Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: ☐☐☐☐☐☐☐☐

Predavalnica: __________ Vrsta: __________ Kolona: __________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ Skupaj: __________

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Kemija – univerzitetni študij

19. november 2012

A

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

1. [25] Poišči vsa realna števila x, za katera velja $\frac{2x+1}{x^2-4x+3} < 2$ $(*)$.

Rešitev: Obe strani neenakosti $(*)$ bi radi pomnožili z $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$, toda ta vrednost je lahko pozitivna ($\Leftrightarrow x \in (-\infty,1)\cup(3,\infty)$) ali pa negativna ($\Leftrightarrow x \in (1,3)$). Ker množenje neenakosti s pozitivnim številom ohranja neenakost, z negativnim pa jo obrne, moramo ločiti dve možnosti. Primera $x=1$ in $x=3$ lahko izključimo, saj tam izraz na levi strani od $(*)$ ni niti definiran.

(i) $x \in (-\infty,1)\cup(3,\infty)$
Sedaj se $(*)$ glasi $2x+1 < 2(x^2-4x+3)$, oziroma $0 < 2x^2-10x+5$. Kvadratna funkcija $2x^2-10x+5$ (katere vodilni koeficient 2 je pozitiven) ima ničli v $x_{1,2} = \frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2} = \frac{5\pm\sqrt{15}}{2} \doteq \frac{5\pm4}{2}$. Rešitve $(*)$ v primeru (i) so torej $\big((-\infty,1)\cup(3,\infty)\big) \cap \big((-\infty,\frac{5-\sqrt{15}}{2})\cup(\frac{5+\sqrt{15}}{2},\infty)\big) = \underline{(-\infty,\frac{5-\sqrt{15}}{2})\cup(\frac{5+\sqrt{15}}{2},\infty)}$.

(ii) $x \in (1,3)$
Sedaj se $(*)$ glasi $2x+1 > 2(x^2-4x+3)$, oziroma $0 > 2x^2-10x+5$. Kvadratna funkcija $2x^2-10x+5$ (katere vodilni koeficient 2 je pozitiven) ima ničli v $x_{1,2} = \frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2} = \frac{5\pm\sqrt{15}}{2} \doteq \frac{5\pm4}{2}$. Rešitve $(*)$ v primeru (ii) so torej $(1,3)\cap(\frac{5-\sqrt{15}}{2},\frac{5+\sqrt{15}}{2}) = \underline{(1,3)}$.

Končna rešitev je torej $\underline{\underline{(-\infty,\frac{5-\sqrt{15}}{2})\cup(1,3)\cup(\frac{5+\sqrt{15}}{2},\infty)}}$.

2. [25] Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo $(\sqrt{3}i+\sqrt{3})z^4-\frac{1}{i^{2012}}=|i+\sqrt{3}|-3i$ $(*)$.

Rešitev: Ker je $i^{2012} = i^{4\cdot 503} = (i^4)^{503} = 1^{503} = 1$ in $|i+\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$, se $(*)$ glasi $\sqrt{3}(1+i)z^4 - 1 = 2-3i$, oziroma $z^4 = \frac{3(1-i)}{\sqrt{3}(1+i)}$. Desno stran lahko nadalje poenostavimo: $\frac{3(1-i)}{\sqrt{3}(1+i)} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}(1-i)(1-i)}{\sqrt{3}(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{3}(1-2i+i^2)}{1-i^2} = \frac{\sqrt{3}(-2i)}{2} = -\sqrt{3}i$. Ko pretvorimo to kompleksno število v polarno obliko, dobimo $-\sqrt{3}i = \sqrt{3}(\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2}))$, saj $-\sqrt{3}i$ nima realne komponente (torej leži na y-osi) in velja $-\sqrt{3}<0$ (torej leži na spodnji polovici y-osi). Naša enačba se torej glasi $z^4 = 3^{1/2}(\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2}))$. Sedaj uporabimo znan izrek: za poljubne $r\in[0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi)$, $n\in\mathbb{N}$ velja

$$z^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \iff z = r^{1/n}(\cos(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}) + i\sin(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n})) \text{ za } k=0,\dots,n-1.$$

V našem primeru so rešitve torej $\underline{\underline{z = 3^{1/8}(\cos(\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}))}}$ za $k=0,1,2,3$.

3. [20] Za funkcijo $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$ določi njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti, ter ugotovi ali je soda, liha, zvezna.

