IME IN PRIIMEK: ________________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

PREDAVALNICA: __________ VRSTA: __________ KOLONA: __________

1: ____ 2: ____ 3: ____ 4: ____ SKUPAJ: __________

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Kemija – univerzitetni študij

25. november 2013

A

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

1. [25] Poišči vsa realna števila x, za katera velja $|x^3-3x^2+2x| \leq x^2$. $(*)$

Rešitev: Prva možnost: $x^3-3x^2+2x \geq 0$. To velja $\Leftrightarrow x(x^2-3x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) \geq 0$ $\Leftrightarrow x \in [0,1] \cup [2,\infty)$ (1). Tedaj se $(*)$ glasi $x^3-3x^2+2x \leq x^2$ oziroma $x^3-4x^2+2x \leq 0 \Leftrightarrow$ $x(x^2-4x+2) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-\frac{4+\sqrt{4^2-4\cdot 2}}{2\cdot 1})(x-\frac{4-\sqrt{4^2-4\cdot 2}}{2\cdot 1}) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2})) \leq 0$ $\Leftrightarrow x \in (-\infty,0] \cup [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$ (1′). Rešitev je torej $(1) \cap (1') = \big([0,1]\cup[2,\infty)\big) \cap \big((-\infty,0] \cup [2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]\big) = \{0\} \cup [2-\sqrt{2},1] \cup [2,2+\sqrt{2}]$.

Druga možnost: $x^3-3x^2+2x < 0$. To se zgodi $\Leftrightarrow x(x^2-3x+2) < 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) < 0$ $\Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (1,2)$. Tedaj se $(*)$ glasi $-(x^3-3x^2+2x) \leq x^2$ oziroma $0 \leq x^3-2x^2+2x \Leftrightarrow$ $0 \leq x(x^2-2x+2) \Leftrightarrow 0 \leq x(x^2-2x+2) \Leftrightarrow 0 \leq x(x-\frac{2+\sqrt{2^2-4\cdot 2}}{2})(x-\frac{2-\sqrt{2^2-4\cdot 2}}{2}) \Leftrightarrow x \in [0,\infty)$ (2′). Rešitev je torej $(2) \cap (2') = \big((-\infty,0) \cup (1,2)\big) \cap (0,\infty) = (1,2)$.

Končna rešitev je prva možnost $\cup$ druga možnost $= \{0\} \cup [2-\sqrt{2},1] \cup [2,2+\sqrt{2}] \cup (1,2) =$ $\underline{\underline{\{0\} \cup [2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]}}$.

2. [25] Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo $z^8 - 2z^4 + 2 = 0$. Namig: $z^4 = w$.

Rešitev: Substitucija $z^4 = w$ pretvori zgornjo enačbo v $w^2 - 2w + 2 = 0$, ki ima rešitvi $w = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm i$. Rešujemo torej enačbi $z^4 = 1 + i$ in $z^4 = 1 - i$. Desna stran ima polarno obliko $1 \pm i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pm\pi}{4} + i \sin \frac{\pm\pi}{4})$. Zato je $z = \sqrt{2}^{1/4}(\cos \frac{\pm\pi/4 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pm\pi/4 + 2k\pi}{4}) = 2^{1/8}(\cos(\pm\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}) + i \sin(\pm\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}))$ za $k = 0, 1, 2, 3$.

3. [25] Pokaži, da je zaporedje $a_1 = 3$ in $a_{n+1} = \frac{3a_n^2}{a_n^2+2}$ monotono, omejeno, konvergentno, ter izračunaj limito. Vse odgovore dobro utemelji!

Rešitev: Opazimo, da je $a_2 = \frac{3 \cdot 3^2}{3^2+2} = \frac{27}{11} < 3$, torej dokazujemo padajočost. Velja $a_{n+1} \le a_n$ $\Leftrightarrow \frac{3a_n^2}{a_n^2+2} \le a_n \Leftrightarrow 3a_n^2 \le a_n(a_n^2+2) \Leftrightarrow 0 \le a_n^3 - 3a_n^2 + 2a_n$. Funkcija $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$ je pozitivna na $[0,1] \cup [2,\infty)$. Torej, če nam uspe pokazati da velja $\forall n : 2 \le a_n$, bosta s tem dokazana padajočost in omejenost zaporedja. To dokazujemo z indukcijo: $2 \le 3 = a_1$ že velja. Naj velja $2 \le a_n$. Potem je $2 \le a_{n+1} = \frac{3a_n^2}{a_n^2+2} \Leftrightarrow 2(a_n^2+2) \le 3a_n^2 \Leftrightarrow 4 \le a_n^2$, kar po indukcijski predpostavki drži. Torej je a_n padajoče in navzdol omejeno zaporedje, in zato po izreku tudi konvergentno. Naj bo $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Tedaj je $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n^2}{a_n^2+2} = \frac{3a^2}{a^2+2} \Rightarrow a(a^2+2) = 3a^2 \Rightarrow a(a^2-3a+2) = 0 \Rightarrow a(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \underline{\underline{2}}$.

4. [25] Za naslednje vrste ugotovi ali so konvergentne:

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^5-1}}; \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}; \qquad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n.$$

Rešitev: a) $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^5-1}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{n^5-1}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{2n}{n^5/2}} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^4}} = \sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, torej vrsta konvergira.

b) 1. način: Po kvocientnem kriteriju vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ konvergira: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3 2^n}{2^{n+1} n^3} = \frac{(1+1/n)^3}{2} \overrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2} < 1$. Zato tudi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$ konvergira (vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna).

2. način: Po Leibnizovem kriteriju vrsta konvergira: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ in $\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \leq \frac{n^3}{2^n} \Leftrightarrow (n+1)^3 \leq 2n^3 \Leftrightarrow 0 \leq n^3 - 3n^2 - 3n - 1$, kar velja za vse n-je od nekje naprej, končno mnogo členov vrste pa ne vpliva na konvergenco.

c) $\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+2})^n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n+2})^n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{(n+2)/2})^{\frac{n+2}{2}\frac{2n}{n+2}} = (\frac{1}{e})^{\lim \frac{2n}{n+2}} = e^{-2} \neq 0$, torej vrsta divergira.

Ime in priimek: ______________________ Vpisna št: | | | | | | | | |

Predavalnica: __________ Vrsta: ____________ Kolona: __________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ Skupaj: ____________

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Kemija – univerzitetni študij

25. november 2013

B

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

1. [25] Poišči vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo $z^6+z^3-6=0$. Namig: $z^3=w$.

Rešitev: Podobno kot pri A: $w=2,-3$ in $z=2(\cos(\frac{2k\pi}{3})+i\sin(\frac{2k\pi}{3})), 3(\cos(\frac{-\pi+2k\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi+2k\pi}{3}))$ za $k=0,1,2$.

2. [25] Poišči vsa realna števila x, za katera velja $|x^3-3x^2+2x| \leq x$.

Rešitev: Podobno kot pri A: $[0,1]\cup[2,\infty)$ (1), $(-\infty,0]\cup[\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}]$ (1'), $(-\infty,0)\cup(1,2)$ (2), $[0,\infty)$ (2'), $\underline{\underline{\{0\}\cup[\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}]}}$.

3. [25] Za naslednje vrste ugotovi ali so konvergentne:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$; c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^3}{2^n}$.

Rešitev: Podobno kot pri A.

4. [25] Pokaži, da je zaporedje $a_1 = 3$ in $a_{n+1} = \frac{3a_n^2}{a_n^2+2}$ monotono, omejeno, konvergentno, ter izračunaj limito. Vse odgovore dobro utemelji!

Rešitev: Enako kot pri A.