1.

Množice

1.1 Uvod

Matematika je v tehniških znanostih predvsem orodje za reševanje problemov. Orodje pa mora biti najprej dosledno samo v sebi in v skladu z naravnimi zakonitostmi. Zato je med drugim naloga matematike, da gradi matematično teorijo, ki je skladna sama v sebi in navzven uporabna. Osnovo teorije postavljamo z *aksiomi.* Ker so to nedokazane trditve, se morajo skladati z naravnimi zakoni in predhodno zgrajeno teorijo. Z *definicijami* opredeljujemo nove pojme v teoriji, *izreki, leme, trditve* pa iz že dokazanih izjav gradijo nove.
Tehniko dokazovanja trditev vseh vrst nam predpisuje *izjavni račun*, ki je del *matematične logike.* Osnovno teorijo predstavlja *teorija množic.* Ta teorija je kot skelet, ki z dograjevanjem da druge teorije: *teorija števil, analiza, algebra, kompleksna analiza, verjetnostni račun, matematična statistika itd.* V vseh teh teorijah veljajo isti osnovni aksiomi, to so aksiomi, ki utemeljujejo teorijo množic. Posamezne teorije pa se razlikujejo po objektih, ki jih uporabljajo, in po namenu, ki mu služijo.
Seveda ni naš namen, da bi te teorije dosledno gradili. Ne bomo delali niti strogih aksiomatskih utemeljitev, niti natančnih dokazov posameznih izrekov. Naš namen je, da se srečamo z uporabnimi matematičnimi orodji, ki bodo reševala probleme iz tehnike. Seveda bomo pri tem poskušali spoznati pravilnost in sistematičnost zgradbe ter povezanost med posameznimi vejami. Analogija med posameznimi teorijami nas bo vodila do pravil gradnje.

1.2 Izjave

Osnova vsakega dokazovanja v matematiki je izjavni račun, ki je del matematične logike. Seveda se matematična logika razlikuje od filozofske logike. Za matematično logiko veljajo zelo stroga pravila. Oglejmo si nekaj osnovnih pojmov!

Objekti izjavnega računa so izjave.

Primeri izjav:

- Danes sije sonce.
- Kreda je bela.
- Kot α je pravi kot.
- Premici p_1 in p_2 sta vzporedni.
- Diagonali se sekata pod pravim kotom.

Izjave bomo označevali z velikimi črkami A, B, C, ... Izjave same zase so kakor besede, ki jih nismo povezali v stavke. Zato bomo tudi izjave povezovali v *stavke*. Vsaka izjava (elementarna ali sestavljena) lahko zavzame dve vrednosti:

$$\textit{pravilna } p \quad \textit{ali} \quad \textit{nepravilna } n$$

DEFINICIJA 1.21 *Izjavi A in B povežemo z operacijo konjunkcije, ki jo označujemo z $\wedge$ (in), in ima naslednje vrednosti:*

A	A	$A \wedge B$
p	p	p
n	p	n
p	n	n
n	n	n

DEFINICIJA 1.22 *Izjavi A in B povežemo z operacijo disjunkcije, ki jo označujemo z $\vee$ (ali), in ima naslednje vrednosti:*

A	A	$A \vee B$
p	p	p
n	p	p
p	n	p
n	n	n

DEFINICIJA 1.23 *Negacija izjave A je $\overline{A}$ (ne A) in ima naslednje vrednosti:*

A	$\overline{A}$
p	n
n	p

Poleg operacij vpeljemo tudi *relacije* med izjavami. Vrednost relacije "*sledi*" je popisana v naslednji tabeli:

