Teoretični del izpita iz matematike I za kemike, 7. 2. 2011

1. (i) Kako je definiran odvod funkcije ene spremenljivke in kako lahko z njegovo pomočjo ocenimo spremembo funkcijske vrednosti pri majhnih spremembah argumenta?

Rešitev.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Za majhne spremembe $h = dx$ je sprememba funkcijske vrednosti $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ približno enaka diferencialu $dy = f'(x)\,dx$. Natančneje, diferencial dy je dober približek za Δy v smislu, da je $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y - dy}{h} = 0$.

(ii) Kaj natančno pove Lagrangeov izrek? Če je $|f'(x)| \leq 2$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, dokaži, da je potem $|f(v) - f(u)| \leq 2|v-u|$ zavsaka $u, v \in \mathbb{R}$.

Rešitev. Lagrangeov izrek pravi: če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, ki je odvedljiva na (a, b), potem obstaja taka točka $\xi \in (a, b)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Geometrijsko to pomeni, da je tangenta na graf funkcije f v točki $(\xi, f(\xi))$ vzporedna sekanti skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

Ko napišemo Lagrangeov izrek za u, v (namesto a in b), imamo $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = f'(\xi)$. Če je $|f'(x)| \leq 2$ za vsak x, je $|f'(\xi)| \leq 2$ in sledi

$$\frac{|f(v) - f(u)|}{|v-u|} = |f'(\xi)| \leq 2.$$

Ko to neenakost pomnožimo z $|v-u|$, dobimo, kar je bilo treba dokazati.

2. Določi točko na paraboli $y = x^2$, ki je najbližja točki $(0, b)$. Koliko sta oddaljeni?

Rešitev. Kvadrat razdalje med dvema točkama (x_1, y_1) in (x_2, y_2) v ravnini je $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Torej je kvadrat razdalje splošne točke (x, x^2) na paraboli do točke $(0, b)$ enak

$$f(x) = (x-0)^2 + (x^2-b)^2 = x^2 + (x^2-b)^2.$$

Treba je določiti minimum funkcije f, saj je razdalja najmanjša, ko je njen kvadrat najmanjši. (Računanje s kvadratom razdalje je ugodnejše, ker se izognemo korenom.) Odvod funkcije f je enak

$$f'(x) = 2x + 2(x^2-b)\cdot 2x.$$

Ta odvod je enak 0 v točki $x = 0$ ter v točkah, ki rešita enačbo $1 + 2(x^2 - b) = 0$, se pravi $x = \pm\sqrt{b - \frac{1}{2}}$. Da bi bili rešitvi za x realni, mora biti $b - \frac{1}{2} \geq 0$, torej $b \geq \frac{1}{2}$. Tedaj dobimo dve točki $(\pm\sqrt{b-\frac{1}{2}}, b - \frac{1}{2})$, ki sta od točke $(0, b)$ oddaljeni za $d = \sqrt{b - \frac{1}{4}}$ (po gornji formuli za razdaljo). Če pa je $b < \frac{1}{2}$, je točki $(0, b)$ najbližja točka na paraboli kar $(0, b)$ (njena razdalja do parabole je $|b|$).

3. (i) Kakšna natančno je povezava med odvodom in določenim integralom?

Rešitev. Za dano funkcijo f opazujemo funkcijo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (opazujemo torej, kako je integral odvisen od zgornje meje). Če je funkcija f zvezan, je F odvedljiva in

$$F'(x) = f(x).$$

(To je osnovni izrek integralskega računa.)

(ii) Izračunaj odvod funkcije $F(x) = \int_x^1 \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$ v točki $x = \frac{\pi}{4}$.

Rešitev. Najprej zamenjamo meji, tako, da bo x v zgornji meji in bomo lahko uporabili točko (i):

$$F(x) = -\int_1^x \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt.$$

Po točki (i) je $F'(x) = -\sqrt{1+\sin^2 x}$. Torej je $F'(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = -\sqrt{3/2}$.

Če pa bi morali odvajati npr. funkcijo $F(x) = \int_0^{\sin x} g(t)\,dt$, bi dobili s posrednim odvajanjem $F'(x) = g(\sin x)\cos x$.

4. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, ko se graf funkcije $y = \frac{1}{\sqrt{(x+2)(x^2+4x+5)}}$, $x \geq 0$, zavrti okrog abscisne osi.

Rešitev. Po znani formuli je

$$V = \pi \int_0^\infty y^2\,dx = \pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x+2)(x^2+4x+5)}.$$

Za izračun integrala je treba ulomek razdeliti na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}.$$

Ko pomnožimo z imenovalcem, dobimo

$$1 = A(x^2+4x+5) + (Bx+C)(x+2).$$

Ko vstavimo $x = -2$, dobimo takoj, da je $A = 1$. Sicer pa dobimo z enačitvijo koeficientov pred enakimi potencami spremenljivke x sistem enačb

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 4A+2B+C &= 0 \\ 5A+2C &= 1. \end{aligned}$$

Ker že vemo, da je $A = 1$, lahko iz prvih dveh enačb takoj izračunamo, da je $B = -1$ in $C = -2$. (Zadnja enačba lahko služi za kontrolo rezultata.) Sedaj moramo torej izračunati integral

$$\int (\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2+4x+5})\,dx = \ln|x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx.$$

Ker je v drugem integralu na desni števec ravno odvod imenovalca vidimo (z vpeljavo nove spremenljivke $t = x^2+4x+5$), da je celotni nedoločeni integral enak

$$\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| = \ln\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Sedaj je potrebno le še vstaviti meji 0 in ∞. Ker je $\lim b \to \infty \ln\frac{b+2}{\sqrt{b^2+4b+5}} = \ln 1 = 0$, dobimo

$$V = \pi(0 - \ln\frac{2}{\sqrt{5}}) = \pi\ln\frac{\sqrt{5}}{2}.$$