MATEMATIKA 1

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM
BIOKEMIJA
1. LETNIK

ODVOD

Kako primerjamo hitrost spreminjanja funkcije glede s spremembo argumenta?

Diferenčni količnik

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

je povprečna hitrost spreminjanja funkcije f na intervalu med $x0$ in $x1$.

'Trenutna' hitrost v času $x0$ je $df(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=2$$

$$df(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

FIZIKALNI POMEN

$x=x(t)$ pot v odvisnosti od časa t

$$\bar{x} = \frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}$$ povprečna hitrost v času med t_0 in t_1

$$dx(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$$ trenutna hitrost v t_0

$v(t)$ hitrost gibanja v času t $\Longrightarrow$ $dv(t0)$ pospešek

$W(t)$ toplotna energija telesa v času t $\Longrightarrow$ $dW(t0)$ toplotni tok

$Q(t)$ električni naboj na prevodniku v času t $\Longrightarrow$ $dQ(t0)$ električni tok

ANALITIČNI POMEN

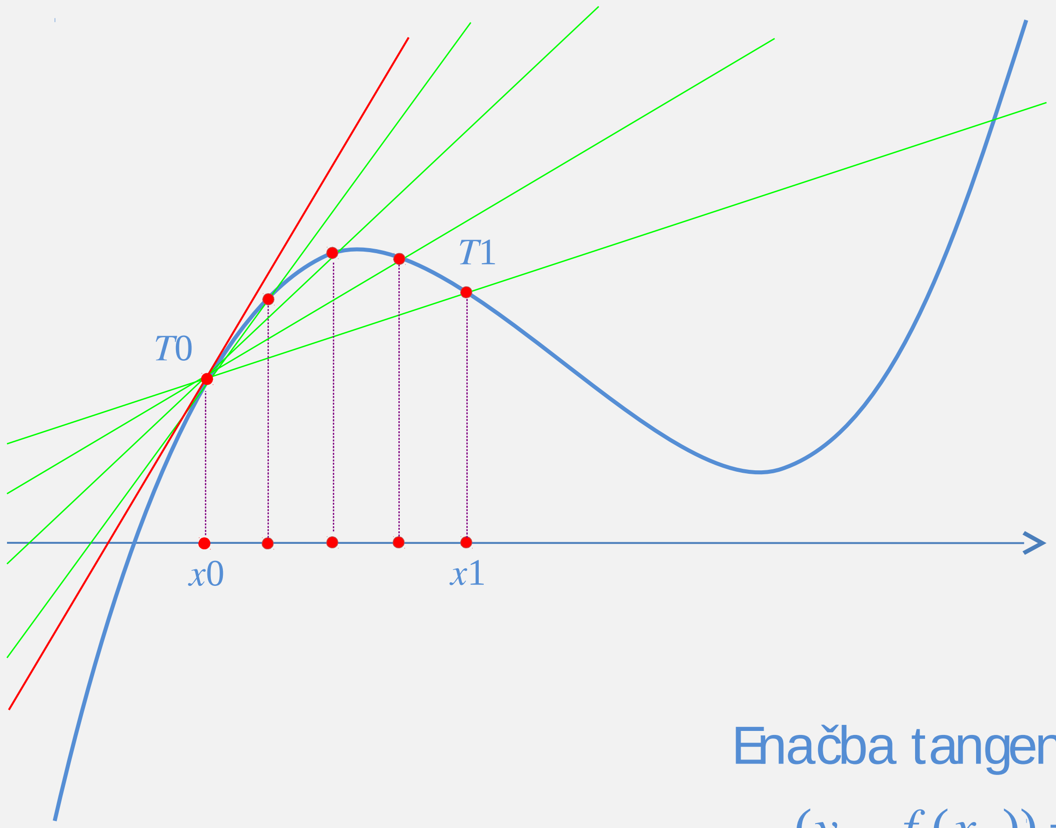
f naraščajoča na intervalu I okoli točke $x0$ (tj. lokalno naraščajoča pri $x0$)

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{za} \quad x \in I \quad \Rightarrow \quad df(x_0) \geq 0$$

Podobno, če je f lokalno padajoča okoli točke $x0$ $\Rightarrow$ $df(x_0) \leq 0$

GEOMETRIJSKI POMEN

$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ je smerni koeficient premice, ki seka graf funkcije f v točkah $T0(x0, f(x0))$ in $T1(x1, f(x1))$.



$df(x0)$ je smerni koeficient tangente na graf funkcije f v točki $T0$.

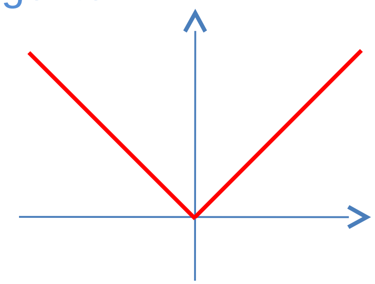
Enačba tangente na graf f v točki T_0 :

$$(y - f(x_0)) = df(x_0) \times (x - x_0)$$

ODVEDLJIVOST

Funkcija f je odvedljiva v točki x_0, če obstaja limita diferenčnega količnika $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Kjer je funkcija f odvedljiva, je njen graf gladek. V teh točkah ima natančno določeno tangento.

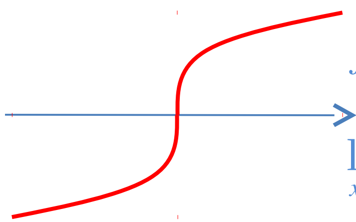


$$f(x) = |x|$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x} = 1$$

Leva limita se razlikuje od desne limite.

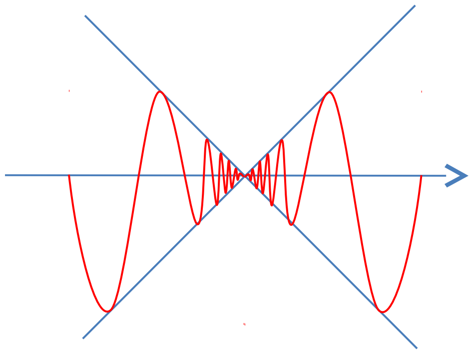


$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$$

tangenta v točki 0 je navpična

Diferenčni količnik gre proti neskončnosti.



$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Limita ne obstaja.

ALTERNATIVNI OPIS

Vpeljemo novo spremenljivko $h = x - x_0$: $$df(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$df(x_0)$ je število, za katero velja $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-df(x_0)\cdot h}{h} = 0$$

Drugače povedano: $f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0)\cdot h + o(h)$,

kjer je $o(h)$ oznaka za ostanek, za katerega velja $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$

Simbolično računanje z ostanki: $o(h) \pm o(h) = o(h)$

$g(h)\cdot o(h) = o(h)$ za poljubno omejeno funkcijo g

RAČUNANJE ODVODOV

I. korak: funkcija odvod

Predpis $x \quad df(x)$ določa funkcijo $f : A \to \mathbb{R}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \to$ točke, kjer je f odvedljiva

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ odvod funkcije f

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)$$

II. korak: računske operacije in sestavljanje

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$\begin{aligned} f(x+h)+g(x+h) &= f(x)+f'(x)\cdot h+o(h)+g(x)+g'(x)\cdot h+o(h) \\ &= f(x)+g(x)+\left(f'(x)+g'(x)\right)\cdot h+o(h) \end{aligned}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\begin{aligned} f(x+h)\cdot g(x+h) &= \left(f(x)+f'(x)\cdot h+o(h)\right)\cdot\left(g(x)+g'(x)\cdot h+o(h)\right) \\ &= f(x)\cdot g(x)+\left(f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\right)\cdot h+o(h) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$f' = \left(\frac{f}{g}\cdot g\right)' = \left(\frac{f}{g}\right)'\cdot g + \frac{f}{g}\cdot g' \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g(x)'$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)\cdot g'$$

$$\begin{aligned} f\left(g(x+h)\right) &= f\left(g(x)+g'(x)\cdot h+o(h)\right) \\ &= f\left(g(x)\right)+f'(g(x))\cdot\left(g'(x)\cdot h+o(h)\right)+o(h) \\ &= f\left(g(x)\right)+f'(g(x))\cdot g'(x)\cdot h+o(h) \end{aligned}$$

III. korak: odvodi osnovnih funkcij

$$(x^r)' = r x^{r-1} \qquad (\sin x)' = \cos x$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

In še...

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Na podlagi odvodov osnovnih funkcij in računskih pravil lahko rutinsko izračunamo odvod poljubne elementarne funkcije.

VIŠJI ODVODI

$$(f')' = f''$$
$$(f'')' = f'''$$
$$\dots$$

$$f(x) = x^3 - 2x + 4$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$

$$f(x) = x \sin x$$
$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$
$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x$$
$$= 2\cos x - x \sin x$$
$$f'''(x) = -2\sin x - \sin x - x \cos x$$
$$= -3\sin x - x \cos x$$
$$\dots\dots$$

S pomočjo višjih odvodov je mogoče natančneje opredeliti obnašanje funkcije.

ODVODI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

Za izbrani x označimo $a = f(x)$ in $b = df(x)$.

Formula $f(x+h) = a + b \cdot h + o(h)$ pomeni, da je linearna funkcija $h \mapsto a + b \cdot h$ najboljši linearni približek za funkcijo $h \mapsto f(x+h)$.

Odvod f pri $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je linearna funkcija $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ki je najboljši linearni približek za f:

$$f(\vec{x} + h) = f(\vec{x}) + L(h) + o(h) \qquad \left(\lim_{h \to 0} \frac{o(\vec{h})}{|h|} = \vec{0} \right)$$

Kadar odvod f pri x obstaja, ga označimo z $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Vsako linearno funkcijo $L: {}^n \to$ lahko predstavimo kot skalarni produkt

$$L\left(h_1,\ldots,h_n\right)=l_1 \cdot h_1+\ldots+l_n \cdot h_n$$

sprimerno izbranim vektorjem $\left(l_1,\ldots,l_n\right)$.

$$h_2=\ldots=h_n=0 \Rightarrow f(x_1+h_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+l_1 \cdot h_1+o(h_1)$$

$$\Rightarrow \quad l_1=\lim_{h_1\to 0}\frac{f(x_1+h_1,x_2,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h_1}$$

Izraz za $l1$ je definicija odvoda funkcije f samo po spremenljivki $x1$, tj. odvoda, pri katerem se delamo, da so spremenljivke $x2,\ldots, xn$ konstantne.

Temu pravimo delni ali parcialni odvod funkcije f na spremenljivko x_1 in ga označimo f'_{x_1} ter podobno za parcialne odvode $f'_{x_2},\ldots,f'_{x_n}$

$df\left(\vec{x}\right)=\left(f'_{x_1}\left(\vec{x}\right),\ldots,f'_{x_n}\left(\vec{x}\right)\right)$, gradient funkcije f pri točki $\vec{x}$

tradicionalne oznake so še: $\operatorname{grad} f$ in ∇f

$$f(x,y,z)=(x^2+y)z$$

$$f'_x=2xz$$

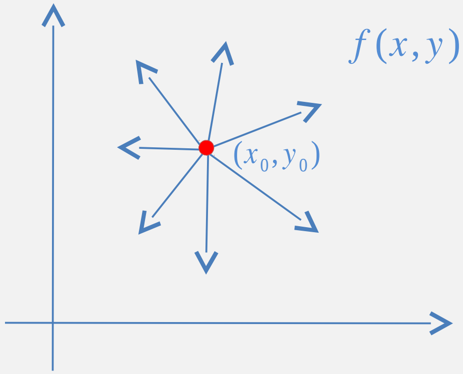
$$f'_y=z$$

$$f'_z=x^2+y \qquad df=(2xz,z,x^2+y)$$

$$P=\frac{nRT}{V}$$

$$P'_T=\frac{nR}{V} \qquad \operatorname{grad} P=nR\left(\frac{1}{V},-\frac{T}{V^2}\right)$$

$$P'_V=-\frac{nRT}{V^2}$$



$f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})$ sprememba vrednosti funkcije f v smeri $\vec{h}$

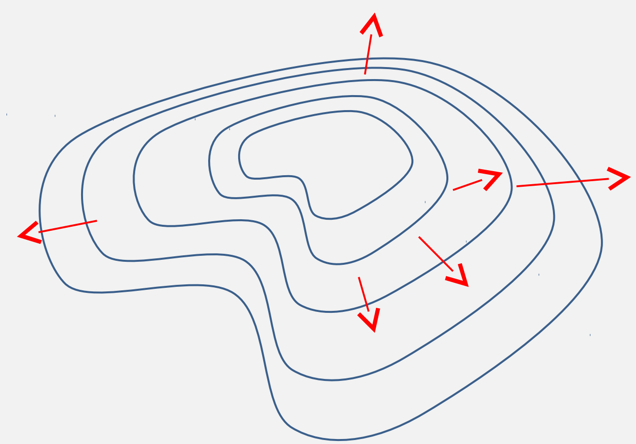
$\operatorname{grad} f(\vec{x})\cdot\vec{h}$ najboljši linearni približek za spremembo f v smeri $\vec{h}$

Skalarni produkt je največji, če imata faktorja isto smer $\Rightarrow$

$\operatorname{grad} f(\vec{x})$ je vektor, ki kaže v smer najhitrejšega naraščanja f pri točki $\vec{x}$.

