)=x_1L(v_1)+x_2L(v_2)+\ldots+x_nL(v_n)$$

Če poznamo koordinate elementa $v \in V$, potem lahko vrednost $L(v) \in W$ izrazimo s pomočjo teh koordinat in nabora vrednosti $L(vi)$. Če pa želimo izračunati še koordinate $L(v)$, potem moramo poznati tudi koordinate elementov $L(vi)$.

Slike baznih elementov $L(vi)$ zapišemo kot linearne kombinacije elementov baze W:

$$L(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Tako dobljena števila zložimo v tabelo
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
ki ji pravimo matrika.

Če je $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$, je

$$\begin{aligned} L(v) &= x_1L(v_1) + x_2L(v_2) + \ldots + x_nL(v_n) \\ &= x_1(a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m) + x_2(a_{12}w_1 + \ldots + a_{m2}w_m) + \ldots + x_n(a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)w_1 + \ldots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)w_m \end{aligned}$$

Koordinata pri vektorju w_j je skalarni produkt j-te vrstice $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ z n-terico $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Linearno funkcijo L predstavimo z matriko $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, element x pa z matriko $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Stolpci matrike so koeficienti vektorjev $L(vi)$ zapisani v bazi wj .

Koordinate slike $L(x)$ pa predstavimo s produktom $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matrika 2×2 predstavlja linearno funkcijo $\,^2 \to \,^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Matrika 3×4 predstavlja linearno funkcijo $\,^4 \to \,^3$

RAČUNSKE OPERACIJE NA MATRIKAH

Linearni funkciji $L1, L2\colon V \to W$ predstavimo z matrikama

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Potem je vsota $L1+L2\colon V \to W$ predstavljena z matriko

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

VSOTA MATRIK

Linearna funkcija $k \cdot L1\colon V \to W$ pa je predstavljena z matriko

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

PRODUKT MATRIKE S ŠTEVILOM

Matrike lahko seštevamo in množimo s poljubnim številom, zato množica vseh matrik tvori vektorski prostor.

V vektorski prostor z bazo $v_1, v_2, \ldots, v_n$

W vektorski prostor z bazo $w_1, w_2, \ldots, w_m$

Z vektorski prostor z bazo $z_1, z_2, \ldots, z_l$

$L: V \to W$ in $K: W \to Z$ linearni funkciji, predstavljeni z matrikama

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix}$$

Katera matrika ustreza sestavljeni linearni funkciji $K \circ L: V \to W \to Z$?

$L(v_i)$ je v bazi $w_1, w_2, \ldots, w_m$ predstavljen s stolpcem $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, zato je $K(L(v_i))$ v bazi $z_1, z_2, \ldots, z_l$ predstavljen s produktom

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Zato funkciji $K \circ L$ ustreza matrika, sestavljena iz stolpcev, ki predstavljajo $K(L(vi))$.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lm} \end{pmatrix}$$

PRODUKT MATRIK

cij je skalarni produkt i-te vrstice prve matrike z j-tim stolpcem druge matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Produktna matrika ima enako vrstic kot prvi in enako stolpcev kot drugi faktor.

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Sistem enačb $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 4 \\ x - 3y - 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$ lahko strnjeno zapišemo kot $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Množenje z matriko 2×3 predstavlja linearno funkcijo $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, zato je to linearna enačba oblike $L(x)=b$ za $x \in \mathbb{R}^3$ in $b \in \mathbb{R}^2$.

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ je matrika sistema, $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ je desna stran sistema

Vemo, da je enačba rešljiva, če je $b \in Z(L)$.

Vse rešitve rešljive enačbe dobimo kot elemente množice $x_0+N(L)$, kjer je x_0 neka rešitev sistema, $N(L)$ pa je jedro funkcije L.

Kako iz matrike sistema in iz desne strani sistema določimo x_0 in $N(L)$?

Sisteme linearnih enačb lahko rešujemo z opravljanjem zaporedja preprostih operacij, ki poenostavijo enačbe, vendar pa ne spremenijo množice rešitev.

Sistemu $\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$ priredimo razširjeno matriko sistema $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

V sistemu linearnih enačb se množica rešitev ne spremeni, če:

1. zamenjamo vrstni red enačb;
2. enačbo pomnožimo z neničelnim številom;
3. eno enačbo prištejemo kaki drugi enačbi.

Na razširjeni matriki sistema se navedene operacije odražajo takole:

1. zamenjamo vrstni red vrstic v matriki;
2. vrstico matrike pomnožimo z neničelnim številom;
3. eno vrstico matrike prištejemo kaki drugi vrstici.

$$\left.\begin{aligned} y+2u+v&=0\\ x+2y-3u+v&=2\\ 2x-3u&=1 \end{aligned}\right\}$$

koeficiente zapišemo v razširjeno matriko sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriko poenostavimo z Gaussovim eliminacijskim postopkom:

Na prvem koraku pogledamo, ali je element $a_{11} \neq 0$. Če ni, pa to dosežemo z zamenjavo vrstnega reda vrstic.

$$\begin{array}{r} \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prvo vrstico množimo z $-a_{i1}/a_{11}$ in jo potem prištejemo i-ti vrstici za i=2,...,m. Tako dosežemo, da so vsi ostali elementi v stolpcu enaki nič in s tem smo neznank x_1 eliminiramo iz vseh ostalih enačb.

$$\begin{array}{r} \\ \cdot 4 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Postopek ponovimo na drugem stolpcu, kjer poiščemo neničelni element v drugem stolpcu (razen tistega v prvi vrstici). Če ga najdemo, ga prestavimo v drugo vrstico in z njim uničimo vse vodilne elemente v preostalih vrsticah.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 11 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Postopek nadaljujemo dokler ne dobimo matrike, ki ima pod diagonalo same ničle .

