/rd/	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
/°/	0	30	45	60	90	180	270
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0

$x^n = ?$

x\n	2	3	4	5
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	79	343	2401	
8	64	512	4096	
9	81	729	6561	
10	100	1000	10000	
11	121	1331		
12	144	1728		
13	169			
14	196			
15	225			
16	256			
17	289			
18	324			
19	361			
20	400			

$\sin^2\alpha + co$

$1 + tg^2\alpha = $

$1 + ctg^2\alpha =$

$\sin(-\alpha) =$

$\cos(-\alpha) =$

$tg(-\alpha) = -$

$ctg(-\alpha) =$

$\sin(\pi \pm \alpha$

$\cos(\pi \pm \alpha$

$tg(k\pi \pm \alpha$

$ctg(k\pi \pm c$

$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = co$

$\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \pm s$

$tg(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp ct$

$ctg(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp t$

$\sin(k2\pi \pm \alpha) = \pm$

$\cos(k2\pi \pm \alpha) = c$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin$

$\cos(\alpha \pm \beta) = co$

$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tgc}{1 \mp}$

$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg}{ct}$

$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{shx}{chx} = \frac{}{c}$

$cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{chx}{shx} = $

$ch^2x - sh^2x = 1$

$sh(-x) = -shx$

$ch(-x) = chx$

$th(-x) = -thx$

$cth(-x) = -cthx$

$arshx = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

$arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

EULERJEVE FORMULE:

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $\qquad e^{k2\pi i} = 1; k \in Z$

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ $\qquad \sin x = -sh(ix)$

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\qquad \cos x = ch(ix)$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{c}{}$

$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta}{\sin\alpha\sin}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos($

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin($

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3c$

$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$

$ctg3\alpha = \frac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3tg^2\alpha - 1}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos}{1 + \cos}}$

$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$

$z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$

$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$|z + w| \le |z| + |w|$

$|z - w| \ge ||z| - |w||$

$z = a + bi$

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\varphi = arctg\frac{b}{a} + k\pi; k = 0,1,2$

$a = 0, b > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$a = 0, b < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$

$a > 0, b = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

$a < 0, b = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$

$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi_z + \varphi_w) +$

$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\varphi_z - \varphi_w) + i \cdot s$

$z^{-1} = |z|^{-1} \cdot (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$

$z^n = |z|^n \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n =$

$x^n - z = 0$

$x_{k+1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n}$

$(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$

$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{tgx}{x} = 1$

$\lim_{n\to 0}\left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(k - r)!} \quad n \in$

$\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1)(r-2)\ldots}{k!}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

PRAŠTEVILA:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

$\pi \approx 3{,}1416 \approx \frac{22}{7}$

$\pi^2 \approx 9{,}8696$

$e \approx 2{,}71828$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7321$

$\sqrt{5} \approx 2{,}2361$

$\sqrt{7} \approx 2{,}6458$

$\sqrt{11} \approx 3{,}3166$

$\sqrt{13} \approx 3{,}6056$

$\sqrt{19} \approx 4{,}3589$

$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$

$\sqrt[3]{3} \approx 1{,}4422$

$\sqrt[3]{5} \approx 1{,}7100$

$\sqrt[3]{7} \approx 1{,}9129$

$\ln 2 \approx 0{,}6931$

$\log 2 \approx 0{,}3010$

$\log e \approx 0{,}4323$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

NEDOLOČENI IZRAZI:

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, 1^\infty$

DIVERGENTNE VRSTE:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

KONVERGENTNE VRSTE:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\ k>1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^k}\ k>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a q^n\quad |q|<1, a\neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$|x| = \begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1; x<0 \\ 0; x=0 \\ 1; x>0 \end{cases}$$

D_f in obnašanje na robovih; ničle; f(0); f' (intervali naraščanja in padanja, ekstremi); f'' (intervali konveksnosti in konkavnosti, prevoji)

KANDIDATI ZA EKSTREME:

– ničle f'
– krajišča intervala
– točke, kjer f ni odvedljiva

$$f(x) = g(x) \text{ na } I$$

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) - g(x) =$$

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)\cdot h$$

$$(kx+n)' = k$$

$$(C)' = 0$$

$$(C\cdot f)'(x) = C\cdot f'(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$$

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}; n\in R$$

$$(a^x)' = a^x\cdot \ln a; a>0$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x\cdot \ln^n a; a>0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$x = e^{\ln x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' =$$

$$(\operatorname{ctg} x)' =$$

$$(\arcsin$$

$$(\arccos$$

$$(f\pm g)'(x) = f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}; g(x)\neq$$

T: Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.