Nivojnice funkcije $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ so krivulje, ki povezujejo točke, v katerih ima f isto vrednost (izohipse, izobate, izoterme,...). Podane so z enačbami $f(x1,\ldots,xn)=c$.

Gradientni vektor je pravokoten na nivojnico, ki gre skozi dano točko. Njegova velikost ponazarja hitrost naraščanja vrednosti funkcije.

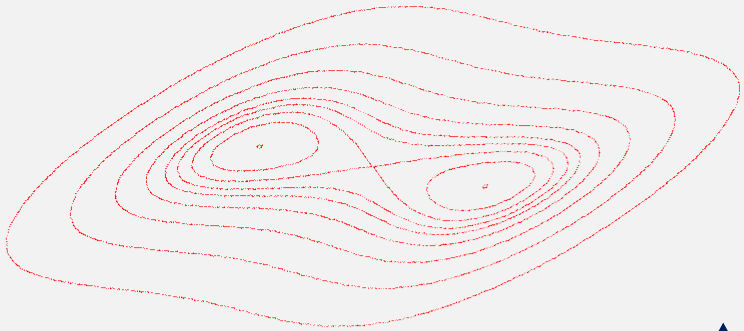


Gradient določa polje smeri, ki je v vsaki točki pravokotno na nivojnice.

$$f(x,y) = x^4 - 8xy + 4y^2 \qquad df(x,y) = (4x^3 - 8y, -8x + 8y)$$

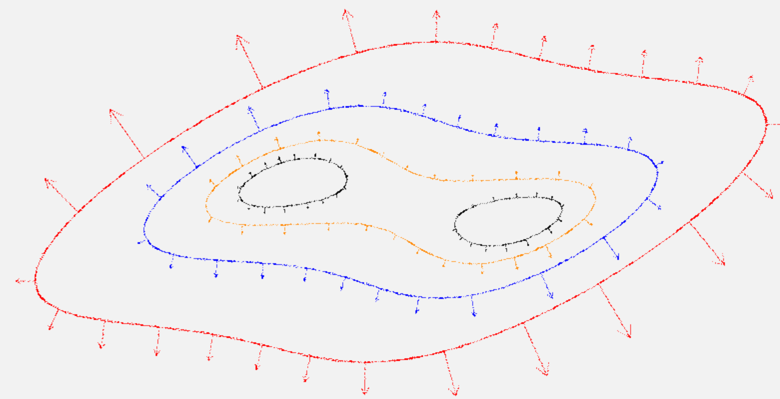
Nivojnice $x^4 - 8xy + 4y^2 = c$

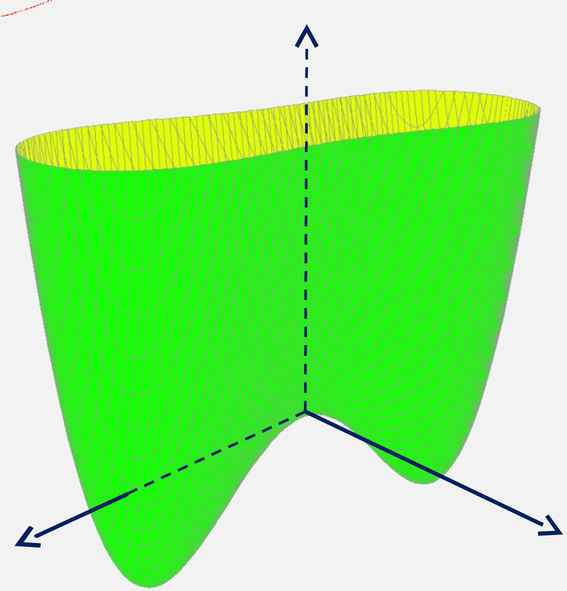
$(c = -4, -2, 0, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$



Gradientno polje smeri na nivojnicah

$x^4 - 8xy + 4y^2 = c \quad (c = -2, 2, 16, 64)$





Ploskev

$z = x^4 - 8xy + 4y^2$

ZVEZNOST IN ODVEDLJIVOST

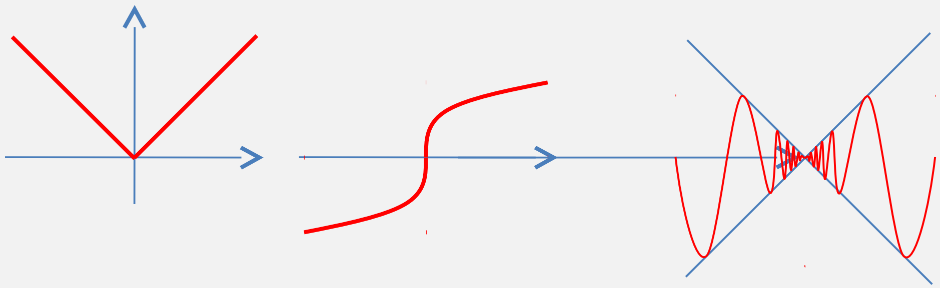
$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) \times (x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} df(x_0) \times (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{o(x - x_0)}{(x - x_0)} \times (x - x_0)$$

$$= f(x_0)$$

Kjer je f odvedljiva, je tudi zvezna.

Obratno seveda ni res kot kažejo primeri zveznih in obenem neodvedljivih funkcij:



ODVEDLJIVOST IN LOKALNI EKSTREMI

$f(x0)$ lokalni maksimum v notranjosti intervala definicije

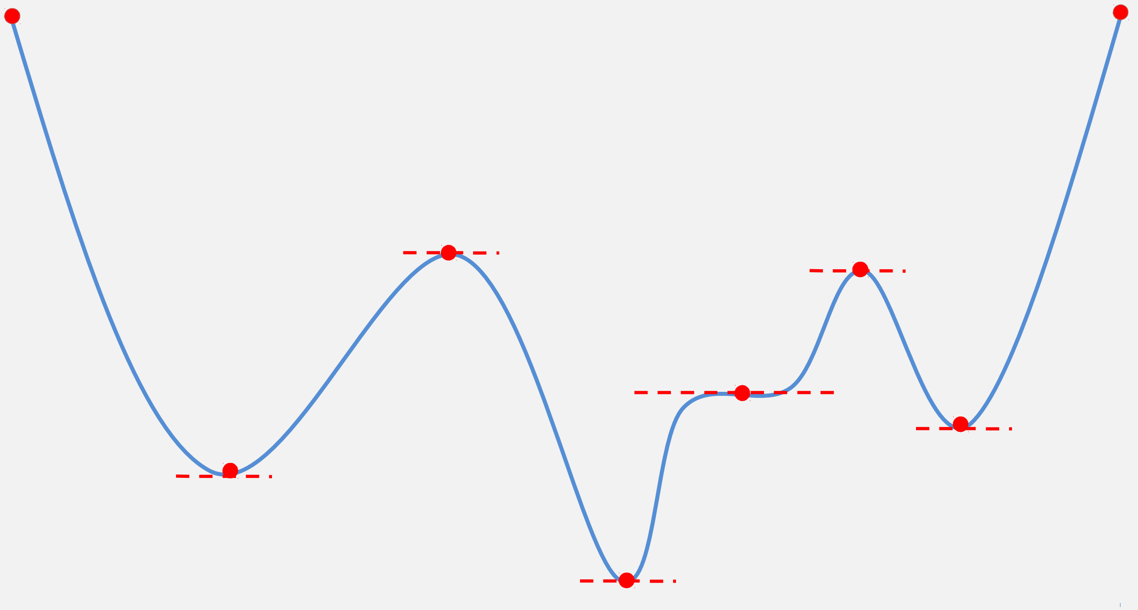
$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{za } x < x_0 \quad \text{in} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad \text{za } x > x_0$$

f odvedljiva pri $x0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{in} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad df(x_0) = 0 \quad \text{(stacionarna točka)}$$

Če ima odvedljiva funkcija lokalni ekstrem v notranjosti intervala, je tam njen odvod enak 0.



Ekstremi so lahko na robu ali pa v notranjosti definicijskega območja.

Če je ekstrem v notranjosti, je tam stacionarna točka.

Stacionarne točke so lahko lokalni ekstremi ali pa prevoji.

Lokalni ekstrem NI nujno tudi globalni ekstrem.

OKALNI EKSTREMI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

$f\left(\vec{x}_0\right)$ lokalni ekstrem v notranjosti definicijskega območja

f ne narašča v nobeni smeri $\Rightarrow \quad df\left(x_0\right) = 0$

$\Rightarrow \quad f'_{x_1} = 0, f'_{x_2} = 0, \ldots, f'_{x_n} = 0$

vsi parcialni odvodi so enaki 0

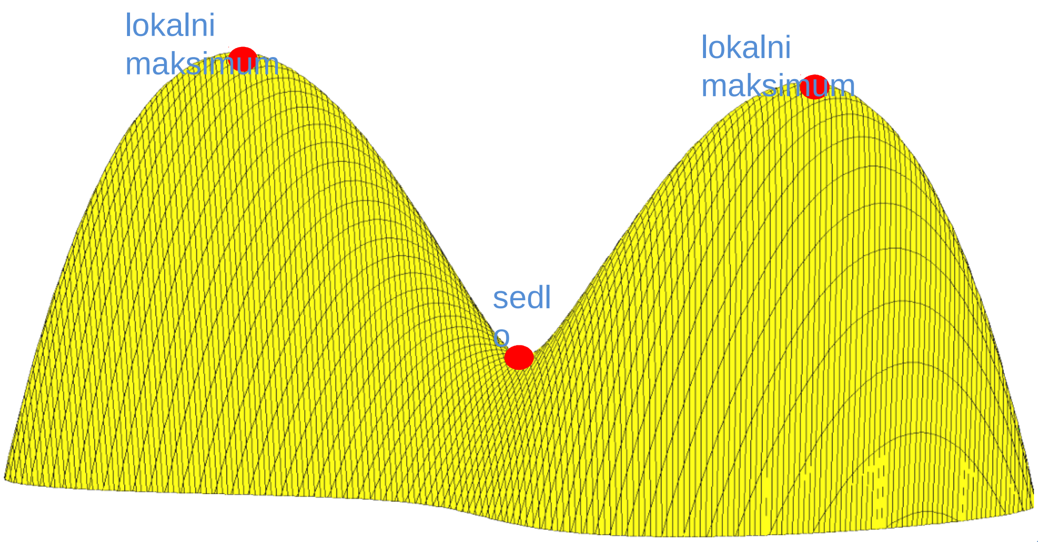
Kandidati za lokalne ekstreme so v stacionarnih točkah, tj. v točkah, kjer so vsi parcialni odvodi enaki 0

$$f(x,y) = 8xy - x^4 - 4y^2$$

$$\left.\begin{aligned} 8y - 4x^3 &= 0 \\ 8x - 8y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = 0, -\sqrt{2}, +\sqrt{2}$$

Stacionarne točke:

$$(0,0,0), \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4\right), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$$



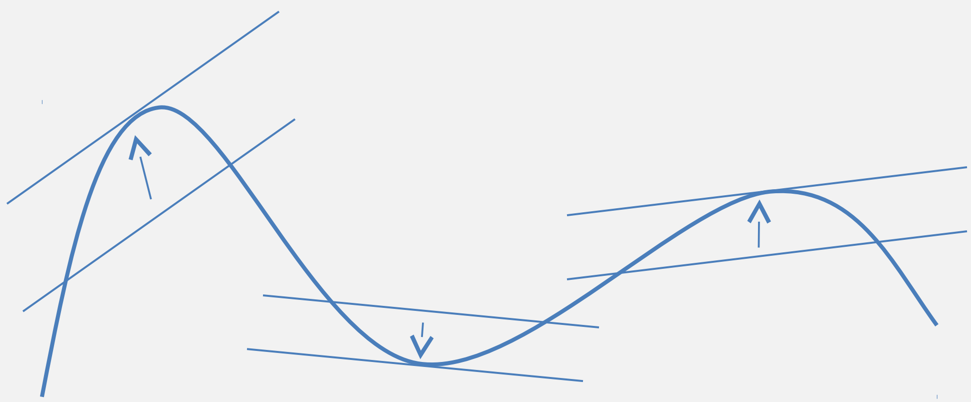
lastnosti funkcije (naraščanje, padanje, ekstremi) $\xrightarrow[\text{določajo}]{\text{neposredno}}$ vrednosti odvoda (predznak, ničle)

Če je funkcija f konstantna, je njen odvod 0.

Iz $f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) \times (x - x_0)$ pa sledi:

Če je $df(x0)=0$, je funkcija f približno konstantna, $f(x) \approx f(x0)$.

Ali lahko s pomočjo odvoda natančno izrazimo vrednost funkcije?

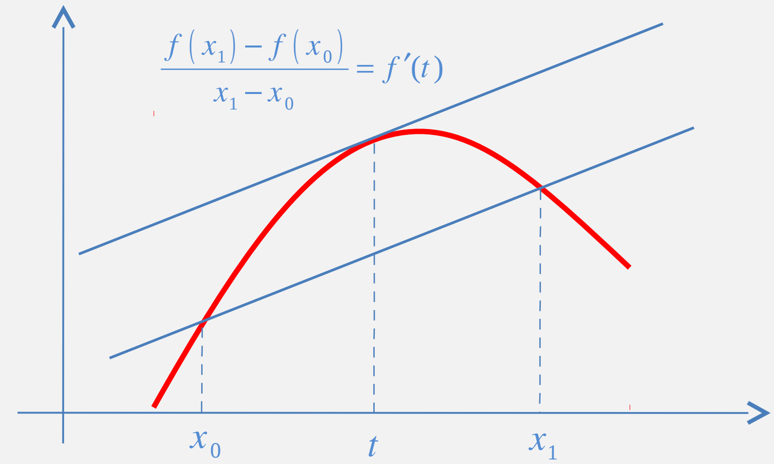


Za vsako sekanto lahko najdemo vzporedno tangento (npr. povprečna hitrost na danem časovnem intervalu je enaka hitrosti v nekem vmesnem trenutku).