Rešitev: Definicijsko območje: Ker sta funkciji x^2 in $\sin(x)$ definirani povsod, $\sqrt{x}$ pa le za $x \geq 0$, imamo le en pogoj za izračun definicijskega območja: $\sin(x^2) \geq 0$ $(*)$. Iz grafa funkcije $\sin(x)$ (nariši si!) je razvidno, da je $\sin(x) \geq 0$ natanko na intervalih $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$, za $k \in \mathbb{Z}$. V našem primeru se $(*)$ torej glasi $x^2 \in [2k\pi, 2k\pi+\pi]$ za nek $k \in \mathbb{Z}$. Ker pa vedno velja $x^2 \geq 0$, je $(*)$ ekvivalenten pogoju $x^2 \in [2k\pi, 2k\pi+\pi]$ za nek $k \in \mathbb{N}_0$. To je ekvivalentno pogoju $x \in [\sqrt{2k\pi}, \sqrt{2k\pi+\pi}] \cup [-\sqrt{2k\pi+\pi}, -\sqrt{2k\pi}]$ za nek $k \in \mathbb{N}_0$. Zato je $D_f = \underline{\underline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[\sqrt{2k\pi}, \sqrt{2k\pi+\pi}] \cup [-\sqrt{2k\pi+\pi}, -\sqrt{2k\pi}]}}$.

Zaloga vrednosti: Funkcija x^2 doseže vrednosti $[0,\infty)$, in ker $\sin(x)$ doseže vrednosti $[-1,1]$, tudi $\sin(x^2)$ doseže vrednosti $[-1,1]$, saj je npr. $[0,2\pi] \subseteq [0,\infty)$. Ker pa definicijsko območje ni cel $\mathbb{R}$, temveč le tisti x-i, da je $\sin(x^2) \geq 0$, velja $Z_f = [\sqrt{0}, \sqrt{1}] = \underline{\underline{[0,1]}}$.

Sodost, lihost, zveznost: Funkcija f je zvezna, saj je elementarna (zvezne so funkcije $\sqrt{x}$, $\sin(x)$, x^2, kompozitum funkcij pa ohranja zveznost). Poleg tega je f soda ($f(-x) = \sqrt{\sin((-x)^2)} = \sqrt{\sin(x^2)} = f(x)$) in zato ni liha.

4. [30] Za naslednje vrste ugotovi ali so konvergentne:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{n^2+1}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10n^2}{5n^3+4n^2+6n+3}$.

Rešitev: a) Kvocientnega, korenskega, ali Raabejevega kriterija tu ne moremo uporabiti, saj členi vrste niso vedno pozitivni. Ker je vrsta alternirajoča, uporabimo Leibnizev kriterij: če je zaporedje a_n padajoče in limitira proti 0, potem je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergentna. V našem primeru je $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0$, saj ima števec manjšo stopnjo kot imenovalec. Padajočost: $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{2n+2}{n^2+2n+2} \leq \frac{2n}{n^2+1} \Leftrightarrow 2(n+1)(n^2+1) \leq 2n(n^2+2n+2) \Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 \leq n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow 0 \leq n^2+n-1 \Leftrightarrow 1 \leq n$. Sklepamo torej, da je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{n^2+1}$ $\underline{\underline{\text{konvergentna}}}$.

b) Hitro opazimo, da ima člen n-te delne vsote obliko $S_n = (\sqrt{1}-\sqrt{0}) + (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = -\sqrt{0} + \sqrt{n+1}$, in limita tega je ∞, torej je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $\underline{\underline{\text{divergentna}}}$.

b) Alternativno poskusimo uporabiti kvocientni kriterij: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\frac{1}{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)/n}+1}{\sqrt{(n+2)/n}+\sqrt{(n+1)/n}} = \frac{1+1}{1+1} = 1$, kar nam nič ne pomaga. Korenski kriterij izgleda še manj obetajoč. Poskusimo Raabejev kriterij: $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}-1) = \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{2\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{(2\sqrt{n+1}-(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}))(2\sqrt{n+1}+(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}))(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(2\sqrt{n+1}+(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}))(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{(4(n+1)-(n+2\sqrt{n(n+2)}+n+2))(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{((n+2)-(n+1))(2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+2})} = \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{2(n+1-\sqrt{n(n+2)})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})\frac{1}{\sqrt{n}}}{(2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+2})\frac{1}{\sqrt{n}}} \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{(n+1-\sqrt{n(n+2)})}{1} = \frac{2(1+1)}{2\cdot 1+1+1} \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{(n+1-\sqrt{n(n+2)})(n+1+\sqrt{n(n+2)})}{(n+1+\sqrt{n(n+2)})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n^2+2n+1-n(n+2))}{n+1+\sqrt{n(n+2)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\frac{1}{n}}{(n+1+\sqrt{n(n+2)})\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$, od koder sklepamo, da je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $\underline{\underline{\text{divergentna}}}$.