T: f in g sta odvedljivi funkciji. $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}; u = g(x), y = f(u)$$

T: f je odvedljiva in bijektivna. Potem je f^{-1} tudi odvedljiva in velja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

DIFERENCIAL: $dy = f'(x_0)dx$

NEDOLOČENI INTEGRAL:

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow f(x) = F'(x)$$

$$G(x) = F(x) + C \Leftrightarrow G'(x) = F'(x) \Leftrightarrow G(x) =$$

$$\int (f\pm g)dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$$

$$\int C\cdot f\,dx = C\cdot\int f\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{PE}$$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int\frac{f'}{f}dx = \ln|f| + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n\neq 1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int a^{kx}dx = \frac{a^x}{k\cdot\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

$$\int\frac{p^{(n)}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = q^{(n-1)}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{T^{(2n-3)}(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \int$$

$$\int\frac{S^{(m)}(x)}{(x-k)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, m<n : x-k = \frac{1}{t}$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx$$

DOLOČENI INTEGRAL:

RIEMANNOVA VSOTA:

$$S_p(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad ;\xi\in[x_i, x_{i-1}$$

DELITEV ALI PARTICIJA INTERVALA [a,b]: končna množica točk

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta_p = \max_{1\leq i\leq n}\Delta_i x$$

D: **RIEMANNOV INTEGRAL:** Število I je limita Riemannovih vsot:

$$I = \lim_{\Delta_p \to 0} S_p(f) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\Delta_p <$$

Če limita Riemannovih vsot $S_p(f)$ obstaja, pravimo, da je f na intervalu [a,b] integrabilna v Riemannovem smislu.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta_p \to 0} S_p(f)$$

I: Vsaka zvezna funkcija $f:[a,b] \to R$ je integrabilna. To velja tudi za funkcije, ki so nezvezne v končno ali štetno neskončno mnogo točkah.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad a < c$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

T: $a \le b; f, g:[a,b] \to R$ Če je f(x)≤g(x), potem je

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

P: $m \le f(x) \le M \ \forall x \in [a,b] \ b \ge a \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

T: Če je $f:[a,b] \to R$ zvezna,

$$\exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

IZREK O POVPREČNI VREDNOSTI: Na intervalu [a,b] obstaja taka točka ξ, da velja, da je $f(\xi) = c \quad f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

T: $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad a \le b$

OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA: Če je f zvezna funkcija, je njen določeni integral $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ odvedljiva funkcija zgornje meje r in velja: $F'(t) = f(t)$.

P: (**DRUGI OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA**): Če je $G'(x) = f(x) \ \forall x$, je

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

T: Če je $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a,b]$ monotona odvedljiva funkcija in f zvezna, potem velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$, če je

$\varphi(\alpha) = a$ in $\varphi(\beta) = b$.

D: **IZLIMITIRANI INTEGRALI:**

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$ Če limita obtaja, pravimo, da je integral konvergenten, če pa ne, je divergenten.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^r} = \frac{a}{r-1} \quad r > 1$$

D: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to a} \int_a^b f(x)dx$ Integral

$\int_a^\infty f(x)dx$ je absolutno konvergenten, če je konvergenten integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$

T: Vsak absolutno konvergenten integral je konvergenten.