LAGRANGEV IZREK

Če je f odvedljiva, potem med vsakim parom točk $x0,x1$ obstaja tak t, da je

$$f'(t) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Utemeljitev brez sklicevanja na sliko:

Tvorimo pomožno funkcijo $g(x) = f(x) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

g je odvedljiva, $g(x0)=g(x1)$

→ g je zvezna, zato zavzame minimum in maksimum na $[x0,x1]$

→ Če je max > min, ima g vsaj en ekstrem t $(x0,x1)$, kjer je $g'(t)$=0.

→ Če je max = min, je g konstantna, zato za vse t $(x0,x1)$ velja $g'(t)$=0 .

→ $g'(x) = f'(x) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, zato $g'(t) = 0$ pomeni, da je $f'(t) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Alternativna formulacija Lagrangevega izreka:

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(t)$ za nek t med x_0 in x

$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + t \cdot h)$ za nek $t \in (0,1)$

$f' = 0$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ f je konstantna na $[a,b]$

(za vse $x \in [a,b]$ velja $f(a) + (x-a) f'(t) = f(a)$)

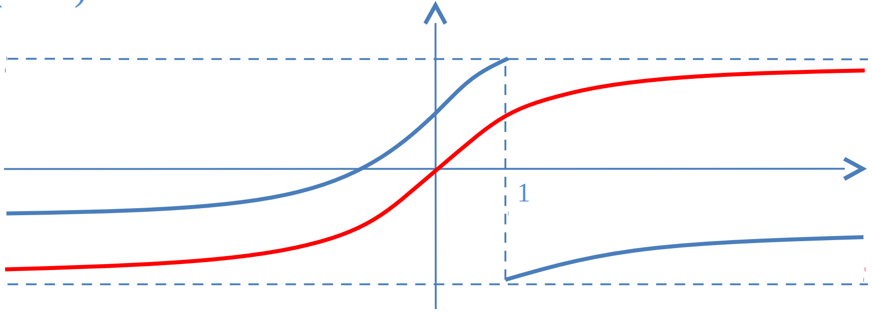
$f' = g'$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f = g + C$ za neko konstanto C

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \qquad f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \times \frac{(1-x)-(-(1+x))}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = \left(\operatorname{arctg} x\right)'$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$x = 0 \Rightarrow C = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} \qquad (\text{za } x < 1)$$

$$x \to +\infty \Rightarrow C = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x \to -\frac{3\pi}{4} \qquad (\text{za } x > 1)$$



PREDZNAK ODVODA IN NARAŠČANJE FUNKCIJE

$f' \geq 0$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ za $x_0 \leq x_1$ velja $f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \times f'(t) \geq f(x_0)$

$f' \geq 0$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ f je naraščajoča na $[a,b]$.

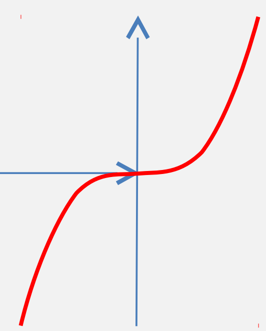
$f' \leq 0$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ f je padajoča na $[a,b]$.

$f' > 0$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ za $x_0 < x_1$ velja $f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \times f'(t) > f(x_0)$

$f' > 0$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ f je strogo naraščajoča na $[a,b]$.

$f' < 0$ na $[a,b]$ $\Rightarrow$ f je strogo padajoča na $[a,b]$.

Obratno ne velja: $f(x)=x^3$ strogo narašča okoli 0, vendar je $f'(0)=0$.



$f'(x_0) > 0$ in f' zvezna pri x_0

$\Rightarrow f' > 0$ na nekem intervalu okoli x_0

$\Rightarrow f$ strogo narašča okoli x_0

Za primerjavo: $f(x) = \dfrac{x}{2} + x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ ima $f'(0) = \dfrac{1}{2}$,
vendar f ni naraščajoča na nobeni okolici točke 0.
(f je odvedljiva, vendar odvod ni zvezen pri 0).

V nadaljevanju se bomo praviloma
omejili na zvezno odvedljive funkcije.

OSREDNO ODVAJANJE FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

$f=f(u,v)$ + $u=u(x)$, $v=v(x)$

Kako odvajamo $f(u(x),v(x))$ kot funkcijo x?

$$
\begin{aligned}
f(u(x+h),v(x+h)) &= f\left(u(x)+u'(x)\times h+o(h),\, v(x)+v'(x)\times h+o(h)\right)\\
&= f(u(x),v(x)) + f'_u(u(x),v(x))\times\left(u'(x)\times h+o(h)\right)\\
&\qquad + f'_v(u(x),v(x))\times\left(v'(x)\times h+o(h)\right)+o(h)\\
&= f(u(x),v(x))+\left(f'_u(u(x),v(x))\times u'(x)+f'_v(u(x),v(x))\times v'(x)\right)\times h+o(h)
\end{aligned}
$$

$$f'_x = f'_u \times u'_x + f'_v \times v'_x$$

Podobno dobimo za posredni odvod funkcije n spremenljivk:

Če je $f = f(u_1,\dots,u_n) = f(u)$ zvezno odvedljiva in če so vsi $u_i(x)$ odvedljivi, potem je

$$f'_x = f'_{u_1}\times(u_1)'_x + \dots + f'_{u_n}\times(u_n)'_x = \operatorname{grad} f(\vec{u})\times\vec{u}'_x$$

$$f(x) = (1-x)^{x^2}, \quad f'(x) = ?$$

$$\left.\begin{array}{r} u(x) = 1-x \\ v(x) = x^2 \\ g(u,v) = u^v \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = g(u(x), v(x))$$

$$g'_u = v u^{v-1} \qquad u'_x = -1$$

$$g'_v = u^v \ln u \qquad v'_x = 2x$$

$$f'_x = g'_u \times u'_x + g'_v \times v'_x = -x^2 (1-x)^{x^2-1} + 2x(1-x)^{x^2} \ln(1-x)$$

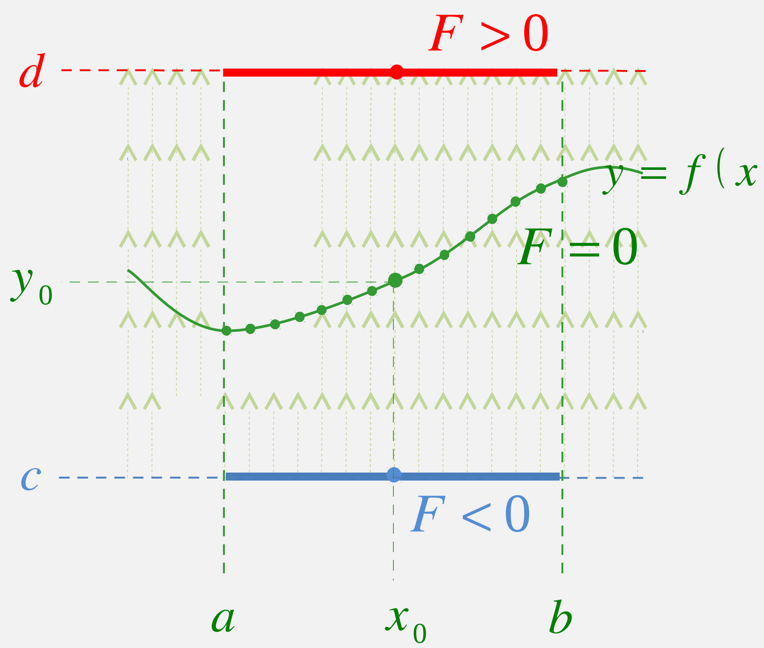
IMPLICITNE FUNKCIJE

Kdaj lahko iz enačbe $F(x,y)=0$ izrazimo y kot funkcijo x?

Privzemimo: F je zvezno odvedljiva

$$F(x_0,y_0)=0$$

$$F_y'(x_0,y_0)>0$$



$F_y'(x,y)>0$ na nekem pravokotniku okoli (x_0,y_0)

$\Rightarrow$ vrednosti F naraščajo v smeri osi y

$\Rightarrow$ $F(x_0,c)<0,\ \ F(x_0,d)>0$

$\Rightarrow$ $F(x,c)<0,\ \ F(x,d)>0$ za $x\in[a,b]$

$\Rightarrow$ na navpični daljici nad x je natanko ena točka $y=f(x)$, za katero je $F(x,y)=0$.

f je zvezna: Naj bo $\bar{y}=\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x)$:

$$F(\bar{x},\bar{y})=F\left(\lim_{x\to\bar{x}}x,\lim_{x\to\bar{x}}f(x)\right)=\lim_{x\to\bar{x}}F(x,f(x))=0 \ \Rightarrow\ f(\bar{x})=\bar{y}=\lim_{x\to\bar{x}}f(x)$$

Podobno preverimo, da je f tudi odvedljiva.

REŠEVANJE FUNKCIJSKE ENAČBE $F(x,y)=0$.

Če so v neki točki $(x0,y0)$ izpolnjeni pogoji:

(1) $F(x0,y0)=0$

(2) F je zvezno odvedljiva okoli $(x0,y0)$ in $F_{y}(x0,y0) \neq 0$

Potem je na nekem intervalu okoli $x0$ natanko določena odvedljiva funkcija f, za katero je $f(x0)=y0$ in $F(x, f(x))=0$.

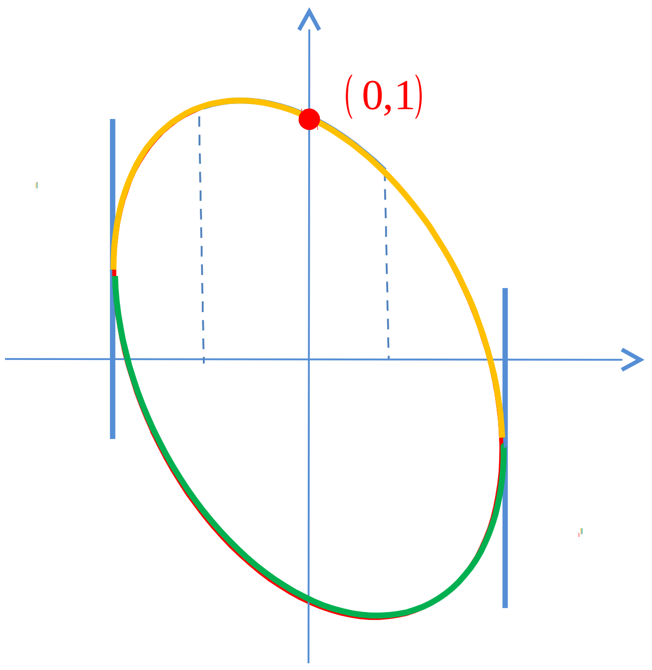
$$2x^2+xy+y^2=1$$

$$F(x,y)=2x^2+xy+y^2-1$$

(1) $F(0,1)=0$

(2) $F'_x=4x+y,\quad F'_y=x+2y$

$$F'_y(0,1)=2\neq 0$$



Rešitev okoli $T(0,1)$ lahko podaljšamo do točk v kateri je tangenta navpična. Dobimo jih iz pogoja $F_{y}=0$.

$$\left.\begin{aligned}2x^2+xy+y^2&=1\\ x+2y&=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow x_{1,2}=\pm\frac{2}{\sqrt{7}}$$

POVZETEK

Odvod je limita diferenčnega količnika.
Odvod meri spreminjanje funkcije, hitrost, smerni koeficient, je najboljši linearni približek funkcije.
Funkcijo odvod računamo z uporabo računskih pravil
Odvedljivost ima za posledico zveznost.
Lokalni ekstremi so v stacionarnih točkah.
Lagrangev izrek.
Če je odvod funkcije na intervalu negativen/nič/pozitiven, potem je funkcija padajoča/konstantna/naraščajoča.
Posredno odvajanje funkcij več spremenljivk.
Implicitno podane funkcije.

UPORABA ODVODA

Računanje limit
Natančno risanje grafov
Ekstremi funkcij ene in več spremenljivk
Vezani ekstremi
Izravnananje numeričnih podatkov
Newtonova metoda za reševanje enačb
Taylorjeva formula
Numerično odvajanje

RAČUNANJE LIMIT

Računamo $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ pri pogoju $u(a)=v(a)=0$ (nedoločena oblika $\frac{0}{0}$).

Iz $\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u(x)-u(a)}{v(x)-v(a)}=\dfrac{\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}}{\dfrac{v(x)-v(a)}{x-a}}$ sledi $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u'(a)}{v'(a)}$.