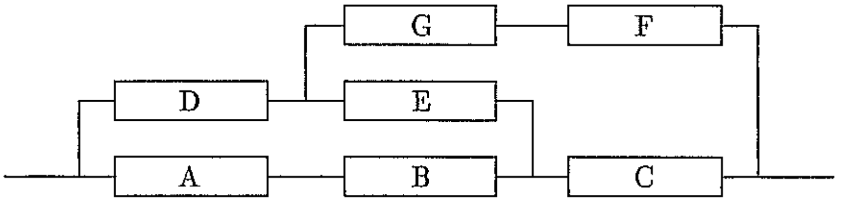
A	B	$A \Longrightarrow B$
p	p	p
n	p	p
n	n	p
p	n	n

Poleg te relacije poznamo še relacijo ekvivalence izjav:

$$A \Longleftrightarrow B$$

Naloga izjavnega računa je, da ugotavlja vrednosti posameznih sestavljenih relacij. Seveda nas v matematičnem dokazovanju zanimajo predvsem tiste relacije, ki imajo vrednost pravilna.
Seveda pa preverjanja s pomočjo izjavnega računa ne uporabljamo samo za dokazovanje v matematiki, ampak tudi na drugih povsem uporabnih območjih. Zanesljivost nekega sistema (stroja, proizvodnega procesa, cele tovarne, varnostnih elementov na stroju itd) preverjamo pogosto z drevesom odpovedi, ki ni nič drugega, kot preverjanje trditev izjavnega računa. Oglejmo si preprost primer uporabe.

- *Primer* Železniška postaja je sestavljena iz posameznih enot razvejanega progovnega sistema, kot ga kaže slika.



Slika 1.1: Shema železniške postaje

Ugotovi katere enote morajo biti prazne, da bo postaja prehodna. Postaja bo prehodna, če bo pravilna izjava:

$$\{[(A \wedge B) \vee (D \wedge E)] \wedge C\} \vee (D \wedge G \wedge F)$$

Če izraz nekoliko uredimo, dobimo izjavo:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge E \wedge C) \vee (D \wedge G \wedge F)$$

Iz te izjave vidimo, da morajo biti hkrati prehodne po tri enote, ABC ali DEC ali DGF.

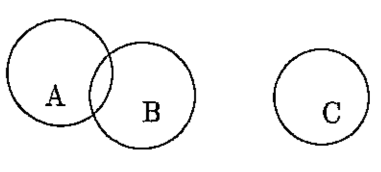
1.3 Množice

Množica je nedefiniran pojem. Predstavlja osnovne objekte v teoriji množic. Predstavimo jo z njenimi elementi, kar pa vedno ne bo mogoče. Končno množico običajno predstavimo z vsemi njenimi elementi (če elementov ni preveč), sicer pa z lastnostmi opredelimo elemente, ki so vsebovani v dani množici.

DEFINICIJA 1.31 *Dve množici sta enaki, če vsebujeta iste elemente. Množico, ki ne vsebuje nobenega elementa, imenujemo prazna množica. Označimo jo z* $\emptyset$.

Množice običajno označujemo z velikimi črkami. Če želimo posebej poudariti, da je množica sestavljena iz elementov, ki jih odlikuje neka lastnost L, bomo zapisali:

$$B = \{x | L\}$$



Slika 1.2: Vennovi diagrami

Pogosto množice ponazarjamo tudi grafično z liki, ki jih imenujemo *Vennovi diagrami.* Če je nek element a vsebovan v množici A, bomo zapisali $a \in A$.

Če a ni element množice A, pa bomo zapisali $a \notin A$. Množica A je podmnožica množice B, če je vsak element iz A vsebovan tudi v B. Z znaki bi to zapisali:

$$A \subset B \iff (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

Če je $A \subset B \wedge B \subset A$ potem je $A = B$. Med množicami je mogoče uvesti nekaj operacij.