T: Če je $|f(x)| \le g(x)$ in je integral

$\int_a^\infty g(x)dx$ konvergenten, potem je integral

$\int_a^\infty f(x)dx$ absolutno konvergenten.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{matrix} \alpha > 1 \Rightarrow \exists, \text{konverg} \\ \alpha \le 1 \Rightarrow \nexists, \text{nekonver} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \int_a^{a+1} \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \\ \int_{a-1}^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \alpha < 1 \Rightarrow \exists, \text{konv} \\ \alpha \ge 1 \Rightarrow \nexists, \text{nekon} \end{matrix}$$

$$\int_a^\infty f(x)dx \ \exists \wedge 0 \le g(x) \le f(x) =$$

$$\int_a^\infty f(x)dx \ \nexists \wedge 0 \le f(x) \le g(x) =$$

TRAPEZNA FORMULA:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots +\right.$$

SIMPSONOVA FORMULA:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a+h) + 2\right.$$

$$+2f(a+4h) + \ldots + 4f(a+(n-1)h$$

PLOŠČINA MED KRIVULJAMA:

$$S = \int (f(x) - g(x))dx, \ f(x) \ge g$$

DOLŽINA KRIVULJE: $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

PROSTORNINA VRTENINE: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

POVRŠINA VRTENINE:

$$S_{pl} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

TEŽIŠČE RAVNINSKEGA LIKA: $x_T = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx$

$$y_T = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx$$

PAPPUSOVI IZREKI:

$S = 2\pi y_T s = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$ Površina vrtenine, ki nastane, ko se ravninska krivulja zavrti okrog osi, ki je ne seka, je enaka produktu dolžine krivulje in poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče te krivulje.

$V = 2\pi y_T S = \pi \int_a^b y^2 dx$ Prostornina vrtenine, ki nastane, ko se ravninski lik zavrti okrog osi, ki ga ne seka, je enaka produktu ploščine tega lika in poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče.

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\|\alpha\vec{r}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{r}\|$$
$$\alpha\vec{r} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$
$$\forall \vec{a} \quad \exists(-\vec{a}): \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$$
$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$
$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$
$$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$$
$$1\vec{a} = \vec{a}$$
$$0\vec{a} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\vec{r}\|} \quad \cos\beta = \frac{y}{\|\vec{r}\|} \quad \cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{r}\|}$$ sm ko

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|\vec{r}\|^2}$$

¤ $\vec{a}, \vec{b} \ne 0$; $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta KOLINEARNA $\Leftrightarrow \exists k \cdot \vec{a} = \vec{b}$

¤ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ne 0$; $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ sta KOPLANARNI $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

D: Linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ je vsak vektor oblike $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n \quad (\alpha_i \in R)$. Vektor 0 je vedno linearna kombinacija vektorjev. **Trivialna linearna kombinacija**: Vsi koeficienti v kombinaciji so 0.

D: Vektorji $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ so LINEARNO NEODVISNI, če iz

$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ sledi $\alpha_i = 0$

D: $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

ENAČBA PREMICE:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$$
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

ENAČBA RAVNINE:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$
$$ax + by + cz = d \quad d = \vec{r} \circ \vec{n} \quad \vec{n} = (a, b, c)$$

skozi tri točke:

$$\vec{r}_A = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \vec{r}_B = \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{r}_C = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \quad d = (x, y, z)$$

$$(\vec{d} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}) = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

RAZDALJA TOČKE OD PREMICE:

$$d(T, p) = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{s}\|}$$

RAZDALJA TOČKE OD RAVNINE:

$$D(T_1, \Psi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

RAZDALJA MED DVEMA PREMICAMA:
vzporednici

$$p: \vec{r} = \vec{r}_p + t\vec{s} \qquad q: \vec{r} = \vec{r}_q + t\vec{s}$$

$$d(p,q) = \frac{\left\| \vec{s} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_q) \right\|}{\left\| \vec{s} \right\|}$$

mimobežnici

$$p: \vec{r} = \vec{r}_p + t\vec{s}_p \qquad q: \vec{r} = \vec{r}_q + t\vec{s}_q$$

$$d(p,q) = \frac{\left\| (\vec{r}_p - \vec{r}_q, \vec{s}_p, \vec{s}_q) \right\|}{\left\| \vec{s}_p \times \vec{s}_q \right\|}$$

SKALARNI PRODUKT:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi = \|\vec{a}\| \cdot \mathrm{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

$$\vec{a} \circ (\beta \vec{b}) = \beta (\vec{a} \circ \vec{b})$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