Če pa kvocient odvodov ni definiran, potem velja:

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$$

L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}=\frac{\cos\pi}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

L'Hospitalovo pravilo lahko uporabimo tudi za računanje $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{u(x)}{v(x)}$

ter za računanje $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}$, ko je $\lim\limits_{x\to a}u(x)=\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

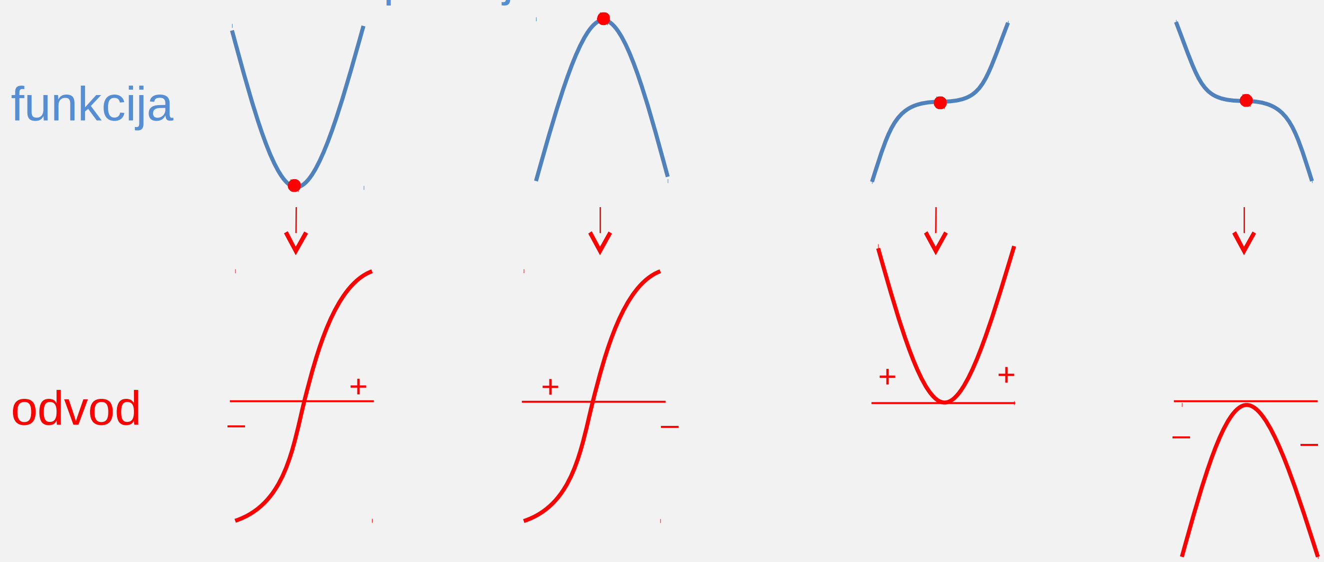
RISANJE GRAFOV

1. **Definicijsko območje**: določimo na podlagi lastnosti osnovnih funkcij.

2. **Obnašanje na robu**: trend (pole, asimptote) izrazimo s pomočjo limit; pri računanju si pomagamo z L'Hospitalovim pravilom.

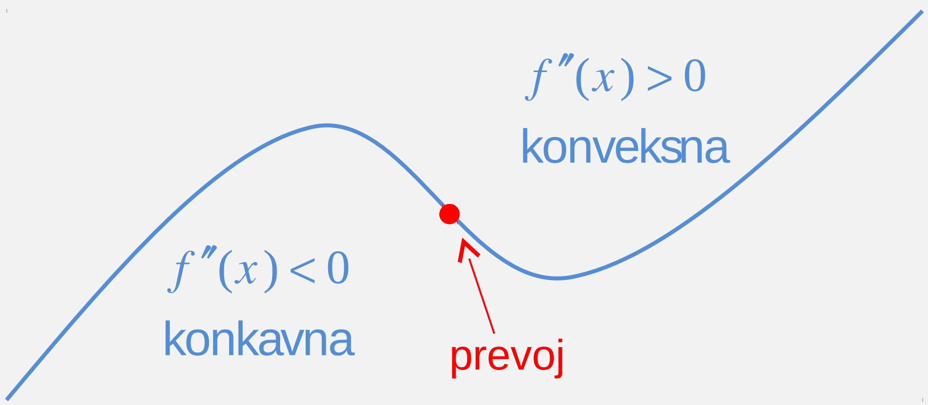
3. **Ničle**: določimo s pomočjo raznih (točnih ali približnih) metod za reševanje enačb.

4. **Naraščanje in padanje, ekstremi**: funkcijo odvajamo; kjer je odvod pozitiven, funkcijske vrednosti naraščajo, kjer je negativen padajo. V ničlah odvoda so lokalni ekstremi ali prevoji.



Če vrednosti odvoda pri prehodu čez ničlo spremenijo predznak, je v stacionarni točki lokalni ekstrem. Če se predznak ne spremeni, je v stacionarni točki prevoj.

5. **Ukrivljenost**: kjer je drugi odvod pozitiven, je graf konveksen, kjer je negativen, je graf konkaven. Prevoji so točke, kjer graf spremeni ukrivljenost, torej ničle drugega odvoda, pri katerih drugi odvod spremeni predznak.



6. **Periodičnost in simetrije**: odvod periodične funkcije je periodičen; odvod sode funkcije je lih, odvod lihe pa sod.

Nariši graf funkcije $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$

Definicijsko območje: $(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2 x}{x}=+\infty$ navpična asimptota (pol) $x=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln x\times\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\frac{1}{x}}{1}=0$ vodoravna asimptota $y=0$

Ničle funkcije, 1. in 2. odvoda:

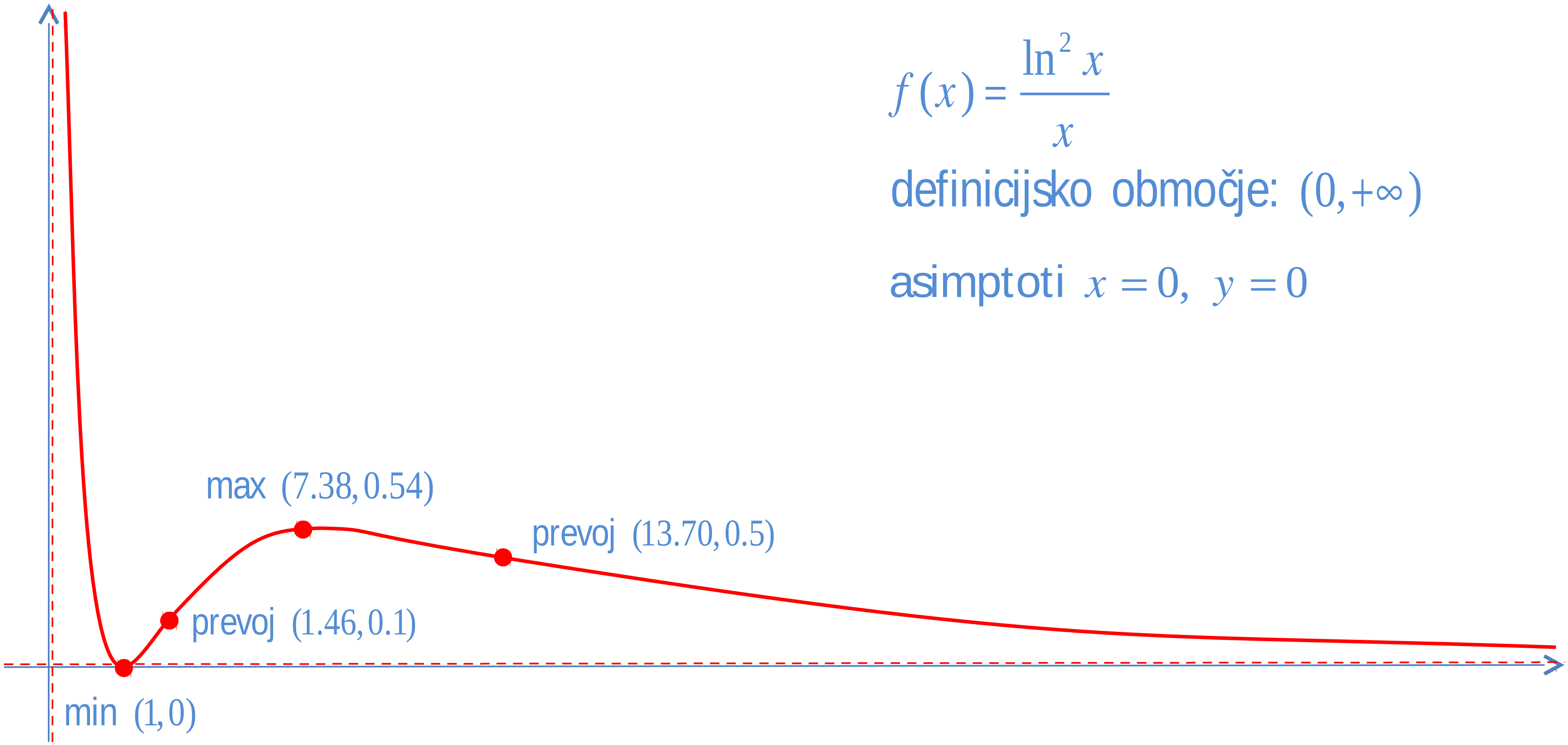
$f(x)=0\Rightarrow x=1$

$f'(x)=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=1$ ali $x=e^2\approx 7.38$

min $(1,0)$, max $(7.38,0.54)$

$f''(x)=\dfrac{2\ln^2 x-6\ln x+2}{x^3}$ $f''(x)=0\Rightarrow \ln x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x\approx 1.46$ ali $x\approx 13.70$

prevoja $(1.46,0.1)$, $(13.70,0.5)$



$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

definicijsko območje: $(0, +\infty)$

asimptoti $x = 0,\ \ y = 0$

GLOBALNI EKSTREMI

Globalni ekstrem je lahko…

- v notranjosti območja → v stacionarni točki (če je funkcija odvedljiva)
- na robu območja → funkcija odvisna od manj spremenljivk (rob tvorijo točke/krivulje/ploskve/...)

Vedno premislimo, ali funkcija sploh zavzame ekstrem!

Določi globalne ekstreme funkcije $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

Definicijsko območje je $[-1,1]$, f je zvezna $\Rightarrow$ zavzame maksimum in minimum

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kandidati za ekstreme: robne točke -1,+1; stacionarne točke $-\frac{\sqrt{2}}{2},+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(-1)=f(1)=0, \qquad f\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\tfrac{1}{2}, \qquad f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\tfrac{1}{2}$$

minimum maksimum

Poišči ekstreme funkcije $f(x,y)=2x2+xy-y2-2x+4y$ na trikotniku z oglišči $A(0,1)$, $B(3,4)$, $C(-1,4)$.

$$f_x' = 4x + y - 2 \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned}4x + y - 2 &= 0\\ x - 2y + 4 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}x &= 0\\ y &= 2\end{aligned}$$
$$f_y' = x - 2y + 4$$

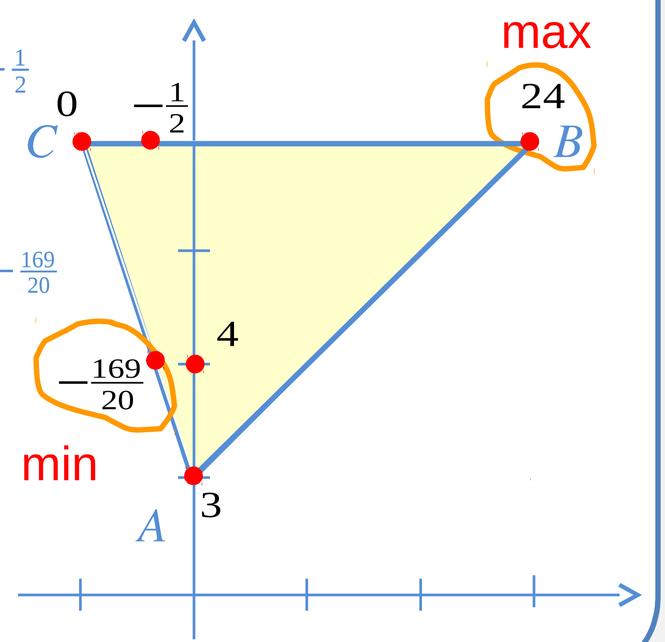
stacionarna točka $T1(0,2)$; $f(0,2)=4$.

$$\overline{AB}: \; y = x+1, \; x\in[0,3] \quad\Rightarrow\quad f = 2x^2 + x + 3, \quad f' = 4x+1 \;\Rightarrow\; f'\neq 0 \text{ za } x\in[0,3]$$

$$\overline{BC}: \; y = 4, \; x\in[-1,3] \quad\Rightarrow\quad f = 2x^2 + 2x, \quad f' = 4x+2 \;\Rightarrow\; T_2(-\tfrac{1}{2},4),\; f(-\tfrac{1}{2},4) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\overline{CA}: \; y = -3x+1, \; x\in[-1,0] \quad\Rightarrow\quad f = -10x^2 - 7x + 3, \quad f' = -20x - 7 \;\Rightarrow\; T_3(-\tfrac{7}{20},\tfrac{41}{20}),\; f(-\tfrac{7}{20},\tfrac{41}{20}) = -\tfrac{169}{20}$$

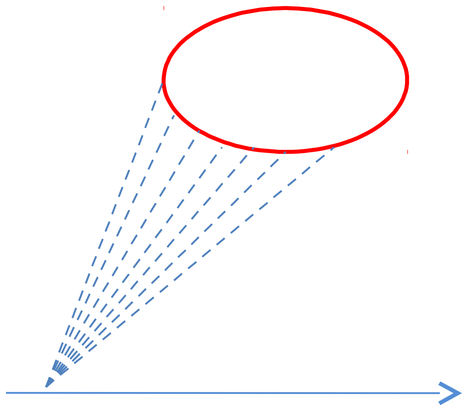
$$A: \; f(0,1) = 3 \qquad B: \; f(3,4) = 24 \qquad C: \; f(-1,4) = 0$$



VEZANI EKSTREMI

Iščemo ekstreme funkcije $f(x,y)$ med točkami (x,y), ki zadoščajo pogoju $G(x,y)=0$.