DEFINICIJA 1.32 *Unija dveh množic je množica elementov, ki ležijo v eni ali drugi množici.*

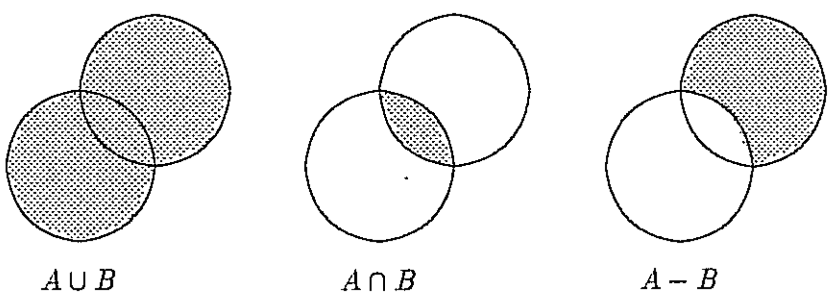
$$x \in (A \bigcup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

Presek dveh množic je množica, ki vsebuje vse elemente, ki so v obeh množicah hkrati.

$$x \in (A \bigcap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Razlika dveh množic je množica, ki vsebuje tiste elemente prve, ki jih ni v drugi množici.

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$



Slika 1.3: Unija, presek, razlika

Razliko $A - B$ imenujemo tudi *komplement množice A glede na množico B* ali kratko *komplement* in jo zapišemo:

$$C_B A = B - A.$$

Množico B v tem primeru imenujemo univerzum. V primeru, ko ni dvoma znotraj kakšne množice iščemo komplemente, znak za univerzum opuščamo. Vpeljimo še en pojem v teoriji množic. To je *kartezijski produkt* dveh množic. Vzemimo množici A in B in sestavimo kartezijski produkt:

$$A \times B = C = \{(a, b); a \in A,\ b \in B\}$$

Množica C je sestavljena iz parov elementov, iz *urejenih parov*, kjer ima vsak element določeno mesto. Dva urejena para sta enaka, če se ujemata v istoležnih komponentah.

1.4 Realna števila

Pomemben objekt matematične analize so števila, ki jih bomo označevali z latinskimi in grškimi črkami (a, b, x, A, $\alpha\ldots$). Če sta dve števili enaki, pišemo $a = b$, če sta različni, pa pišemo $a \neq b$. S števili *računamo*. Računskih operacij je več, dve pa sta osnovni. Ti dve operaciji sta *seštevanje*, ki ga pišemo $a + b$, in *množenje*, ki ga pišemo z $a.b$. Za obe operaciji sta potrebni dve števili, zato ju imenujemo *binarna* operacija. Vsaka binarna operacija, ki je v neki množici števil zaprta, priredi dvema številoma iz te množice tretje število iz iste množice.

Množica *realnih števil* R naj bo množica števil, ki jih lahko seštevamo in množimo. Za obe operaciji pa veljajo naslednje lastnosti, ki jih postavljamo kot aksiome. Za seštevanje velja:

Aksiom 1 (asociativnost) *Za poljubna tri števila a, b in c je*

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Aksiom 2 (komutativnost) *Za poljubni števili a in b je*

$$a+b = b+a$$

Aksiom 3 *Obstaja število 0 (nič). Vsota poljubnega števila a s številom nič je enaka a, torej*

$$a+0 = a$$

Aksiom 4 *Vsakemu številu a pripada nasprotno število, ki ga označimo z $-a$. Vsota števil a in $-a$ je enaka nič.*

$$a+(-a) = 0$$

Ker smemo seštevati v poljubnem vrstnem redu, oklepaje pri seštevanju običajno opuščamo. Iz navedenih aksiomov sledi *pravilo krajšanja.*

$$a+x = a+y \quad \Longleftarrow \quad x = y$$

Nasprotna operacija od seštevanja je *odštevanje. Razliko* števil a in b definiramo s pomočjo nasprotnega števila.

$$a-b = a+(-b)$$

Nasprotno število števila $-a$ je prvotno število a.

$$-(-a) = a$$

Za množenje pa veljajo naslednje lastnosti:

Aksiom 5 (asociativnost) *Za poljubna tri števila a, b in c je*

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

Aksiom 6 (komutativnost) *Za poljubni števili a in b je*

$$a.b = b.a$$

Aksiom 7 *Obstaja število 1. Produkt poljubnega števila a s številom 1 je enak a, torej*

$$a.1 = a$$

Piko kot znak za množenje običajno opuščamo.