VEKTORSKI PRODUKT:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_1 \qquad \vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2,\ \vec{b}_1 \perp \vec{a},\ \vec{b}_2 \| \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\beta \vec{b}) = \beta (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$$

MEŠANI PRODUKT:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$$

$$V_{paralelpiped} = \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$$

$$V_{piramida} = \frac{1}{6} \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c},$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

$$(\alpha \vec{a}, \beta \vec{b}, \gamma \vec{c}) = \alpha\beta\gamma (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \alpha_2 (\vec{a}_2$$

Trije vektorji so koplanarni, ko je njihov mešani produkt enak 0.

VEČKRATNI PRODUKTI:

dvojni vektroski produkt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \circ \vec{c}) \circ \vec{b} - (\vec{b} \circ \vec{c}) \circ \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0$$

Lagrangeova identiteta:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \circ \vec{c} & \vec{a} \circ \vec{d} \\ \vec{b} \circ \vec{c} & \vec{b} \circ \vec{d} \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{c},\ \vec{d} = \vec{b} \Longrightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \circ \vec{b}$$

D: Realen VEKTORSKI PROSTOR V je neprazna množica V (njeni elementi so vektorji), opremljena z operacijama seštevanja in množenja s skalarjem, ki zadoščata naslednjimpogojem:

$$\forall u, v, w \in V,\ \forall \alpha, \beta \in R$$

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

$$\exists 0 \in V: \quad u + 0 = u = 0 + u$$

$$\exists (-u): \quad u + (-u) = 0 = (-u) + u$$

$$u + v = v + u$$

$$\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$$

$$1 \cdot u = u$$

D: Podmnožica U vektroskega prostora (v. pr.) V je VEKTORSKI PODPROSTOR, če je v. pr. za isti operaciji kot V.

T: Neprazna podmnožica U v. pr. V je vektorski podprostor (v. podpr.)

$$\Longleftrightarrow u, v \in U \Longleftrightarrow u + v \in U \quad \text{in} \quad u \in U$$

T:

$$\forall v \in V: 0 \cdot v = 0 \qquad -v = (-1) \cdot v$$

T: Če je U v. podpr. V, potem je

$$\forall u_i \in U,\ \alpha_i \in R \Longrightarrow \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

D: Podmnožica S v v. pr. V je OGRODJE, če je $[S] = V.$ To pomeni, da se mora dati vsak vektor iz V izraziti kot linearna kombinacija vektorjev iz S.

D: Končna množica $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ je LINEARNO NEODVISNA, če iz

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0.$$

¤ Če je S linearno neodvisna, je linearno neodvisna tudi vsaka njena neprazna podmnožica.

D: LINEARNA LUPINA podmnožice S v v. pr. V je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev iz S.

$$[S] = \{\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n : s_i \in S, \lambda_i \in$$

$$S = \{a_1, \ldots, a_n\} \Longrightarrow [S] = \{\lambda_1 a_1 + \ldots +$$

T: [S] je v. podpr. v V, $[S] \supseteq S,$ če je U v. podpr. V in

$$U \supseteq S \Longrightarrow U \supseteq [S].$$

D: Neskončna množica v v. pr. V je linearno neodvisna, če je linearno neodvisna vsaka njena končna podmnožica.

D: Podmnožica B v v. pr. V je BAZA, če je ogrodje in je linearno neodvisna hkrati.

I: V vsakem v. pr. (razen o) obstaja baza.

D: V. pr. V je končno razsežen, če ima kako končno ogrodje.

$$S = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

L: Če je S ogrodje v. pr. V in T taka podmnožica V, da lahko vsak vektor iz S izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev iz T, potem je tudi T ogrodje.

L: Če je A linearno neodvisna, S pa ogrodje v v. pr. V, je

$$|A| \leq |S| \qquad A: \{a_1, \ldots, a_m\} \quad S: \{S_1, \ldots, S_n\} \quad m \leq n$$

I: Vsak končno razsežen v. pr. V $(V \neq 0)$ ima bazo; vse baze imajo enako moč in vsako linearno neodvisno podmnožico $A \subseteq V$ lahko dopolnimo do baze.