Na elipsi, določeni z enačbo $(x$-2)2+2(y-3)2=1, poišči točko, ki je najbližja izhodišču.



Drugače povedano: poišči minimum funkcije

$f(x,y)$ =x2+y2

pri pogoju

$G(x,y)$=(x-2)2+2(y-3)2-1=0

Običajni postopek: iz enačbe $G(x,y)=0$ izrazimo y, vstavimo v $f(x,y)$ in odvajamo na x.

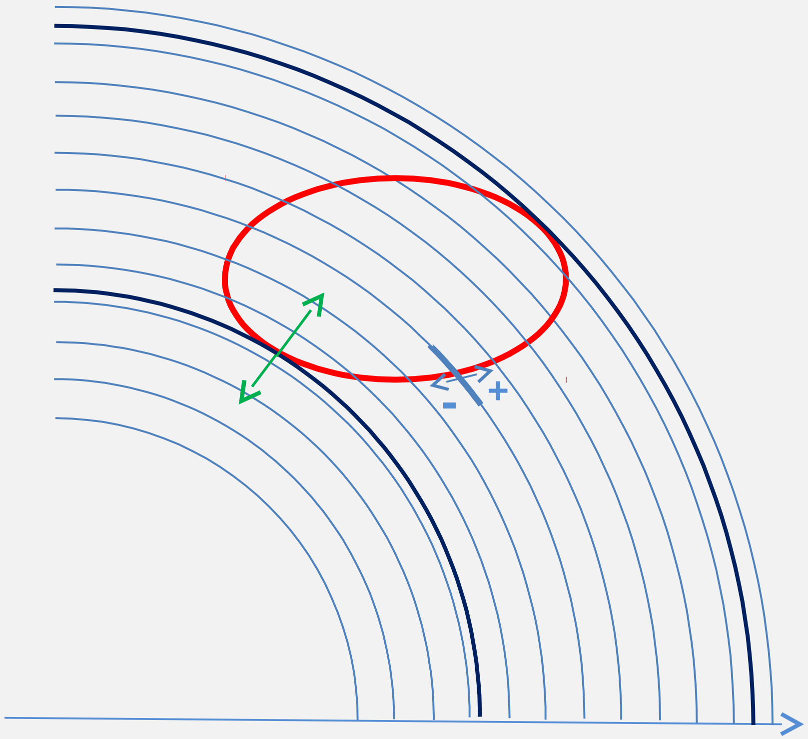
$$(x-2)^2+2(y-3)^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad y=3\pm\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad h(x)=x^2+\left(3\pm\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{2}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h'(x)=2x\pm 2\left(3\pm\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{2}}\right)\frac{2-x}{\sqrt{\frac{1-(x-2)^2}{2}}}$$

$h'(x)=0$ ..... brezupno!

Alternativni pristop: ogledamo si lego krivulje $G(x,y)=0$ glede na nivojnice funkcije $f(x,y)$.

Če v skupni točki krivulja seka nivojnico, potem so v njeni bližini točke na krivulji, kjer f zavzame večje in manjše vrednosti.



V točki na krivulji, kjer f zavzame ekstremno vrednost se morata krivulja in nivojnica dotikati.

Krivulji $G(x,y)=0$ in $f(x,y)=C$ se v skupni točki dotikata, če sta v tej točki njuna gradienta dG in df na isti premici (tj. vzporedna).

Da bo v točki (x,y) ekstrem morata biti izpolnjena pogoja $G(x,y)=0$ in $df(x,y)=k\cdot dG(x,y)$.

Pogoja lahko združimo tako, da vpeljemo pomožno funkcijo

$$F(x,y,t)=f(x,y)+t\times G(x,y)$$

Lagrangeva funkcija

in zahtevamo $dF(x,y,t)=0$

Kandidati za lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)$, vzdolž krivulje z enačbo $G(x,y)=0$ so stacionarne točke Lagrangeve funkcije $F(x,y,t)=f(x,y)+tG(x,y)$

$$F(x,y,t)=x^2+y^2+t\cdot\left((x-2)^2+2(y-3)^2-1\right)$$

$$F'_x=2x+2t(x-2)=2x(t+1)-4t$$

$$F'_y=2y+4t(y-3)=2y(2t+1)-12t$$

$$F'_t=(x-2)^2+2(y-3)^2-1$$

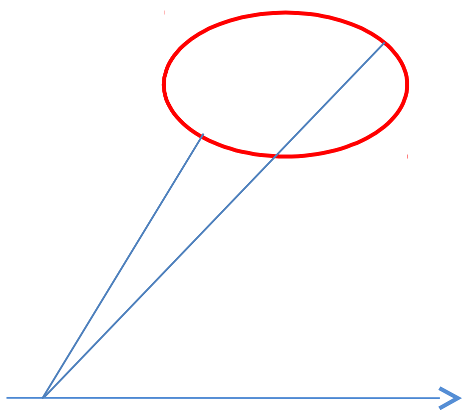
V stacionarni točki je

$$x=\frac{2t}{t+1},\qquad y=\frac{6t}{2t+1}\qquad\Rightarrow\qquad\left(\frac{2t}{t+1}-2\right)^2+2\left(\frac{6t}{2t+1}-3\right)^2=1$$

Enačba je 4. stopnje, rešujemo jo numerično:

$t_1=\ \ 1.717\quad\Rightarrow\quad f(1.377,\ 2.447)=7.87$ minimum

$t_1=-3.352\quad\Rightarrow\quad f(2.746,\ 3.471)=19.59$ maksimum



Splošno pravilo:

Če iščemo ekstreme funkcije $f(x1,\ldots,xn)$

pri pogojih $G1(x1,\ldots,xn)=0$

$G2(x1,\ldots,xn)=0$

$\ldots$

$Gm(x1,\ldots,xn)=0$,

vpeljemo Lagrangevo funkcijo

$$F(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_m)=f(x_1,\ldots,x_n)+t_1\times G_1(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+t_m\times G_m(x_1,\ldots,x_n)$$

$$(F=f+t_1\times G_1+\ldots+t_m\times G_m)$$

Vezani ekstremi f so v stacionarnih točkah Lagrangeve funkcije F.

IZRAVNAVANJE NUMERIČNIH PODATKOV

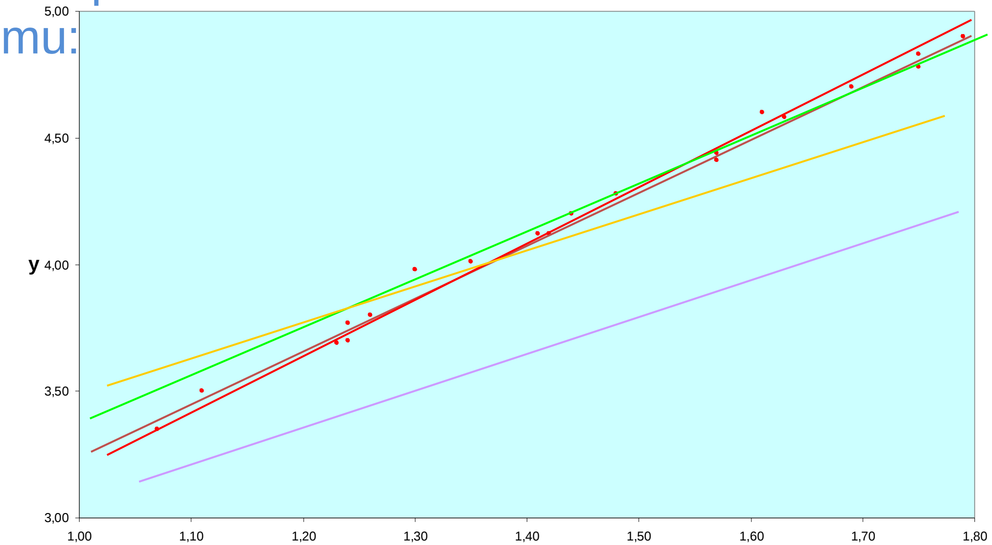
Naloga: iz tabele numeričnih podatkov (xi,yi) določi funkcijsko zvezo $y=f(x)$, ki se s temi podatki najbolje ujema.

x	y
1,07	3,35
1,11	3,50
1,23	3,69
1,24	3,70
1,24	3,77
1,26	3,80
1,30	3,98
1,35	4,01
1,41	4,12
1,42	4,12
1,44	4,20
1,48	4,28
1,57	4,41
1,57	4,44
1,61	4,60
1,63	4,58
1,69	4,70
1,75	4,78
1,75	4,83
1,79	4,90

V tabeli so podane vrednosti količine y v odvisnosti od x.

a. Določi ustrezno funkcijsko zvezo $y=f(x)$.
b. Oceni vrednost y pri $x=1.5$ (interpolacija).
c. Oceni vrednost y pri $x=2$ (ekstrapolacija).

Podatke predstavimo v koordinatnem sistemu:



Zveza med x in y je približno linearna. Kako bi dobili enačbo premice, ki se tem podatkom najbolje prilega?

Enačba premice $y=A+Bx$ je odvisna od parametrov A in B. Ustreznost parametrov preskusimo na množici podatkov (xi,yi), $i=1,2,\ldots,n$, s pomočjo testne funkcije

$$F(A,B)=\big((A+Bx_1)-y_1\big)^2+\big((A+Bx_2)-y_2\big)^2+\ldots+\big((A+Bx_n)-y_n\big)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\big((A+Bx_i)-y_i\big)^2$$

Če so vsi podatki na premici $y=A+Bx$, potem je $F(A,B)=0$. V splošnem primeru iščemo vrednosti A in B, pri katerih testna funkcija zavzame minimum.

Lastnosti funkcije F:

F je zvezna in odvedljiva za vse (A,B) IR2

Ko gre $A,B \to \infty$ narašča F čez vsako mejo, zato F zavzame minimum na IR2

Ker IR2 nima robnih točk, je minimum F v stacionarni točki.

$$F(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\big((A+Bx_i)-y_i\big)^2$$

Testna funkcija po kriteriju najmanjših kvadratov

$$F'_A(A,B)=\sum_{i=1}^{n}2\cdot\big((A+Bx_i)-y_i\big)$$

$$F'_B(A,B)=\sum_{i=1}^{n}2\cdot\big((A+Bx_i)-y_i\big)\cdot x_i$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}2\cdot\big((A+Bx_i)-y_i\big)&=0\\ \sum_{i=1}^{n}2\cdot\big((A+Bx_i)-y_i\big)\cdot x_i&=0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\boxed{\left.\begin{aligned}n\cdot A+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot B&=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot A+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot B&=\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\end{aligned}\right\}}$$

Dobljeni sistem dveh linearnih enačb in dveh neznank ima natanko eno rešitev, ki ustreza globalnemu minimumu testne funkcije.

x	y
1,07	3,35
1,11	3,50
1,23	3,69
1,24	3,70
1,24	3,77
1,26	3,80
1,30	3,98
1,35	4,01
1,41	4,12
1,42	4,12
1,44	4,20
1,48	4,28
1,57	4,41
1,57	4,44
1,61	4,60
1,63	4,58
1,69	4,70
1,75	4,78
1,75	4,83
1,79	4,90

