Nekaj nalog iz matematike za študente kemije, januar 2010

1. Realna števila

1. Katera lasnost odlikuje množico realnih števil pred množico racionalnih števil? Navedi kak zgled iracionalnega števila.

2. Kaj je zgornja meja in kaj natančna zgornja meja podmnožice A v $\mathbb{R}$ in kako je z njenim obstojem ?

3. Kako je definirana absolutna vrednost realnega števila. Katero od števil $|x+y|$ in $|x|+|y|$ je manjše ali enako od drugega in kdaj sta enaki ?

4. Za katera realna števila x je $|x| = x$? Kdaj pa je $|xy| = |x||y|$? Katero od števil $|x+5|$, $|x|+5$ je lahko manjše od drugega in kdaj sta enaki ?

5. Kako je definiran interval ? Kakšna množica je lahko presek dveh intervalov? Kdaj je unija dveh intervalov interval ?

6. Ali za realni števili x in y iz $x^2 < y^2$ vedno sledi $x < y$? Za katera naravna števila n je sklep $x^n < y^n \Rightarrow x < y$ pravilen ?

2. Kompleksna števila

1. Kako je definirano številu $\alpha \in \mathbb{C}$ konjugirano število $\overline{\alpha}$? Kdaj je $\overline{\alpha} = \alpha$ in kdaj $\overline{\alpha} = -\alpha$?

2. Kako je definirana absolutna vrednost kompleksnega števila in kaj je njen geometrijski pomen ? Nariši množico točk $\alpha \in \mathbb{C}$, ki ustrezajo pogoju $|\alpha - i| = 1$.

3. Število $\alpha = 2 - 2i$ zapiši v polarni obliki in izračunaj α^{50}.

4. Izračunaj $\frac{1-i}{3-4i}$.

5. Naj bo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Kakšna je zveza med α^{-1} in $\overline{\alpha}$? Kdaj natančno je $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$?

6. Katero množico v kompleksni ravnini tvorijo vsi $\alpha \in \mathbb{C}$, ki zadoščajo enačbi $|\alpha - 1| = |4 + 3i|$?

7. V kakšni zvezi sta absolutni vrednosti in argumenta kompleksnih števil α in $\overline{\alpha}$? Kaj je $\alpha\overline{\alpha}$?

3. Zaporedja

1. Kdaj imenujemo zaporedje realnih števil naraščajoče in kdaj je naraščajoče zaporedje konvergentno ?

2. Kako je definirano število e ? Izračunaj $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2+1}\right)^{3n^2}$.

3. Pokaži, da je vsako konvergentno zaporedje omejeno in navedi kak zgled omejenega zaporedja, ki ni konvergentno.

4. Za katere a je zaporedje $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ konvergentno, za katere a je omejeno in kaj so njegova stekališča ?

5. Če vsak dan izhlapi 1/3 dane snovi, koliko jo ostane po 10 dneh ?

6. Kako je s konvergenco splošne geometrijske vrste in kaj je njena vsota ?

7. Kako je definirano aritmetično zaporedje, kaj je vsota njegovih prvih n členov in kdaj tako zaporedje konvergira ?

8. Naj bo zaporedje (a_n) konvergentno z limito a. Pokaži, da je potem tudi zaporedje $(a_n + \frac{1}{n})$ konvergentno. Kaj je njegova limita ? Kaj pa zaporedje $(\frac{1}{n}a_n)$?

9. Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni, (x_n) pa tako zaporedje, da je $a_n \leq x_n \leq b_n$ za vsak n. Pokaži, da je potem zaporedje (x_n) omejeno. Ali je nujno konvergentno ? Ali ima kako stekališče ?

4. Vrste

1. Kdaj imenujemo vrsto $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ konvergentno in v kakšni zvezi je to s konvergenco zaporedja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$?

2. Če vrsta $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ (s pozitivnimi členi) konvergira, pokaži, da potem konvergira tudi vrsta $a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots$.

3. Naj bo $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ konvergentna vrsta (s pozitivnimi) členi, (b_n) pa omejeno zaporedje (pozitivnih) števil. Pokaži, da je potem vrsta $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$ konvergentna.

4. Naj zaporedje (a_n) realnih števil konvergira proti 0. Pokaži, da obstaja tako podzaporedje $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$, da je $|a_{n_k}| < 2^{-k}$ za vsak k in sklepaj, da je vrsta $a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} + \ldots$ konvergentna.