Aksiom 8 *Vsako od nič različno število a ima recipročno število, ki ga označujemo z $\frac{1}{a}$ ali z a^{-1}. Pri tem velja:*

$$a.a^{-1} = 1$$

Operaciji seštevanja in množenja sta povezani z naslednjima dvema aksiomoma.

Aksiom 9 *1 in 0 sta različni števili* $(1 \neq 0)$

Aksiom 10 (distributivnost) *Za poljubna tri števila a, b in c velja*

$$(a + b)c = ac + bc$$

Iz aksiomov sledi pravilo krajšanja za množenje:

$$a \neq 0 \ \ in \ \ ax = ay \quad \Longrightarrow \quad x = y$$

Distributivnost velja tudi za odštevanje:

$$(a - b)c = ac - bc$$

Vsa realna števila se delijo v tri skupine: pozitivna, negativna in število nič.

Aksiom 11 *Če je število $a \neq 0$, je natanko eno izmed števil a in $-a$ pozitivno. Število nič ni niti pozitivno niti negativno.*

Aksiom 12 *Vsota $a + b$ in produkt ab pozitivnih števil a in b sta pozitivni števili. Množica pozitivnih števil je za seštevanje in množenje zaprta.*

Definirajmo še relacijo večji $>$:

$$a > b \iff a - b \text{ je pozitivno število}$$

Zakon trihotomije pravi, da vedno velja ena izmed treh možnosti:

$$1.\ a > b,\quad 2.\ a < b,\quad 3.\ a = b$$

Zakon tranzitivnosti trdi, da velja:

$$a > b \text{ in } b > c \Longrightarrow a > c$$

Za računanje z neenačbami pa za vsako število c velja:

$$a > b \Longrightarrow a + c > b + c$$

Prav tako za vsako pozitivno število c velja:

$$a > b \Longrightarrow ac > bc$$

Vse te trditve je mogoče dokazati s pomočjo definicije relacije in prej naštetih aksiomov. Običajno imenujemo relaciji $>$ in $<$ *strogo večji* in *strogo manjši*. Poleg teh dveh poznamo še relaciji *večji ali enak* $\geq$ in *manjši ali enak* $\leq$.

Naravna števila $\mathcal{N}$ so najpreprostejši del realnih števil. Sledijo si po velikosti v natanko določenem vrstnem redu.

DEFINICIJA 1.41 *Naravna števila so definirana z naslednjimi lastnostmi:*

1. *1 je naravno število.*
2. *Vsakemu naravnemu številu n sledi natanko določeno število n^+, ki ga imenujemo naslednik števila n.*
3. *Različni naravni števili imata različna naslednika.*
4. *Število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.*
5. *Vsaka množica, ki vsebuje število 1 in je v njej obenem z naravnim številom n tudi n^+, vsebuje vsa naravna števila.*

Te trditve je prvi postavil italijanski matematik G. Peano (1858-1932), zato se imenujejo *Peanovi aksiomi*. Posebno vlogo med temi aksiomi igra peti aksiom. Ta aksiom imenujemo tudi *načelo popolne indukcije* in je učinkovit pripomoček pri dokazovanju nekaterih trditev. Velja namreč:

Če neka lastnost L *med naravnimi števili velja za število 1 in iz predpostavke, da velja za število n, velja tudi za število n^+, potem velja* L *za vsa naravna števila.*

- Primeri:

1. Pokaži, da velja za vsak $n \in \mathcal{N}$ formula:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1}$$

Za $n = 1$ dobimo: $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Predpostavimo, da enakost velja za n, in dokažimo, da velja tudi za n^+. Na obeh straneh enačbe 1.1 prištejemo $n + 1$ in dobimo:

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n^+ = \frac{(n+1)(n+2)}{2} =$$

$$= \frac{n^+(n^+ + 1)}{2}$$

Vidimo, da formula velja za vsako naravno število n.