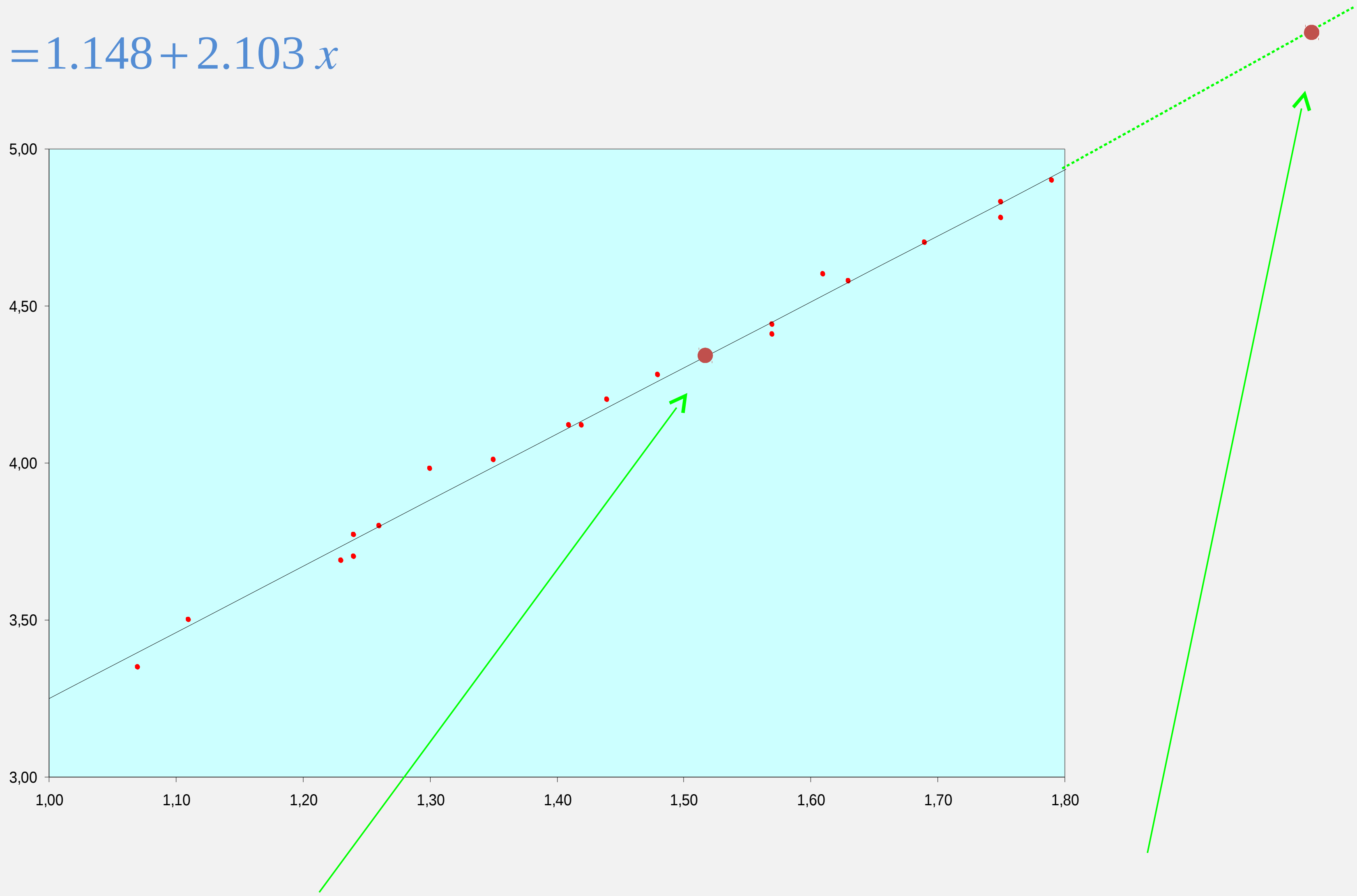
i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,07	3,35	1,1890	3,5845
2	1,11	3,50	1,2321	3,8850
3	1,23	3,69	1,5129	4,5387
4	1,24	3,70	1,5376	4,5880
5	1,24	3,77	1,5376	4,6748
6	1,26	3,80	1,5876	4,7880
7	1,30	3,98	1,6900	5,1740
8	1,35	4,01	1,8225	5,4135
9	1,41	4,12	1,9881	5,8092
10	1,42	4,12	2,0164	5,8504
11	1,44	4,20	2,0736	6,0480
12	1,48	4,28	2,1904	6,3344
13	1,57	4,41	2,4649	6,9237
14	1,57	4,44	2,4649	6,9708
15	1,61	4,60	2,5921	7,4060
16	1,63	4,58	2,6569	7,4654
17	1,69	4,70	2,8561	7,9430
18	1,75	4,78	3,0625	8,3650
19	1,75	4,83	3,0625	8,4525
20	1,79	4,90	3,2041	8,7710
	28,91	83,76	42,6977	122,9859

$$
\begin{cases} 20A + 28.91B = 83.76 \\ 28.91A + 42.70B = 122.99 \end{cases}
$$

$$
A = 1.148
$$

$$
B = 2.103
$$

$$y = 1.148 + 2.103\,x$$



interpolirana vrednost: $f(1.5)=4.303$

ekstrapolirana vrednost: $f(2)=5.354$

V praksi sistem
$$\left.\begin{aligned} n\cdot A+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot B&=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot A+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cdot B&=\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\end{aligned}\right\}$$
rešujemo takole:

Obe enačbi delimo z n in vpeljemo oznake:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$ povprečje argumentov

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$ povprečje funkcijskih vrednosti

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$ povprečje kvadratov argumentov

$$\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$ povprečje produktov

$$\left.\begin{aligned} A+\bar{x}\cdot B&=\bar{y}\\ \bar{x}\cdot A+\overline{x^2}\cdot B&=\overline{xy}\end{aligned}\right\}$$

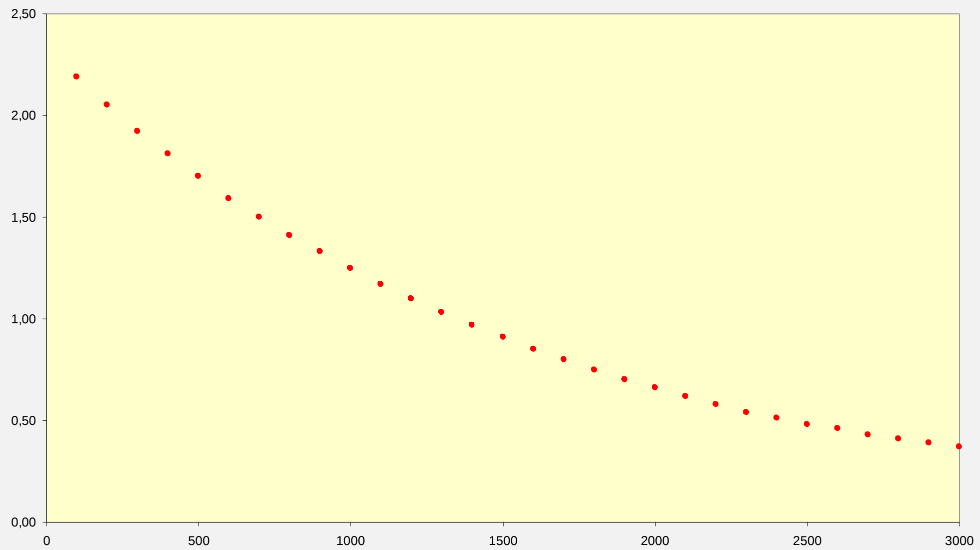
$$B=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}\cdot\bar{x}}$$

$$A=\bar{y}-B\cdot\bar{x}$$

NELINEARNE ZVEZE

V tabeli je predstavljena kinetika razpada N2O5 v raztopini CCl4. c je koncentracija N2O5 po preteku t sekund.

t(s)	c (mol/ l)	t(s)	c (mol/ l)
100	2,19	1600	0,85
200	2,05	1700	0,80
300	1,92	1800	0,75
400	1,81	1900	0,70
500	1,70	2000	0,66
600	1,59	2100	0,62
700	1,50	2200	0,58
800	1,41	2300	0,54
900	1,33	2400	0,51
1000	1,25	2500	0,48
1100	1,17	2600	0,46
1200	1,10	2700	0,43
1300	1,03	2800	0,41
1400	0,97	2900	0,39
1500	0,91	3000	0,37



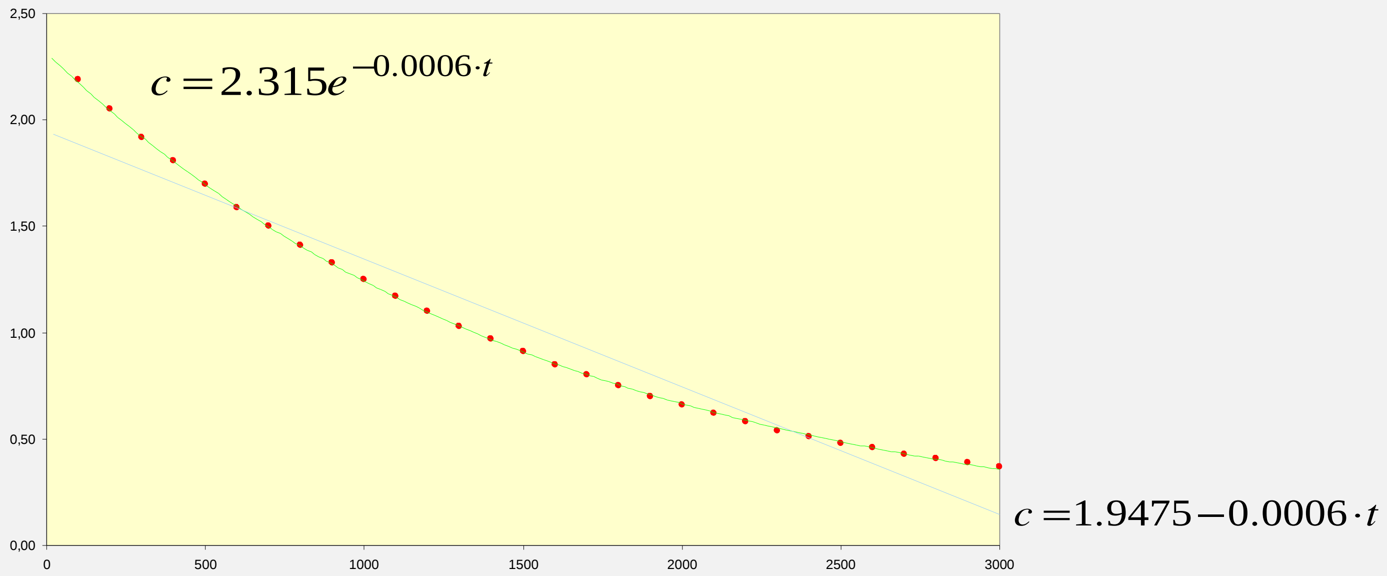
Funkcijska zveza ni linearna, temveč eksponentna: $c = Ae^{Bt}$

Računanje s testno funkcijo $F(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\left(Ae^{Bt_i}-y_i\right)^2$
bi bilo zamudno, zato raje lineariziramo.

$\ln c = \ln A + Bt$ (zveza med logaritmom koncentracije in časom je linearna)

Vpeljemo novo količino $c' = \ln c$ in uporabimo prejšnje formule.

Dobimo:



NUMERIČNO REŠEVANJE ENAČB

x je *negibna* točka funkcije f, če velja $f(x)=x$.

Če je f zvezno odvedljiva in če za negibno točko velja $|f'(x)|<1$, potem je x *privlačna* negibna točka.

Če začetni člen izberemo blizu privlačne negibne točke x, potem rekurzivno zaporedje $x_n=f(x_{n-1})$ konvergira proti x. Hitrost konvergence je večja, če je $f'(x)\approx 0$.

Newtonova iteracijska metoda: enačbo $g(x)=0$ preoblikujemo v ekvivalentno enačbo oblike $f(x)=x$, kjer ima f čim bolj privlačne negibne točke.

$$g(x) \longrightarrow f(x)=x-\frac{g(x)}{g'(x)}$$

Enačbi imata iste rešitve, saj je $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x$

Negibne točke f so privlačne: $f'(x)=1-\frac{g'(x)\times g'(x)-g(x)\times g''(x)}{(g'(x))^2}=g(x)\times\frac{g''(x)}{(g'(x))^2}$,

zato $g(x)=0 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0.$

RAČUNANJE KORENOV

$\sqrt{a}$ je rešitev enačbe $x^2 - a = 0$

$$g(x) = x^2 - a \longrightarrow f(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x}$$

Npr., za $a = 10$ dobimo x a $\dfrac{x^2 + 10}{2x}$. Iteracijo lahko začnemo z $x = 1$.

1, 5.5, 3.659090, 3.196005, 3.162455,
3.162277

(3.162277 2=9.99999582)

$\sqrt[n]{a}$ je rešitev enačbe $x^n - a = 0$

$$g(x) = x^n - a \longrightarrow f(x) = \frac{(n-1)x^n + a}{nx^{n-1}}$$

Npr., za $\sqrt[4]{17}$ dobimo x a $\dfrac{3x^4 + 17}{4x^3}$.

1, 5, 3.784, 2.916439, 2.358658, 2.092880, 2.033273, 2.030548, 2.030543

(2.030543 4=16.99999380)

2, 2.03125, 2.030543 Dober začetek je zlata vreden!

Določi prostornino enega mola CO_2 pri temperaturi 50oC in pritisku 20 atmosfer.

Pri teh pogojih se CO_2 ne obnaša kot idealni plin, zato uporabimo Van der Waalsovo enačbo:

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

a ~ interakcija med molekulami, *b* ~ velikost molekule

Nova spremenljivka: $x = \frac{V}{n} \quad \Rightarrow \quad \left(p + \frac{a}{x^2}\right)(x - b) = RT$ (Enačba 3. stopnje za x.)

p=20 · 1.013 · 105 Pa = 2 026 000 Pa

T=323 K

aCO2=0.3643 Jm3/mol2

bCO2=4.269 · 10 -5 m3/mol

R=8.314 J/mol K

$$\Longrightarrow \quad g(x) = \left(2026000 + \frac{0.3643}{x^2}\right)(x - 0.00004269) - 8.314 \times 323$$

$$f(x) = \frac{x \times (277191194x^2 - 72860x + 4.665)}{202600000000x^3 - 36430x + 3.11}$$

Kot začetni približek vzamemo prostornino po enačbi idealnega plina: $\left(\frac{V}{n} = \frac{RT}{p}\right)$

$$x_0 = \frac{8.314 \times 323}{2026000} = 0.0013254$$

0.0013254, 0.0012274, <u>0.0012266</u>

Prostornina je 1.23 litra.