c) Vsi trije kriteriji (kvocientni, korenski, Raabejev) dajo limito 1, od koder ne moremo nič sklepati. Ker pa vidimo, da je števec stopnje 2, imenovalec pa stopnje 3, se bo zaporedje $\frac{10n^2}{5n^3+4n^2+6n+3}$ pri velikih n obnašalo kot $\frac{10n^2}{5n^3} = 2\frac{1}{n}$. Vemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergira. Zato bo tudi naša vrsta $\underline{\underline{\text{divergirala}}}$, kar utemeljimo z ustrezno oceno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10n^2}{5n^3+4n^2+6n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{5n^3+4n^2+6n+3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{1000n^3} = \frac{1}{100}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

IME IN PRIIMEK: ______________________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

PREDAVALNICA: __________ VRSTA: ____________ KOLONA: ___________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ SKUPAJ: ____________

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Kemija – univerzitetni študij

19. november 2012

B

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

1. [25] Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo $(\sqrt{3}i - \sqrt{3})z^4 - \frac{1}{i^{2012}} = |i + \sqrt{3}| - 3i$ $(*)$.

Rešitev: Ker je $i^{2012} = i^{4\cdot 503} = (i^4)^{503} = 1^{503} = 1$ in $|i+\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, se $(*)$ glasi $\sqrt{3}(i-1)z^4 - 1 = 2 - 3i$, oziroma $z^4 = \frac{3(1-i)}{\sqrt{3}(i-1)}$. Desno stran lahko nadalje poenostavimo: $\frac{3(1-i)}{\sqrt{3}(i-1)} = \frac{-\sqrt{3}\sqrt{3}(1-i)}{\sqrt{3}(1-i)} = -\sqrt{3}$. Ko pretvorimo to kompleksno število v polarno obliko, dobimo $-\sqrt{3} = \sqrt{3}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$, saj $-\sqrt{3}$ nima imaginarne komponente (torej leži na x-osi) in velja $-\sqrt{3} < 0$ (torej leži na levi polovici x-osi). Naša enačba se torej glasi $z^4 = 3^{1/2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$. Sedaj uporabimo znan izrek: za poljubne $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \iff z = r^{1/n}(\cos(\tfrac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n})) \text{ za } k = 0, \ldots, n-1.$$

V našem primeru so rešitve torej $\underline{\underline{z = 3^{1/8}(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}))}}$ za $k = 0, 1, 2, 3$.

2. [25] Poišči vsa realna števila x, za katera velja $\frac{3x+2}{x^2-4x+3} < 1$.

Rešitev: Obe strani neenakosti $(*)$ bi radi pomnožili z $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$, toda ta vrednost je lahko pozitivna ($\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$) ali pa negativna ($\Leftrightarrow x \in (1, 3)$). Ker množenje neenakosti s pozitivnim številom ohranja neenakost, z negativnim pa jo obrne, moramo ločiti dve možnosti. Primera $x=1$ in $x=3$ lahko izključimo, saj tam izraz na levi strani od $(*)$ ni niti definiran.

(i) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$
Sedaj se $(*)$ glasi $3x+2 < x^2-4x+3$, oziroma $0 < x^2-7x+1$. Kvadratna funkcija x^2-7x+1 (katere vodilni koeficient 1 je pozitiven) ima ničli v $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{7\pm3\sqrt{5}}{2} \doteq \frac{7\pm3\cdot2}{2}$. Rešitve $(*)$ v primeru (i) so torej $\big((-\infty, 1) \cup (3, \infty)\big) \cap \big((-\infty, \frac{7-3\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \infty)\big) = \underline{(-\infty, \frac{7-3\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \infty)}$.

(ii) $x \in (1, 3)$
Sedaj se $(*)$ glasi $3x+2 > x^2-4x+3$, oziroma $0 > x^2-7x+1$. Kvadratna funkcija x^2-7x+1 (katere vodilni koeficient 1 je pozitiven) ima ničli v $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{7\pm3\sqrt{5}}{2} \doteq \frac{5\pm4}{2}$. Rešitve $(*)$ v primeru (ii) so torej $(1, 3) \cap (\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{7+3\sqrt{5}}{2}) = \underline{(1, 3)}$.

Končna rešitev je torej $\underline{\underline{(-\infty, \frac{7-3\sqrt{5}}{2}) \cup (1, 3) \cup (\frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \infty)}}$.

3. [30] Za naslednje vrste ugotovi ali so konvergentne:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n^2+1}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10n^2+6n}{5n^3+4n^2+3}$.

