Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: |_|_|_|_|_|_|_|_|

Predavalnica: __________ Vrsta: ____________ Kolona: __________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ Skupaj: ____________

1. IZPIT IZ MATEMATIKE 1

Kemija – univerzitetni študij

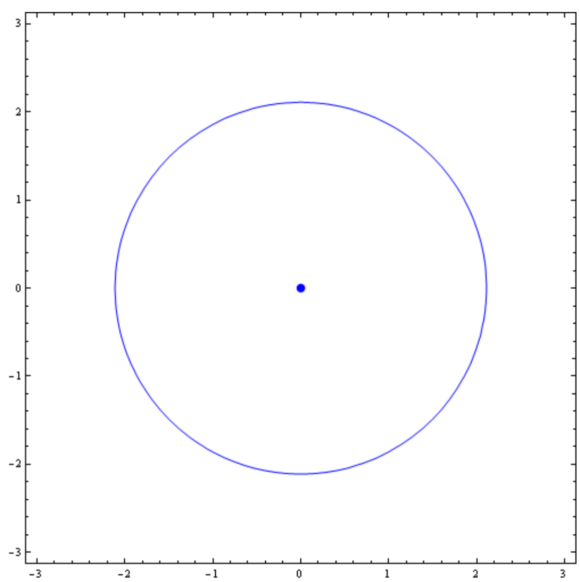
30. januar 2013

A

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

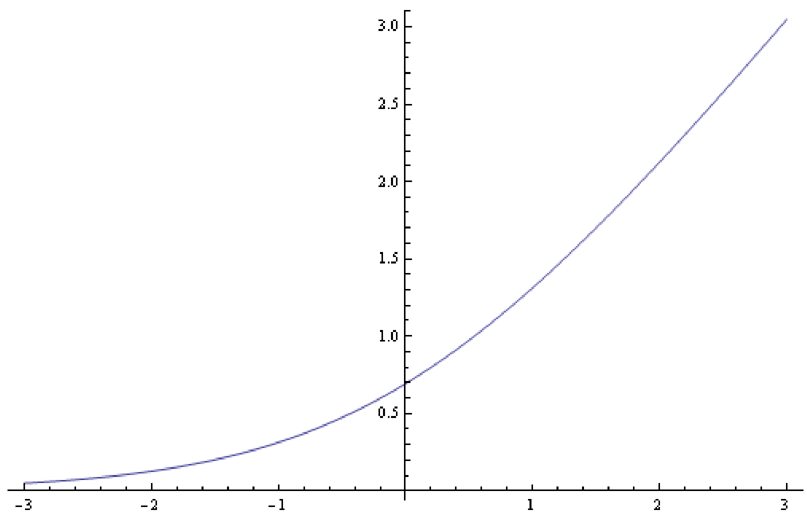
1. [25] Poišci vse $z \in \mathbb{C}$, ki rešijo enačbo $(|z|^2 - 3)(|z| + 2) = -6$, in jih nariši v ravnini.

Rešitev: Vidimo, da se v enačbi pojavlja zgolj $|z|$. Zato uvedemo polarne koordinate ($z = x+iy = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$, $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$), v katerih se enačba glasi $(r^2 - 3)(r + 2) = -6$, oz. $r^3 + 2r^2 - 3r = r(r-3)(r+1) = 0$, torej $r \in \{\cancel{-1}, 0, 3\}$, saj je $r \geq 0$. Pogojev, ki bi omejevali φ ni. Torej našo enačbo rešijo natanko tista kompleksna števila, ki so bodisi 0, ali pa ležijo na krožnici s središčem v $(0, 0)$ in polmerom 3.



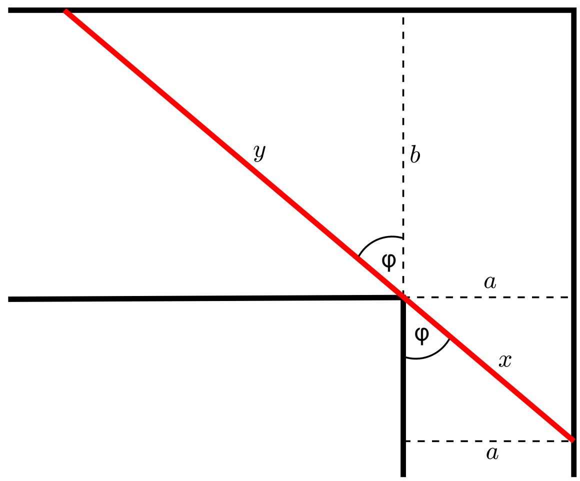
2. [25] Za funkcijo $f(x) = \ln(e^x + 1)$ določi njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, obnašanje v polih in neskončnosti ($\lim_{x\to\text{pol}} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$), stacionarne točke ($f'(x) = 0$), območje naraščanja/padanja in konveksnosti/konkavnosti, ter nariši njen graf.