5. Funkcije in odvod

1. Določi konstanto A tako, da bo funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$ zvezna.

2. Napiši definicijo funkcije $\operatorname{sh} x$, izračunaj njen odvod in nariši njen graf.

3. Napiši definicijo funkcije $\operatorname{arctg} x$, izračunaj njen odvod in nariši njen graf.

4. Kako je definirana funkcija $\operatorname{arth} x$ in kako se izraža s pomočjo logaritma ? Nariši njen graf. Kje ima kak prevoj ?

5. Kako je definiran odvod funkcije f v točki a ? Določi $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$, če je $f'(a) = A$.

6. Kako je definiran diferencial funkcije f v točki a. Za koliko (relativno) se spremeni prostornina krogle, če njen polmer povečamo za 0.1% ?

7. Rollejev in Lagrangeov izrek ter uporaba.

8. Napiši enačbo sekante parabole $y = x^2$ skozi točki $(0, 0)$ in $(1, 1)$ ter enačbo tangente v poljubni točki (ξ, ξ^2). Določi ξ tako, da bo tangenta vzporedna sekanti.

9. V kateri točki je smerni koeficient tangente na graf funkcije $y = x^3 - 3x^2$ najmanjši ? Napiši enačbo tangente v tej točki.

10. V kateri točki je normala na parabolo $y = x^2 + 1$ vzporedna premici $y = x + 7$?

11. Za funkcijo $y = x^2 e^{-x}$ izračunaj drugi odvod, določi ekstreme in prevoje ter nariši njen graf.

12. Izračunaj vse odvode funkcije $y = \sin 2x - \cos 2x$ ter nariši njen graf.

13. Izračunaj $(\ln f(x))'$ v točki $x = 1$, če je $f'(1) = 8f(1)$.

14. Izračunaj odvod funkcije $y = e^{\sin \pi x}$ in njegove ničle.

15. Čoln mora iz kraja A na levem bregu reke širine b najprej na desni breg, nato pa v kraj B na levem bregu, ki je od kraja A oddaljen a enot. Kje na desnem bregu naj pristane, da bo njegova pot najkrajša ?

16. Določi prve tri člene v razvoju funkcije $f(x) = e^{e^x}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke 0.

17. Razvij po binomski formuli $(1 - x)^{-\frac{1}{4}}$. Kje vrsta konvergira ?

18. Izračunaj s pomočjo Eulerjeve formule $e^{-\frac{\pi i}{3}}$.

6. Integral

1. Kako je definiran Riemannov integral. Izračunaj $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg} \frac{\pi i}{4n}$.

2. Po osnovnem izreku integralskega računa odvajaj funkcijo $F(x) = \int_0^x e^{\sqrt{9+t^2}}\, dt$. Koliko je $F'(4)$?

3. Določi prevoje funkcije $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2\, dt$ $(x \geq 0)$.

4. Odvajaj funkcijo $F(x) = \int_{-\operatorname{sh} x}^{\operatorname{sh} x} e^{t^2}\, dt$.

5. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, ko se krivulja $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, zavrti okrog abscisne osi.

6. Izračunaj ploščino območja med abscisno osjo in grafom funkcije $y = \frac{1}{x^2+2x+2}$.

7. Izračunaj ploščino območja med abscisno osjo in grafom funkcije $y = x\cos 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

8. Določi težišče homogenega območja, omejenega z abscisno osjo in grafom funkcije $y = \cos 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

9. Izračunaj površino vrtenine, ki nastane, ko se parabola $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, zavrti okrog abscisne osi.

10. Izračunaj dolžino loka parabole $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 1$.

11. Določi ploščino ravninskega območja med abscisno osjo in grafom funkcije $y = (a^3+1)xe^{-ax}$, $x \geq 0$, kjer je $a > 0$. Pri katerem a je ta ploščina najmanjša ?

12. Pokaži, da je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ naraščajoča, če je $f(x) > 0$ za vsak x in da je F konveksna, če je $f'(x) > 0$ za vsak x.

13. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, ko se krivulja $y = \frac{1}{x(x+1)}$, $x \geq 1$, zavrti okrog abscisne osi.

14. Osnovna ploskev telesa je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, preseki telesa z ravninami, pravokotnimi na abscisno os, pa so kvadrati (z eno stranico v ravnini x, y). Določi prostornino in *površino tega telesa.

15. Izračunaj ploščino lika, omejenega s parabolama $y = ax^2$ in $y = \sqrt{ax}$; ali je ta ploščina odvisna od a ?