2. Dokaži, da je za vsak naravni n izraz $4^n - 3n - 1$ deljiv z 9. Pri $n = 2$ velja $4^2 - 3.2 - 1 = 9$, pri n^+ pa zapišemo:

$$4^{n+1} - 3.(n+1) - 1 = 4.(4^n - 3.n - 1) + 3.4.n + 4 - 3.n - 3 - 1$$

Ker je po indukcijski predpostavki $4^n - 3.n - 1 = 9.k$ $k \in \mathcal{N}$, je gornji izraz enak $9.k + 3.3.n = 9.(k + n)$, je torej deljiv z 9.

Naravna števila lahko seštevamo in množimo. Vsota in produkt dveh naravnih števil sta spet naravni števili. Za naravna števila veljajo aksiomi 1, 2, 5, 6, 7 in 10. Prav tako veljajo vse lastnosti relacije neenakosti.

Cela števila $\mathcal{Z}$ dobimo tako, da naravnim številom dodamo nasprotna števila in število nič. Zato je v množici celih števil poleg seštevanja in množenja mogoče tudi odštevanje.

Racionalna števila $\mathcal{Q}$ definiramo s pomočjo dveh števil. Število q je racionalno, če ga je mogoče zapisati

$$q = \frac{a}{b} \ ; \ a \in \mathcal{Z}, \ b \in \mathcal{N}$$

in zanj veljata operaciji seštevanja in množenja:

Lastnosti ulomkov

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + c.b}{b.d}$$

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

Računanje z ulomki

Enakost dveh racionalnih števil zapišemo s trditvijo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a.d = b.c$$

Ker so števila $\frac{a}{1} = a \in \mathcal{Z}$, so cela števila podmnožica racionalnih števil. V množico racionalnih števil lahko vpeljemo *operacijo deljenja:*

$$a : b = c \Longleftrightarrow b.c = a \quad a, b, c \in \mathcal{Q}$$

V množici racionalnih števil ima vsako število a recipročno število a^{-1}, ki ga imenujemo tudi *inverzno število.*

Realna števila $\mathcal{R}$ so širša množica, kot so racionalna števila. Izkaže se, da obstajajo števila, ki niso racionalna, na primer $\sqrt{2}$. Najprej vpeljemo pojem *omejene množice*:

DEFINICIJA 1.42 *M je zgornja meja množice $A \subset \mathcal{R}$, če za vsak $a \in A$ velja: $a \leq M$.*
M je natančna zgornja meja ali supremum množice A, če za vsak $a \in A$ velja $a \leq M$, vsaj za en $b \in A$ ter vsak poljubno majhen $\epsilon > 0$ pa sledi $b > M - \epsilon$.

DEFINICIJA 1.43 *m je spodnja meja množice $A \subset \mathcal{R}$, če za vsak $a \in A$ velja: $a \geq m$.*
m je natančna spodnja meja ali infimum množice A, če za vsak $a \in A$ velja $a \geq m$, vsaj za en $b \in A$ ter vsak poljubno majhen $\epsilon > 0$ pa sledi $a < m - \epsilon$.

DEFINICIJA 1.44 *Množica A je navzgor omejena natanko tedaj, ko ima realno natančno zgornjo mejo. Množica A je navzdol omejena natanko tedaj, ko ima realno natančno spodnjo mejo. Množica je omejena, kadar je hkrati omejena navzdol in navzgor.*

DEFINICIJA :

Zg. MEJA   SP. M

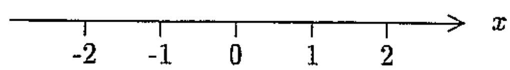
natančno zg M. + Nat. sp M ⟶ Omejena množica

Razširitev v realna števila nam omogoča *Dedekindov aksiom:*

Vsaka neprazna podmnožica realnih števil je navzgor omejena.