D: DIMENZIJA ALI RAZSEŽNOST, dimV, v. pr. V je moč baze.

T: Če je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ linearno neodvisna množica v n–razsežnem v. pr., je baza.

D: Skalarni produkt na realnem v. pr. V je predpis, ki vsakemu urejenemu paru (a,b) vektorjev iz V priredi realno število $\langle a, b \rangle$, pri čemer morajo biti izpolnjeni naslenji pogoji:

$$\forall a, a_1, a_2, b \in V,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$$

$$\langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b \rangle = \alpha_1 \langle a_1, b \rangle + \alpha_2 \langle$$

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$$

$$\langle a, a \rangle \geq 0 \qquad \langle a, a \rangle = 0 \Longrightarrow a = 0$$

D: NORMA ALI DOŽINA VEKTORJA a v v. pr. V s skalarnim produktom je $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \qquad \text{trikotniška ne... neenakost}$$

$$\|a\| \geq 0, \quad \|a\| = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$$

L (Schwarz, Cauchy, Bunjakovski):

$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ Enakost velja, če sta vektorja linearno odvisna.

D: KOT MED VEKTORJEMA $a, b \in V,\ a, b \neq 0$ je tisti kot $\varphi \in [0, \pi]$, ki zadošča pogoju:

$$\cos\varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

. Če je a=0 ali b=0 pravimo, da sta vektorja pravokotna.

D: Vektorja a in b v evklidskem prostoru sta ORTOGONALNA ALI PRAVOKOTNA, če je $\langle a, b \rangle = 0.$

Množica vektorjev je ORTOGONALNA, če sta poljubna dva različna vektorja v njej ortogonalna. Mnoćica je ORTONORMIRANA, če je ortogonalna in imajo vsi njeni vektorji dožino 1.

GRAMM–SCHMIDTOV POSTOPEK: Postopek, po katerem dobimo ortogonalno ali ortonormirano bazo s popravljanjem vektorjev iz pr.

$$\lambda_a^b = \frac{\langle \vec{x}_a, \vec{y}_b \rangle}{\langle \vec{y}_b, \vec{y}_b \rangle}$$

I: V vsakem evklidskem prostoru $V \neq 0$ obstaja ortonormirana baza.

D: KOMPLEKSNI VEKTORSKI PROSTOR je mnoćica V, opremljena z operacijama seštevanja in množenja. Veljajo enaki pogoji kot za realni v. pr.

D: Unitarni prostor je kopleksen končno razsežen v pr., opremljen s skalarnim produktom. Skalarni produkt je predpis, ki vsakemu paru vektorjev $u, v \in V$ priredi kopleksno število $\langle u, v \rangle.$ Pri tem mora veljati:

$$u, u_1, u_2, v \in V,\ \alpha_1, \alpha_2 \in C$$

$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \qquad \langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \qquad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

D: Realna matrika velikosti m×n, $M_{m,n}$, je tabela oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

¤ **Stolpec**: $M_{m,1}$, **Vrstica**: $M_{1,n}$, **Kvadratna matrika**: $M_{n,n} = M_n$

¤**Diagonalna matrika**:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{bmatrix},$$

Identična matrika:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

, **Skalarna matrika**: $A = \alpha I$, **Zgornja trikotna n×n matrika** (podobno **spodnja**):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & e_{ij} & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, e_{ij} =$$

$$A, B \in M_{m,n}$$

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{m,n}$$

$$\alpha A = \alpha [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] \in M_{m,n}$$

T: $M_{m,n}$ je za zgoraj definirani operaciji vek. pr. z dim(m˙n)

Baza: $A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$; Ogrodje:

$$\{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n\}$$

Transponirana matrika matrike A je tista matrika, ki ima na mestu ij tisti element matrike A, ki je v nje na mestu ji.

$$A^T = [a_{ji}] \Longleftrightarrow A = [a_{ij}]$$

D:

$$A \in M_{i,j}, B \in M_{n,p}$$

$$AB = \left[a_{ij}\right]\left[b_{jk}\right] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j2} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j2} \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_{j2} \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad A(B+C) = A$$

$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$