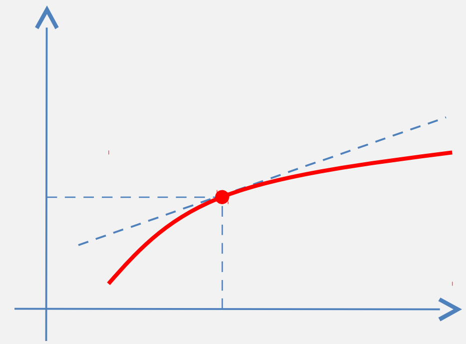
TAYLORJEVA FORMULA

Pomen vrednosti funkcije in odvodov:

$f(x_0)$ pove skozi katero točko poteka graf

$f'(x_0)$ podaja naklon grafa pri točki $(x_0, f(x_0))$

$f''(x_0)$ podaja odklon grafa od tangente pri točki $(x_0, f(x_0))$



Kaj pomenijo višji odvodi?

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

$$p'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1}$$

$$p''(x) = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \ldots + (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-1}$$

$$p'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \ldots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-1}$$

$$\ldots\ldots$$

$$p^{(n)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n x^{n-1}$$

$$\Longrightarrow$$

$$a_0 = p(0)$$

$$a_1 = p'(0)$$

$$a_2 = \tfrac{1}{2} p''(0)$$

$$a_3 = \tfrac{1}{2 \cdot 3} p'''(0)$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_n = \tfrac{1}{n!} p^{(n)}(0)$$

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1} x + \frac{p''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Funkciji $f(x)$, ki je vsaj n-krat odvedljiva pri 0 lahko priredimo Taylorjev polinom

$$f(x) \quad \to \quad T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Pričakujemo, da bo ostanek $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ velikostnega reda x^{n+1}.

Če je $g(x)=0$, je

$$\frac{g(x)}{x^{n+1}} = \ldots \text{ vstavimo } u = x^{n+1} \ldots = \frac{g\left(\sqrt[n+1]{u}\right) - g\left(\sqrt[n+1]{0}\right)}{u-0} = g'\left(\sqrt[n+1]{t}\right) \times \frac{1}{(n+1)\times\left(\sqrt[n+1]{t}\right)^n} = \frac{g'(t_1)}{(n+1)\times t_1^n}$$

za nek t_1 med 0 in x.

Ker je $R_n(0) = R_n''(0) = R_n'''(0) = \ldots = R_n^{(n)}(0) = 0$, dobimo

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{R_n'(t_1)}{(n+1)\times t_1^n} = \frac{R_n''(t_2)}{n\times(n+1)\times t_2^{n-1}} = \ldots = \frac{R_n^{(n+1)}(t_{n+1})}{1\times\ldots\times n\times(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

za nek t med 0 in x.

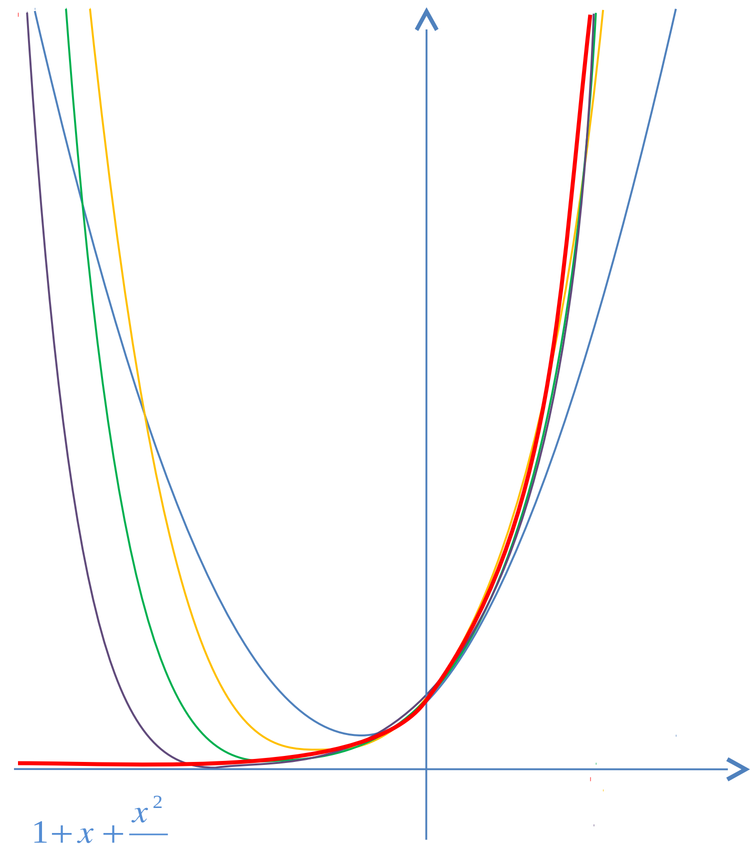
$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{T_n(x)\ n-\text{ti približek}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x)\ n-\text{ti ostanek}}$$

Taylorjeva formula

Eksponentna funkcija

i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(0)$	$\frac{f^{(i)}(0)}{i!}$
0	e^x	1	1
1	e^x	1	1
2	e^x	1	$\frac{1}{2}$
3	e^x	1	$\frac{1}{6}$
4	e^x	1	$\frac{1}{24}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}} + \underbrace{\frac{e^t \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}}$$



$1 + x + \frac{x^2}{2}$

$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

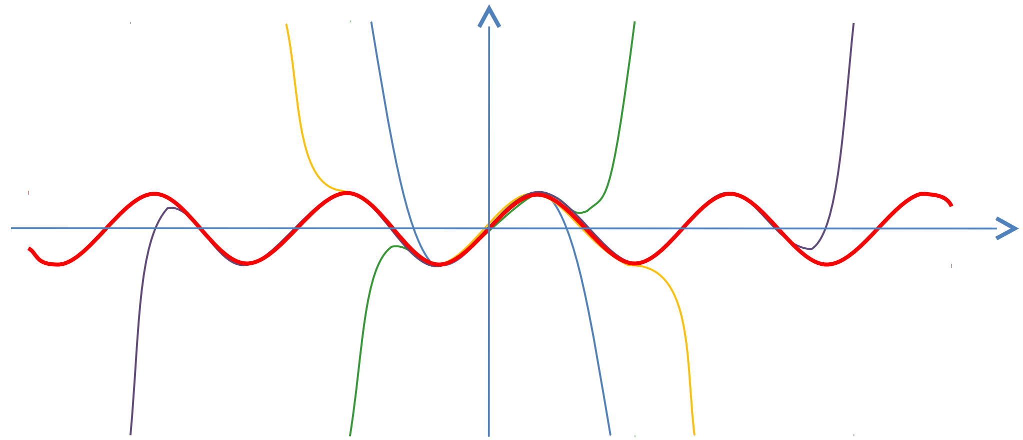
$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$

......

Sinus

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \pm \underbrace{\frac{\sin t \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!}}$$

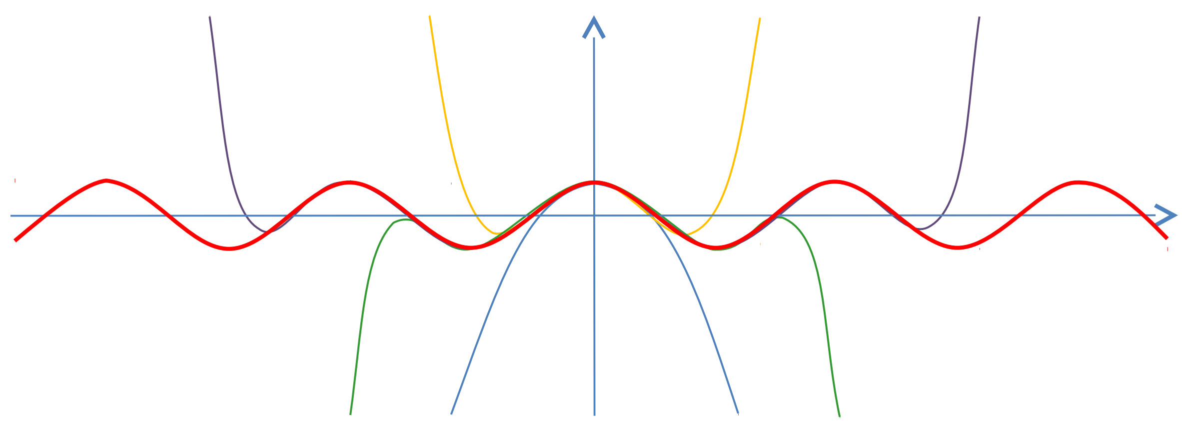
i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(0)$	$\frac{f^{(i)}(0)}{i!}$
0	$\sin x$	0	0
1	$\cos x$	1	1
2	$-\sin x$	0	0
3	$-\cos x$	–1	$-\frac{1}{6}$
4	$\sin x$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Kosinus

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}} \pm \underbrace{\frac{\sin t \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(0)$	$\frac{f^{(i)}(0)}{i!}$
0	$\cos x$	1	1
1	$-\sin x$	0	0
2	$-\cos x$	–1	$-\frac{1}{2}$
3	$\sin x$	0	0
4	$\cos x$	1	$\frac{1}{24}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Pogosto lahko 'uganemo' Taylorjevo formulo dane funkcije:

če lahko zapišemo $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+o(x^n)$,

potem so $a_i=\dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$ za $i=0,1,2,\ldots,n$ in $T_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\ \Rightarrow\ \frac{1}{1-x}=\underbrace{1+x+x^2+\ldots+x^n}_{T_n(x)}+\underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{o(x^n)}$$

$$\frac{x}{2+3x}=\frac{x}{2}\times\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}=\frac{x}{2}\left(1-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}x^2-\frac{27}{8}x^3+o(x^4)\right)=\underbrace{\frac{x}{2}-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{8}x^3-\frac{27}{16}x^4}_{T_4(x)}+o(x^5)$$

$$e^{-x^2}=\underbrace{1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{10}}{120}}_{T_{11}(x)}+o(x^{12})$$

Če v Taylorjevi formuli

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),\quad \text{kjer je}\quad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

za nek x velja $\lim\limits_{n} R_n(x)=0$, potem za ta x lahko pišemo

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots}$$ Taylorjeva vrsta

Denimo, da konvergira vrsta $a_0+a_1r+a_2r^2+a_3r^3+\ldots$

Potem za $x\in(-r,r)$ dobimo

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\ldots=|a_0|+|a_1r|\times\left|\frac{x}{r}\right|+|a_2r^2|\times\left|\frac{x}{r}\right|^2+\ldots< M\left(1+\left|\frac{x}{r}\right|+\left|\frac{x}{r}\right|^2+\ldots\right)=\frac{M}{1-\left|\frac{x}{r}\right|}$$

Vrsta iz absolutnih vrednosti je omejena, torej konvergira, zato pa konvergira tudi vrsta $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$

Območje veljavnosti Taylorjeve vrste neke funkcije $f(x)$ je vedno simetričen interval oblike $(-R,R)$. Število R imenujemo konvergenčni polmer vrste za $f(x)$.

Pri eksponentni funkciji za vse x velja $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^t \times x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, zato je

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad R = \infty$$

Podobno pri funkcijah sinus in kosinus za vse x velja

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad \text{in} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad R = \infty$$

Geometrijska vrsta konvergira le za $x \in (-1,1)$, zato je

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \quad R = 1$$

Taylorjevo vrsto določamo:

- po definiciji (za osnovne funkcije);
- z uporabo računskih pravil (za sestavljene funkcije).