Vsako realno število je mogoče upodobiti kot točko na premico, in nasprotno, vsaki točki na premici ustreza eno realno število. Pravimo, da obstaja *bijektivna korespondenca* med premico in realnimi števili. Zato lahko konstruiramo *številsko premico.* Vzemimo neko premico, na njej izberemo točko, ki jo označimo z " 0 " in jo imenujemo *izhodišče.* Določimo še naslednjo točko desno od izhodišča, ki jo označimo z " 1 ". Tako smo dobili enoto in številska premica je s tem že določena.

Korespondenca
premica
⇕
$\mathbb{R}$



Slika 1.4: Številska premica

Intervali:
odprti
zaprti = odsek
polodprti

DEFINICIJA 1.45 *Množico vseh realnih števil med realnima številoma a in b imenujemo interval.* $(a, b) = \{x \in \mathcal{R};\ a < x < b\}$ *a in b sta krajišči intervala in v intervalu nista vsebovani.*

DEFINICIJA 1.46 *Interval, ki vsebuje svoji krajišči, imenujemo zaprti interval ali odsek in ga označujemo z* $[a, b]$.

Poznamo tudi polodprte intervale : $(a, b]$ in $[a, b)$.

DEFINICIJA 1.47 *Epsilonsko okolico števila a imenujemo interval*

$$(a - \epsilon, a + \epsilon),$$

kjer je ϵ *poljubno majhno pozitivno število.*

Okolica
števila

- *Primera:*

  1. *Poišči okolico števila 6, ki bo imela premer* $\frac{2}{1000}$.
     To je okolica: $(6 - \frac{1}{1000}, 6 + \frac{1}{1000}) = (5.999, 6.001)$
  2. *Kolik je polmer okolice števila 2, ki vsebuje* $\sqrt{2}$*?*
     $|2 - \sqrt{2}| < 2 - 1.5 = 0.5 = \epsilon$

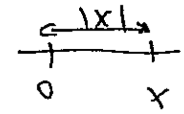
Primeri: 3 Stroj polni 100 gramske stekleničke z zdravili. Dopustna napaka je 8 mg. Izračunaj okolico dopustne tolerance.

4. Okolica števila $\sqrt{73}$ naj bo taka, da vsebuje najbližje celo število. Izračunaj polmer te okolice.

Absolutna vrednost realnega števila. V množico realnih števil vpeljemo *normo*, to je absolutno vrednost.

Oddaljenost števila x na štev. premici!

DEFINICIJA 1.48 *Absolutno vrednost realnega števila x zaznamujemo z $|x|$ in jo definiramo:*



$$|x| = \begin{cases} x, & za \quad x \geq 0 \\ -x, & za \quad x < 0 \end{cases}$$

Za tako definirano absolutno vrednost velja:

IZREK 1.41 *Za absolutno vrednost realnega števila veljajo naslednje lastnosti:*

1. $|x| \geq 0$ *za vsak realen* x *in* $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $|x.y| = |x|.|y|$
3. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ *(trikotniška neenakost)*

Dokaz:
Ker je $|-x| = |x|$ za vsak x, potem velja tudi ocena: $-|x| \leq x \leq |x|$. Če seštejemo oceno za x in za y, potem dobimo: $-(|x| + |y|) \leq (x + y) \leq (|x| + |y|)$, kar pomeni $|x + y| \leq |x| + |y|$. ■

Razširitev realnih števil. Množico realnih števil razširimo z dvema številoma: ∞, $-\infty$

$$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

Lastnosti razširitve:

$$\begin{array}{cc} \infty + r = \infty & \infty.r = \infty, \ r \neq 0 \\ \infty - r = \infty & \frac{\infty}{r} = \infty \\ \frac{r}{\infty} = 0 & \frac{r}{0} = \infty, \ r \neq 0 \end{array}$$

Izrazi:

$$\frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0}, \ 0.\infty, \ \infty - \infty, \ 1^{\infty}, \ 0^0, \ \infty^0$$

so nedoločeni, kar pomeni, da lahko zavzamejo prvi štirje izrazi poljubno realno vrednost, zadnji trije pa poljubno nenegativno (≥ 0) vrednost.