Rešitev: Edini pogoj za definicijsko območje je $e^x + 1 \geq 0$, oz. $e^x \geq -1$, kar velja vedno, torej je $D_f = \mathbb{R}$. Velja $\ln(e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow e^x + 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 0$, torej f nima ničel. Ker je f zvezna in definirana povsod, nima polov. Velja $\lim_{x\to-\infty} \ln(e^x + 1) = \ln(\lim_{x\to-\infty} e^x + 1) = \ln(0 + 1) = 0$ in $\lim_{x\to\infty} \ln(e^x + 1) = \ln(\infty) = \infty$. Odvoda sta $f' = \frac{e^x}{e^x+1} > 0$ in $f' = \frac{e^x(e^x+1)-e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$, zato f nima stacionarnih točk in je povsod naraščajoča ter konveksna. Od tod sklepamo, da je zaloga vrednosti $Z_f = (0, \infty)$.



3. [25] Kolikšna je dolžina najdaljše palice, ki jo lahko nesemo (vzporedno tlem) skozi hodnik s pravokotnim ovinkom, če je širina hodnika pred ovinkom enaka a, po ovinku pa b?

Rešitev:



Če želimo, da je palica čim daljša, se bo morala dotikati vogala. Toda če gre palica res skozi ovinek, mora v vsakem trenutku (pri vsaki izbiri kota φ) biti krajša od daljice ki gre skozi vogal in ima krajišči na zunanjih stenah. Iščemo torej minimum dolžine te daljice, torej minimum funkcije $x+y=\frac{a}{\sin\varphi}+\frac{b}{\cos\varphi}=f(\varphi)$ za $\varphi\in[0,\pi/2]$. Odvod $f'=\frac{-a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ je nič ko je $\frac{b\sin\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, oz. $(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi})^3=\frac{a}{b}$, tj. $\varphi_0=\arctan\sqrt[3]{a/b}$. Iz slike je razvidno, da je tam res (edini) minimum funkcije f, ki je enak $f(\varphi_0)=\underline{\underline{\frac{a}{\sin\arctan\sqrt[3]{a/b}}+\frac{b}{\cos\arctan\sqrt[3]{a/b}}}}$.

4. [25] Območje v ravnini, ki ga omejujejo graf funkcije $\ln(x^2)$ na $[0,1]$, premici $x=0$ in $x=1$, ter premica $y=0$, zavrtimo okoli x-osi. Izračunaj volumen nastalega telesa.

Rešitev: Formula za volumen telesa, ki ga dobimo, ko območje med pozitivnima zvezno odvedljivima funkcijima f in g na intervalu $[a,b]$ zavrtimo okoli x-osi za poln kot, je $\pi\int_a^b |f^2-g^2|$, oz. v našem primeru, $\pi\int_0^1 |\ln^2(x^2)-0^2| = \pi\int_0^1 (2\ln x)^2 = 4\pi\int_0^1 \ln^2 x$. Prvo izračunajmo nedoločeni integral $\int \ln x \ln x = (*)$: uporabimo pravilo per partes (vemo, da je $\int \ln x = \int 1 \ln x \overset{PP}{=} x\ln x - \int x\frac{1}{x} = x(\ln x-1)$), in dobimo $(*) \overset{PP}{=} x(\ln x-1)\ln x - \int x(\ln x-1)\frac{1}{x} = x(\ln x-1)\ln x - x(\ln x-1) + x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$. Ker ima funkcija $\ln^2 x$ v 0 pol, je $\int_0^1 \ln^2 x$ izlimitiran integral, in velja $4\pi\int_0^1 \ln^2 x = 4\pi\lim_{a\downarrow 0}\int_a^1 \ln^2 x = 4\pi\lim_{a\downarrow 0}\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right)\Big|_a^1 = 4\pi\big((1\ln^2 1 - 2\ln 1 + 2) - \lim_{a\downarrow 0}(a\ln^2 a - 2a\ln a + 2a)\big) = 4\pi\big(2 - \lim_{a\downarrow 0}(a\ln^2 a - 2a\ln a)\big) = (\star)$. Po L'Hospitalovem pravilu velja $\lim_{a\downarrow 0} a\ln a = \lim_{a\downarrow 0}\frac{\ln a}{1/a} \overset{LHP}{=} \lim_{a\downarrow 0}\frac{1/a}{-1/a^2} = \lim_{a\downarrow 0}\frac{a}{-1} = 0$ in $\lim_{a\downarrow 0} a\ln^2 a = \lim_{a\downarrow 0}\frac{\ln^2 a}{1/a} \overset{LHP}{=} \lim_{a\downarrow 0}\frac{2\ln a\,\frac{1}{a}}{-1/a^2} = \lim_{a\downarrow 0}\frac{2\ln a}{-1/a} \overset{LHP}{=} \lim_{a\downarrow 0}\frac{2/a}{1/a^2} = \lim_{a\downarrow 0}\frac{2a}{1} = 0$. Zato je $(\star) = 4\pi(2-0) = \underline{\underline{8\pi}}$.

