Teoretični del izpita iz matematike I za kemike, 11. 2. 2011

1. Če zaporedje pozitivnih števil a_n konvergira proti $a \geq 1$, kam potem konvergira zaporedje števil $\sqrt[n]{a_n}$? Ali je tedaj vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ konvergentna? (Odgovora utemelji!)

Rešitev. Vsako konvergentno zaporedje je omejeno, torej obstaja tak M, da je $1 \leq a_n \leq M$. Potem je tudi $1 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{M}$. Ker vemo iz predavanj, da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$, sledi od tod, da mora biti tudi $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Vrsta ne konvergira, ker njeni členi a_n ne konvergirajo proti 0 (temveč proti a).

2. Kako se glasi Taylorjeva formula za funkcijo $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ okrog točke 0? Napiši polinom stopnje 3, ki ima v točki 0 vrednost in prve tri odvode enake kot funkcija f.

Rešitev. Funkcijo najprej napišemo v obliki $f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, nato pa oba člena razvijemo v vrsto. Pri predavanjih smo razvili

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Ko v to vrsto vstavimo namesto x izraz $-x$, dobimo še vrsto

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Vrsto za $f(x)$ dobimo sedaj tako, da od druge vrste odštejemo prvo, torej

$$f(x) = -2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots).$$

Polinom, ki zadošča zahtevam naloge je na primer $p(x) = -2(x + \frac{x^3}{3})$. (Lahko bi mu prišteli še poljuben polinom, ki vsebuje le potence reda več kot 3.)

3. Kako sta definirani funkciji sinus in hiperbolični sinus, kakšna je zveza med njima, in kako se izražata njuna odvoda? Skiciraj njuna grafa in izrazi inverzno funkcijo od $\operatorname{sh} x$ s pomočjo logaritma.

Rešitev. Po definiciji je $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, po Eulerjevi formuli pa $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Od tod sledi, da je $\sin x = \frac{\operatorname{sh} ix}{i} = -i \operatorname{sh} ix$. Pri predavanjih smo narisali grafa in izpeljali, da je $\sin' x = \cos x$ ter $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$. Prav tako smo izpeljali, da je inverzna funkcija od hiperboličnega sinusa

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

4. Izračunaj površino vrtenine, ki nastane, ko se graf funkcije $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, zavrti okrog abscisne osi.

Oris rešitve. Po formuli za površino vrtenine $p = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2}$ dobimo

$$p = 2\pi \int_0^\infty e^{-x} \sqrt{1 + e^{-2x}}\, dx.$$

V ta integral vpeljemo novo spremenljivko $t = e^{-x}$; meji pri tem preideta v $e^{-0} = 1$ in $e^{-\infty} = 0$. Ker je tedaj $dt = -e^{-x}\, dx$, dobimo, ko zamenjamo meji,

$$p = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

Da bi se znebili korena, vpeljemo v ta integral novo spremenljivko $t = \operatorname{sh} u$ (kot pri predavanjih). Ker je $\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$ in $dt = \operatorname{ch} u\, du$, dobimo tako

$$p = 2\pi \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \operatorname{ch}^2 u\, du.$$

Pri tem smo za izračun mej upoštevali, da je $u = \operatorname{arsh} t = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$. Integral lahko sedaj izračunamo tako, da vstavimo $\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$...