Primeri: Določi vrednost izraza $|x-2|+|x+1|-|x| = y$ ali nariši graf funkcije.

Reši neenačbo $||2x-1|-3x| > 4$

zakaj? $\sqrt{-1} = ?$

1.5 Kompleksna števila

Množica realnih števil v mnogih primerih povsem zadošča. Ima pa vendarle nekatere pomanjkljivosti. V tej množici ni rešljiva enačba $x^2 + 1 = 0$. Zato iščemo razširitev množice števil v množico, ki bo vsebovala tudi rešitve take enačbe in njej podobnih. Rešitev gornje enačbe, to je $\sqrt{-1}$, razglasimo za *imaginarno enoto* in jo označimo z i. Potem sestavimo množico urejenih parov realnih števil:

kompleksna

$$(x, y) = x + iy = \alpha \; ; \; x, y \in \mathcal{R}$$

$(x, y) = x + iy$

Števila bomo imenovali *kompleksna števila*, množico kompleksnih števil pa bomo označevali s $\mathcal{C}$. Kompleksna števila običajno pišemo z grškimi črkami. x imenujemo *realna komponenta*, y pa *imaginarna komponenta*. Predno definiramo operacije med kompleksnimi števili, si poglejmo še potence imaginarne enote:

$i = ?$

$$i^2 = -1 \; , \; i^3 = -i \; , \; i^4 = 1 \; , \; i^5 = i \; , \; itd$$

operacije $\mathbb{R}$

Definirajmo operacije med kompleksnimi števili.

operacije

DEFINICIJA 1.51

$$0 = (0, 0) \tag{1.2}$$

$$\alpha + \beta = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{1.3}$$

$$\alpha.\beta = (a + ib).(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{1.4}$$

Lastnosti operacij $\mathbb{R}$

$\Downarrow$

lastnosti operacij $\mathbb{C}$

TRDITEV 1.51 *Za operaciji seštevanja in množenja veljajo lastnosti komutativnosti, asociativnosti in distributivnosti:*

$$\begin{array}{ll} \alpha + \beta = \beta + \alpha & \alpha.\beta = \beta.\alpha \\ \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma & \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \\ \alpha + 0 = \alpha & \alpha.1 = \alpha \\ (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma & \end{array}$$

Definirajmo še konjugirano število h kompleksnemu številu α.

Posebnost: Konjugirano $\mathbb{C}$-število

DEFINICIJA 1.52 *Vsakemu kompleksnemu številu $\alpha = x + iy$ lahko priredimo konjugirano število $\overline{\alpha} = \overline{x + iy} = x - iy$, za katerega veljajo naslednje lastnosti:*

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha \tag{1.5}$$

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \tag{1.6}$$

$$\overline{\alpha.\beta} = \overline{\alpha}.\overline{\beta} \tag{1.7}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \tag{1.8}$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
prava podmnožica

Vsota kompleksnega in konjugiranega kompleksnega števila je realno število $\alpha + \overline{\alpha} = 2x \in \mathcal{R}$, razlika leteh pa je čisto imaginarno število $\alpha - \overline{\alpha} = 2yi \in i\mathcal{R}$. Oglejmo si nekaj primerov računanja s kompleksnimi števili:

$$(3+4i) + (2-7i) = 5 - 3i$$
$$(3+4i).(2-7i) = (5+28) + i(8-21) = 33 - 13i$$
$$\overline{(3+4i)} = 3 - 4i$$
$$\frac{2+3i}{2-i} = \frac{2+3i}{2-i}.\frac{2+i}{2+i} = \frac{1+8i}{5}$$