Ime in priimek: ____________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Predavalnica: ________ Vrsta: ________ Kolona: ________

1: ____ 2: ____ 3: ____ 4: ____ Skupaj: ________

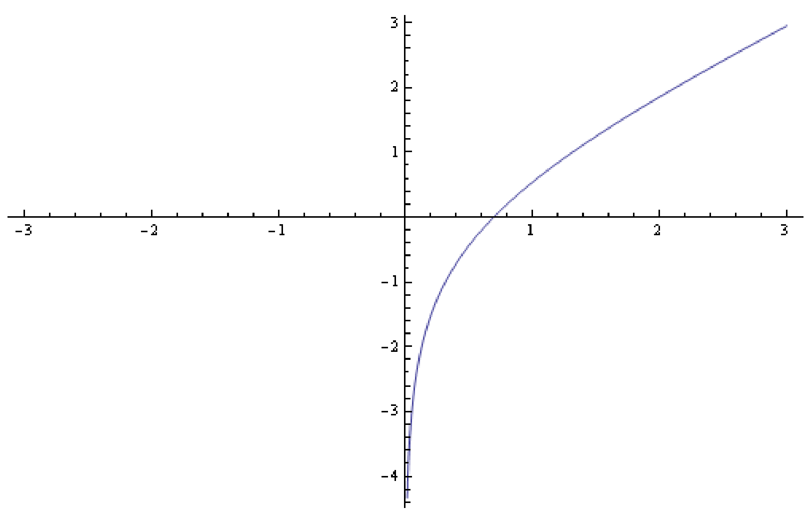
1. IZPIT IZ MATEMATIKE 1

Kemija – univerzitetni študij
30. januar 2013
B

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

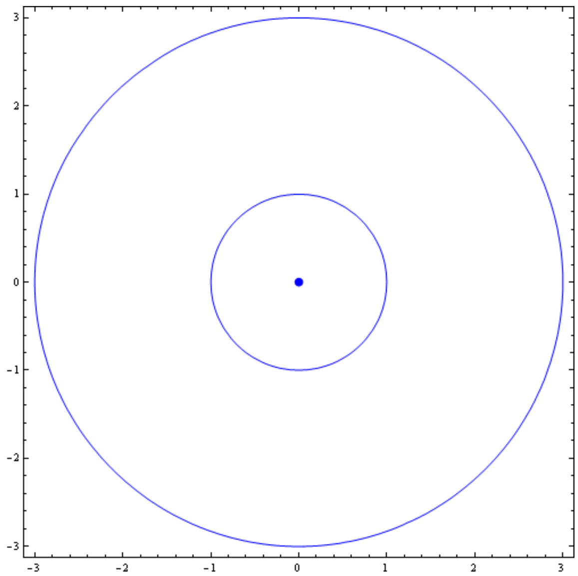
1. [25] Za funkcijo $f(x) = \ln(e^x - 1)$ določi njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, pole, obnašanje v polih in neskončnosti ($\lim_{x\to\text{pol}} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$), stacionarne točke ($f'(x) = 0$), območje naraščanja/padanja in konveksnosti/konkavnosti, ter nariši njen graf.

Rešitev: Podobno kot pri A testu.



2. [25] Poišci vse $z \in \mathbb{C}$, ki rešijo enačbo $(|z|^2+3)(|z|-4) = -12$, in jih nariši v ravnini.

Rešitev: Podobno kot pri A testu.



3. [25] Območje v ravnini, ki ga omejujejo graf funkcije $\ln(x-1)$ na $[1,2]$, premici $x=1$ in $x=2$, ter premica $y=0$, zavrtimo okoli x-osi. Izračunaj volumen nastalega telesa.

Rešitev: Podobno kot pri A testu: $\underline{\underline{2\pi}}$.

4. [25] Kolikšna je dolžina najdaljše palice, ki jo lahko nesemo (vzporedno tlem) skozi hodnik s pravokotnim ovinkom, če je širina hodnika pred ovinkom enaka a, po ovinku pa b?

Rešitev: Enako kot pri A testu.