Odvod

1. Izračunaj odvode naslednjih funkcij.

   (a) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sin x^2}$

   (b) $f(x) = x^{\sin x}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$

   Rešitev: (1a) $e^{\sqrt{x}}\frac{\sin x^2 - 4x^{\frac{3}{2}}\cos x^2}{2\sqrt{x}\sin^2 x^2}$, (1b) $x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$,
   (1c) $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$

2. Izračunaj tangento in normalo na na graf funkcije $f(x) = \ln(x^2+1)$ v točki $(1, \ln 2)$.

   Rešitev: $y = x + 1 - \ln 2$ in $y = -x + 1 + \ln 2$

3. Izračunaj tangento na krivuljo $y^2 - 2y = x$, ki gre skozi točko $(-2, 1)$.

   Rešitev: $y = \frac{x}{2} + 2$ in $y = -\frac{x}{2}$

4. Izračunaj vse prve in druge parcialne odvode funkcije

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + x + y + \frac{1}{xy}.$$

   Rešitev: $f'_x = 2x + 2xy + 1 - \frac{1}{x^2 y}$, $f'_y = 2y + x^2 + 1 - \frac{1}{xy^2}$, $f''_{xx} = 2 + 2y + \frac{2}{x^3 y}$, $f''_{xy} = 2x + \frac{1}{x^2 y^2}$, $f''_{yy} = 2 + \frac{2}{xy^3}$

5. Izračunaj vse prve parcialne odvode funkcije

$$f(x, y, z) = x^y y^z.$$

   Rešitev: $f'_x = yx^{y-1}y^z$, $f'_y = x^y y^{z-1}(y \ln x + z)$, $f'_z = x^y y^z \ln y$

6. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = x + e^x$ in naj bo g njena inverzna funkcija. Določi tangento na graf funkcije g v točki $(1, 0)$.

   Rešitev: $y = \frac{x-1}{2}$

7. Izračunaj odvod funkcije f, podane s predpisom $f(x) = x^{\sin x}$ s pomočjo funkcije $g(u, v) = u^v$.

8. Naj bo $f(x, y) = xe^{\sqrt{x^2+y^2}}$. Izračunaj parcialna odvoda f'_x in f'_y v odvisnosti od spremenljivk r in φ, kjer je $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$.

   Rešitev: $f'_x(r, \varphi) = e^r(r\cos^2\varphi + 1)$, $f'_y(r, \varphi) = e^r r \sin\varphi\cos\varphi$

9. Dani sta funkciji f in g s predpisoma $f(x) = -\arctan x^2$ in $g(x) = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Dokaži, da se f in g razlikujeta za konstanto. Za katero?

   Rešitev: $g(x) - f(x) = \frac{\pi}{4}$

10. Določi stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = e^{-x}(x^3 - y^2)$.

    Rešitev: Stacionarni točki sta $(0, 0)$ in $(3, 0)$; $(3, 0)$ je lokalni maksimum

11. Določi globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 3x + 2y - 1$ na trikotniku z oglišči $A(-1, 0)$, $B(0, 0)$, $C(0, 2)$.

    Rešitev: Min: $(0, 2)$, max: $(0, \frac{1}{2})$.

12. Določi pravokotnik z največjo ploščino, ki je včrtan elipsi s polosema a in b.

    Rešitev: Pravokotnik z oglišči $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, torej s ploščino $2ab$.

13. Določi globalna ekstrema funkcije

    $$f(x, y) = x^2 - x + y^2 - y$$

    na krogu z enačbo $x^2 + y^2 \leq 1$.

    Rešitev: Min: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, max: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

14. Funkcija f je podana s predpisom

    $$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

    Poišči globalne ekstreme funkcije f na trikotniku z enačbo $x+2y+z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

    Rešitev: Min: $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ in $(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5})$, max: $(2, 0, 0)$ in $(0, 0, 2)$.

15. Izračunaj naslednje limite:

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2+1}$

    (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$

    (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$

    (d) $\lim_{x\to\infty} x(\pi - 2\arctan x)$

    (e) $\lim_{x\downarrow 0} x^{\sin x}$

    Rešitev: 0, π, 2, 2, 1

16. Funkcija f je podana s predpisom

    $$f(x) = x \ln x.$$

    Poišči njeno definicijsko območje, presečišča s koorinatnima osema, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, prevoje, območje konveksnosti in konkavnosti, zalogo vrednosti, določi njeno obnašanje na robu definicijskega območja in nariši njen graf.

Rešitev: $D_f = (0, \infty)$, ničla je $x = 1$, raste na $(\frac{1}{e}, \infty)$, pada na $(0, \frac{1}{e})$, $x = \frac{1}{e}$ je (lokalni in globalni) minimum, konveksna je na celem D_f, $Z_f = [-\frac{1}{e}, \infty)$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$, nima asimptot

17. Naslednje podatke aproksimiraj po metodi najmanjših kvadratov s funkcijo $y = a + bx$.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	3.1	2.5	1.8	1.7	1.4

Rešitev: $a = 3.4$, $b = -4.2$

18. Število x (v milijonih) bakterij v kozarcu nepasteriziranega mleka raste eksponentno s časom t (v dnevih), torej $x = ae^{bt}$ za neki konstanti a in b. Meritve dajo naslednje rezultate:

t	0	1	2	3	4	5
x	4.2	19.4	89.6	414.0	1910.5	8822.7

Po metodi najmanjših kvadratov določi a in b.

Rešitev: $a = 4.2$, $b = 1.5$

19. S pomočjo Newtonove metode izračunaj približek negativne rešitve enačbe $2^x = x^2$. Uporabi tri korake iteracije.

Rešitev: $x = -0.77$ (natančna rešitev je $x = -0.766665$)