Vrstice delimo z vodilnim elementom, da dobimo enke in potem s prištevanjem pridelamo še ničle nad diagonalo.

$$\begin{array}{c} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}\begin{array}{c} \div \\ \div \\ \div \end{array} \longrightarrow \cdot(-2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{17}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}\begin{array}{c} \div \\ \div \\ \div \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{6}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}\begin{array}{c} \div \\ \div \\ \div \end{array}$$

Začetni sistem smo poenostavili do sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + \tfrac{3}{11}v &= \tfrac{1}{11} \\ y + \tfrac{7}{11}v &= \tfrac{6}{11} \\ z + \tfrac{2}{11}v &= \tfrac{-3}{11} \end{aligned}\right\}$$

Vsaka preostala enačba določa eno neznanko. Ker imamo tri enačbe in štiri neznanko, lahko neznanko v poljubno izberemo, ostale pa izrazimo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-3v}{11} \\ y &= \frac{6-7v}{11} \\ z &= \frac{-3-2v}{11} \end{aligned}$$

Vektorski zapis: $(x,y,u,v) = \underbrace{\left(\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{3}{11}, 0\right)}_{\text{posebna rešitev}} + t \times \underbrace{\left(\frac{3}{11}, \frac{7}{11}, \frac{2}{11}, -1\right)}_{\text{baza ničelne množice}}$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ x-2z&=1\\ 2x+y-z&=0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gaussova eliminacija}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

V zadnji vrstici so koeficienti pri neznankah enaki nič, desna stran pa je od nič različna! Kadar se to zgodi, sistem enačb ni rešljiv.

Sistem enačb, v katerem je desna stran ničelna imenujemo homogeni sistem enačb. Homogen sistem ima vedno vsaj trivialno rešitev, množica vseh rešitev pa je ravno ničelna množica linearne funkcije, podane z matriko sistema.

$$\left.\begin{aligned} x-2y+u&=0\\ y-2u+v&=0\\ 2x-3y+v&=0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gaussova eliminacija}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(desne strani ne pišemo)

Ostali sta nam dve enačbi za štiri neznanke, zato dve neznanki lahko poljubno izberemo, prostor rešitev (tj. ničelna množica) pa je dvodimenzionalen.

Za bazo lahko vzamemo vektorja (3,2,1,0) in (2,-1,0,1), splošna rešitev pa je $t1\cdot$(3,2,1,0)+ $t2\cdot$(2,-1,0,1).

UREJANJE ENAČB

Uredi enačbo gorenja etanola: $C2H5OH + O2 \rightarrow CO2 + H20$

Neznane količine označimo z x, y, u, v in jih uredimo po posameznih atomih (ali skupinah)

$$x \cdot C2H5OH + y \cdot O2 \rightarrow u \cdot CO2 + v \cdot H20$$

C: $2x = u$

H: $6x = 2v$

O: $x + 2y = 2u + v$

Dobimo homogen sistem linearnih enačb. Sistem je preprost in ne zahteva Gaussove eliminacije.

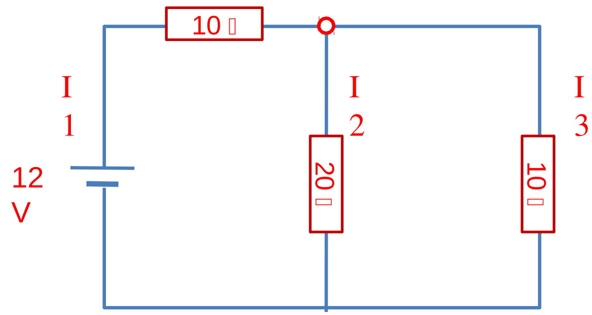
Rešitev: $u = 2x,\ v = 3x,\ y = 3x.$

Neznanko x izberemo tako, da za rešitve dobimo čim manjša naravna števila.

$$C2H5OH + 3O2 \rightarrow 2CO2 + 3H20$$

Uredi enačbi gorenja propana $C3H8 + O2 \rightarrow CO2 + H20$
in reakcije magnezijevega fosfida z vodo $Mg3P2 + H2O \rightarrow PH3 + Mg(OH)2$

Določi tokove v električnem krogu:



Označimo tokove in napišemo Kirchhoffove enačbe za razvejišča I1= I2+ I3

in

kroge 10 I1+20 I2 = 12 (padec napetosti v levem krogu)

10 I1+10 I3 = 12 (padec napetosti v zunanjem krogu)

20 I2- 10 I3 = 0 (desni krog – enačba je odvečna, ker sledi iz prejšnjih dveh)

$$\left.\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 10 I_1 + 20 I_2 &= 12 \\ 10 I_1 + 10 I_3 &= 12 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 12 \\ 10 & 0 & 10 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.72 \\ 0 & 1 & 0 & 0.24 \\ 0 & 0 & 1 & 0.48 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = 0.72\,\mathrm{A}, I_1 = 0.24\,\mathrm{A}, I_1 = 0.48\,\mathrm{A}$$