Rešitev: a) Kvocientnega, korenskega, ali Raabejevega kriterija tu ne moremo uporabiti, saj členi vrste niso vedno pozitivni. Ker je vrsta alternirajoča, uporabimo Leibnizev kriterij: če je zaporedje a_n padajoče in limitira proti 0, potem je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergentna. V našem primeru je $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^2+1} = 0$, saj ima števec manjšo stopnjo kot imenovalec. Padajočost: $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n^2+4n+3} \leq \frac{n}{2n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(2n^2+1) \leq n(2n^2+4n+3) \Leftrightarrow 2n^3+2n^2+n+1 \leq 2n^3+4n^2+3n \Leftrightarrow 0 \leq 2n^2+2n-1 \Leftrightarrow 1 \leq n$. Sklepamo torej, da je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{n^2+1}$ konvergentna.

b) Hitro opazimo, da ima člen n-te delne vsote obliko $S_n = (\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{0}) + (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}) + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) + \ldots + (\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}) + (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = -\sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{n+1}$, in limita tega je ∞, torej je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ divergentna.

b) Alternativno bi lahko poskusili uporabiti kvocientni kriterij: podobno kot pri rešitvi za nalogo 4.b) iz A testa bi dobili 1, kar nam nič ne pomaga. Korenski kriterij izgleda še manj obetajoč. Poskusili bi pa lahko še Raabejev kriterij: podobno kot pri rešitvi za nalogo 4.b) iz A testa bi dobili $\frac{2}{3}$, od koder sklepamo, da je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ divergentna.

c) Vsi trije kriteriji (kvocientni, korenski, Raabejev) dajo limito 1, od koder ne moremo nič sklepati. Ker pa vidimo, da je števec stopnje 2, imenovalec pa stopnje 3, se bo zaporedje $\frac{10n^2+6n}{5n^3+4n^2+3}$ pri velikih n obnašalo kot $\frac{10n^2}{5n^3} = 2\frac{1}{n}$. Vemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira. Zato bo tudi naša vrsta divergirala, kar utemeljimo z ustrezno oceno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10n^2+6n}{5n^3+4n^2+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2+6n}{5n^3+4n^2+3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{1000n^3} = \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

4. [20] Za funkcijo $f(x) = \sqrt{\cos(x^2)}$ določi njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti, ter ugotovi ali je soda, liha, zvezna.

Rešitev: Definicijsko območje: Ker sta funkciji x^2 in $\cos(x)$ definirani povsod, $\sqrt{x}$ pa le za $x \geq 0$, imamo le en pogoj za izračun definicijskega območja: $\cos(x^2) \geq 0$ $(*)$. Iz grafa funkcije $\cos(x)$ (nariši si!) je razvidno, da je $\cos(x) \geq 0$ natanko na intervalih $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, za $k \in \mathbb{Z}$. V našem primeru se $(*)$ torej glasi $x^2 \in [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$ za nek $k \in \mathbb{Z}$. Ker pa vedno velja $x^2 \geq 0$, je $(*)$ ekvivalenten pogoju $x^2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ali $x^2 \in [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$ za nek $k \in \mathbb{N}$. To pa je ekvivalentno pogoju $x \in [-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}]$ ali $x \in [\sqrt{-\pi/2+2k\pi}, \sqrt{\pi/2+2k\pi}] \cup [-\sqrt{\pi/2+2k\pi}, -\sqrt{-\pi/2+2k\pi}]$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Zato je $D_f = \underline{\underline{[-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}] \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}}[\sqrt{-\pi/2+2k\pi}, \sqrt{\pi/2+2k\pi}] \cup [-\sqrt{\pi/2+2k\pi}, -\sqrt{-\pi/2+2k\pi}]}}$.

Zaloga vrednosti: Funkcija x^2 doseže vrednosti $[0, \infty)$, in ker $\cos(x)$ doseže vrednosti $[-1, 1]$, tudi $\cos(x^2)$ doseže vrednosti $[-1, 1]$, saj je npr. $[\pi/2, \pi/2+2\pi] \subseteq [0, \infty)$. Ker pa definicijsko območje ni cel $\mathbb{R}$, temveč le tisti x-i, da je $\cos(x^2) \geq 0$, velja $Z_f = [\sqrt{0}, \sqrt{1}] = \underline{\underline{[0, 1]}}$.

Sodost, lihost, zveznost: Funkcija f je zvezna, saj je elementarna (zvezne so funkcije $\sqrt{x}, \cos(x), x^2$, kompozitum funkcij pa ohranja zveznost). Poleg tega je f soda ($f(-x) = \sqrt{\cos((-x)^2)} = \sqrt{\cos(x^2)} = f(x)$) in zato ni liha.