Konvergenčni polmer konvergence vsote dveh vrst je enak manjšemu izmed polmerov konvergence sumandov. Podobno velja za razlike in produkte vrst.

$$\frac{x}{2+3x} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} = \underbrace{\frac{x}{2}}_{R=\infty} \times \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{8}x^3 + \ldots\right)}_{R=\frac{2}{3}} = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{8}x^3 - \frac{27}{16}x^4 + \ldots, \quad R = \frac{2}{3}$$

Algebrajske funkcije

$$f(x)=(1+x)^r,\ r\in$$

i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(0)$	$\frac{f^{(i)}(0)}{i!}$
0	$(1+x)^r$	1	1
1	$r(1+x)^{r-1}$	r	$\frac{r}{1}$
2	$r(r-1)(1+x)^{r-1}$	$r(r-1)$	$\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}$
3	$r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-1}$	$r(r-1)(r-2)$	$\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

oznaka: $\binom{r}{i}=\dfrac{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}$

$$(1+x)^r=1+\binom{r}{1}x+\binom{r}{2}x^2+\binom{r}{3}x^3+\ldots,\quad R=1$$

binomska vrsta

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{\frac{1}{2}}{3}x^3+\binom{\frac{1}{2}}{4}x^4+\ldots=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\ldots$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\qquad \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}=-\frac{1}{8}\qquad \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{16}\qquad \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=-\frac{5}{128}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x)^2+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^4+\binom{-\frac{1}{2}}{3}(-x^6)+\ldots=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\frac{5x^6}{16}+\ldots$$

PRIBLIŽNE FORMULE

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2n^2}x^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3}x^3 - \ldots$$

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}$$ napaka $< \frac{n-1}{2} \times \left(\frac{x}{n}\right)^2$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{27+5} = 3\sqrt[3]{1+\tfrac{5}{27}} \approx 3\left(1+\tfrac{5}{81}\right) = 3.185\ldots$$ (dejansko $\sqrt[3]{32} = 3.1748\ldots$)

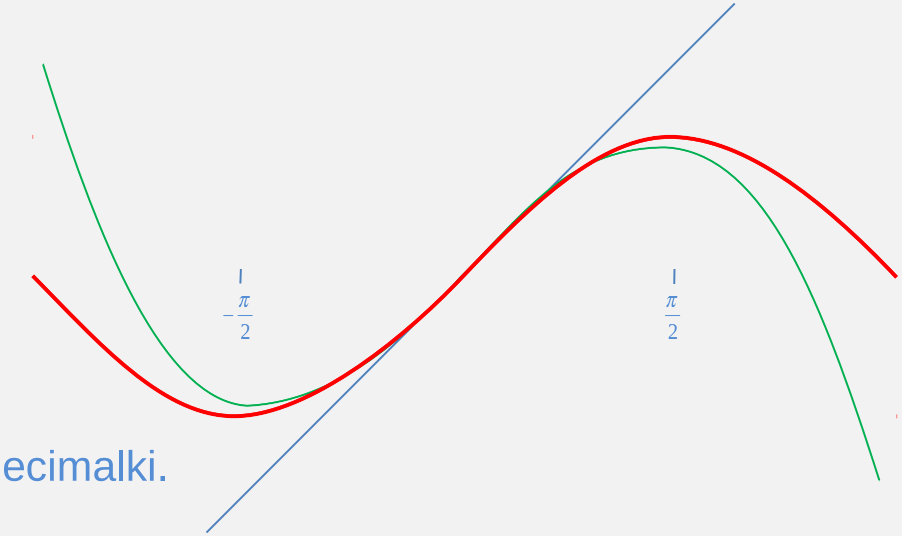
boljši približek:

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2$$ napaka $< \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \times \left(\frac{x}{n}\right)^3$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{27+5} = 3\sqrt[3]{1+\tfrac{5}{27}} \approx 3\left(1+\tfrac{5}{81} - \left(\tfrac{5}{81}\right)^2\right) = 3.1737\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$$

$$\sin x \approx x \qquad \text{napaka} < \frac{x^3}{6}$$



Za katere x sta pravilni dve decimalki približka?

$$\frac{x^3}{6} < 0.005 \quad \Rightarrow \quad x < 0.31 \approx 18^\circ$$

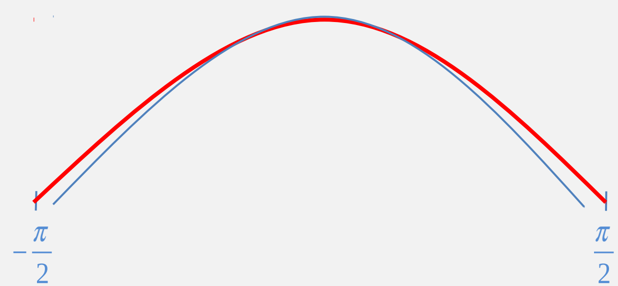
Za $|x| \le 18^\circ$ je približek $\sin x = x$ pravilen na dve decimalki.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \text{napaka} < \frac{x^5}{120}$$

Za $|x| \le 50^\circ$ je približek pravilen na dve decimalki.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{napaka} < \frac{x^4}{24}$$



Za $|x| \le 34^\circ$ je približek pravilen na dve decimalki.

Taylorjeva formula je najboljši polinomski približek za $f(x)$ blizu $x=0$. Podoben približek blizu kakšne druge točke a dobimo takole: vpeljemo novo spremenljivko $t=x-a$ in novo funkcijo $g(t)=f(a+t)=f(x)$.

$$g(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{g^{(i)}(0)}{i!}t^i \qquad g^{(i)}(t)=f^{(i)}(a+t) \;\Rightarrow\; g^{(i)}(0)=f^{(i)}(a)$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Taylorjeva vrsta za $f(x)$ okoli točke a.

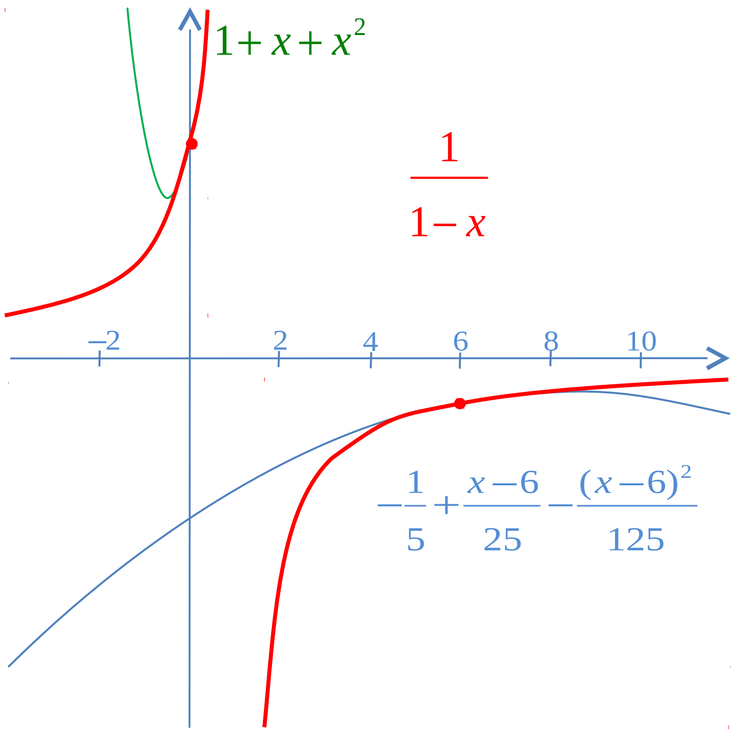
Vrsta za $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ okoli točke $a=6$.

$$\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{5+(x-6)}=-\frac{1}{5}\times\frac{1}{1+\frac{x-6}{5}}=$$

$$=-\frac{1}{5}\left(1-\frac{x-6}{5}+\left(\frac{x-6}{5}\right)^2-\left(\frac{x-6}{5}\right)^3+\dots\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{x-6}{25}-\frac{(x-6)^2}{125}+\frac{(x-6)^3}{625}-\dots$$

$$\left|\frac{x-6}{5}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad \text{konvergira za } x\in(1,11) \qquad (R=5)$$



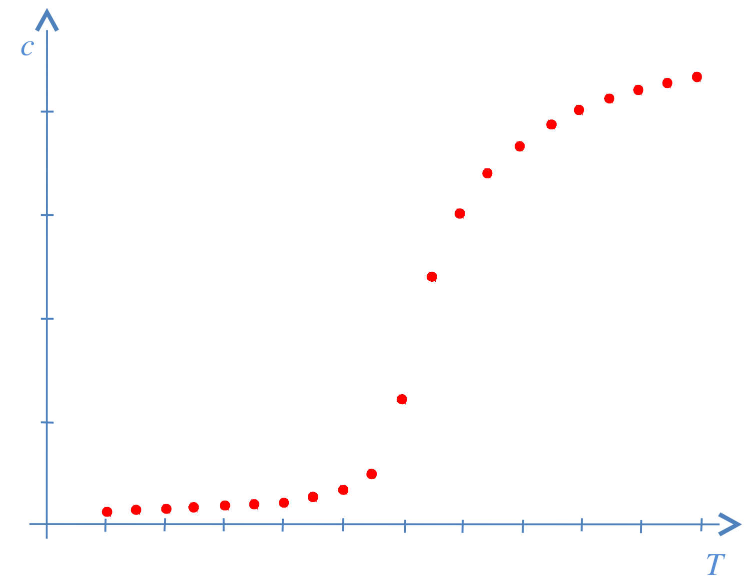
NUMERIČNO ODVAJANJE

Koncentracijo c merimo v odvisnosti od temperature T. Prevojna točka ustreza temperaturi, pri kateri pride do reakcije.

Kako bi iz izmerjenih vrednosti funkcije (x_i, y_i) določili točke prevoja?

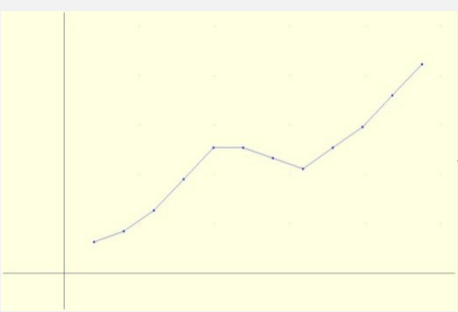
Prevoji so točke, v katerih drugi odvod spremeni predznak, zato potrebujemo neko oceno za odvod.

T	c
1	0.145
1.5	0.150
2	0.160
2.5	0.175
3	0.190
3.5	0.210
4	0.232
4.5	0.276
5	0.342
5.5	0.502
6	1.217
6.5	2.405
7	2.990
7.5	3.400
8	3.664
8.5	3.856
9	3.990
9.5	4.110
10	4.200
10.5	4.270
11	4.330

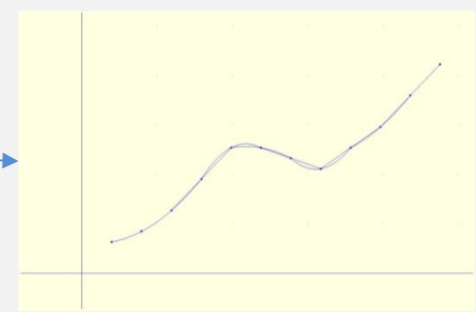


Če poznamo obliko funkcije, jo določimo s pomočjo metode najmanjših kvadratov in dobljeno funkcijo odvajamo analitično.

V splošnem poiščemo polinom, ki gre skozi nekaj zaporednih točk in ga potem odvajamo. Vrednosti odvoda lahko izračunamo podatkov.



odsekoma linearna



odsekoma kvadratična

Formule se poenostavijo, če so točke na enakomernih razdaljah (npr. h).

za dve zaporedni točki

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$$

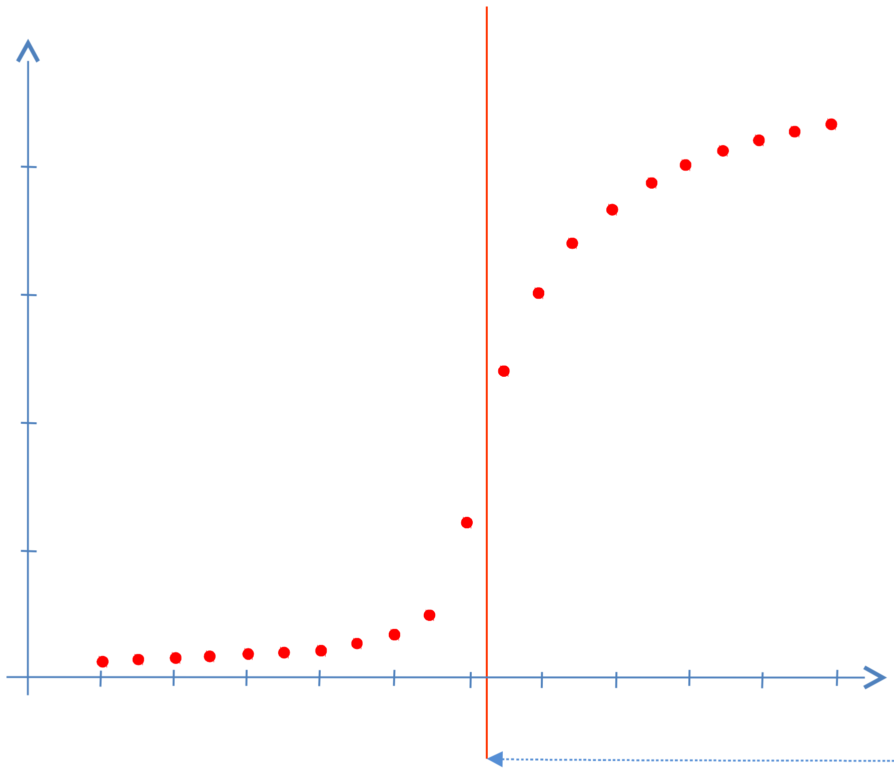
za tri zaporedne točke

$$\boxed{y_1' \approx \frac{y_2 - y_0}{2h}}$$

za pet zaporednih točk

$$y_2' \approx \frac{y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4}{12h}$$

Numerično odvajanje je zelo občutljivo na napake v podatkih.



T	y	$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$	$y_i'' \approx \frac{y_{i+1}' - y_{i-1}'}{2h}$
1	0.145		
		0.015	
	1.5		0.015
0.150			
		0.015	
2			0.020
		0.030	
0.160	2.5		
		0.035	
0.175	3		0.012
0.190	3.5		0.031
		0.042	
0.210	4		
		0.066	
0.232	4.5		0.068
		0.110	
0.276	5		0.160
0.342	5.5		
		0.226	
0.502	6		0.765
		0.875	
1.217	6.5		
		1.903	
2.405	7		1.677
2.990	7.5		
		1.773	
3.400	8		0.898
		0.995	
3.664	8.5		
		0.674	
3.856	9		-0.908
		0.456	
3.990	9.5		
		0.326	
4.110	10		-1.099
		0.244	
4.200	10.5		
		0.210	
4.270	11		-0.539
		0.160	
4.330			
		0.130	
			-0.348