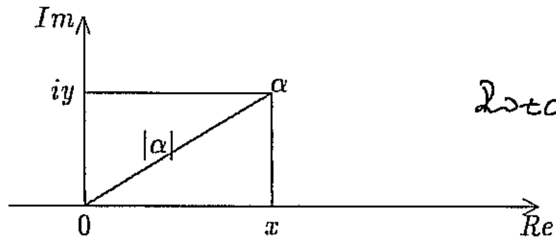
Če je imaginarna komponenta v kompleksnem številu enaka 0, potem dobimo realno število. Zato lahko trdimo:

IZREK 1.51 *Množica realnih števil je prava podmnožica množice kompleksnih števil.*

Absolutna vrednost kompleksnega števila je pozitivni kvadratni koren produkta $\alpha.\overline{\alpha}$:

$$|\alpha| = +\sqrt{\alpha.\overline{\alpha}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Realna števila smo bijektivno preslikali na številsko premico. Kompleksna



Razdalja od koord. izhodišča
0

Slika 1.5: Kompleksna ravnina

števila so sestavljena iz urejenih parov, zato jih bomo bijektivno preslikali v *kompleksno ravnino.* Pravokotno postavimo dve številski premici, ki se sekata v izhodišču. Vodoravno premico imenujemo *realna os*, navpično pa *imaginarna os.* Poljubna točka v ravnini predstavlja kompleksno število. Kot vidimo na sliki 1.5, lahko kompleksna števila tudi grafično seštevamo.

IZREK 1.52 *Za absolutno vrednost kompleksnega števila veljajo naslednje lastnosti:*
$|\alpha| \geq 0$ *in* $|\alpha| = 0$, *če je* $\alpha = 0$

$$|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$$

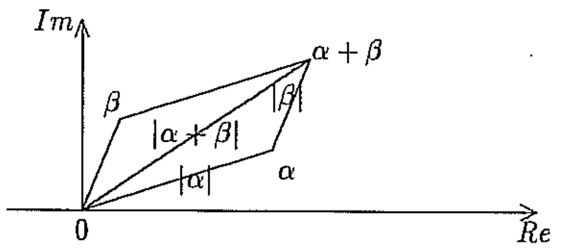
$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Dokaz: Vsak pozitivni koren je večji ali enak nič. Koren bo enak nič le v primeru $x = y = 0$, torej, ko je $\alpha = 0$.

$$|\alpha.\beta| = \sqrt{(\alpha.\beta).\overline{(\alpha.\beta}} =$$

$$= \sqrt{(\alpha.\overline{\alpha}).(\beta.\overline{\beta})} = |\alpha|.|\beta|$$

Za dokaz tretjega dela trditve si bomo pomagali s sliko. ■



Slika 1.6: Dokaz trikotniške neenakosti

- *Primer:* Izračunaj absolutno vrednost $\alpha = 3 - 4i$

$$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Polarni zapis kompleksnega števila. Poleg običajne oblike zapisa kompleksnega števila poznamo tudi polarni zapis. Naj bo $\alpha = x + iy$. Kot med realno osjo in zveznico med izhodiščem in točko, ki predstavlja v kompleksni ravnini število α, označimo z φ. Potem lahko zapišemo:

$$x = |\alpha|. \cos\varphi, \quad y = |\alpha|. \sin\varphi$$

V skladu s tem se kompleksno število potem zapiše:

$$\alpha = x + iy = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

in veljajo zveze:

$$|\alpha|^2 = x^2 + y^2 \ , \ \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

Kotu φ pravimo *argument kompleksnega števila* in ga pišemo $\varphi = arg\,\alpha$. S

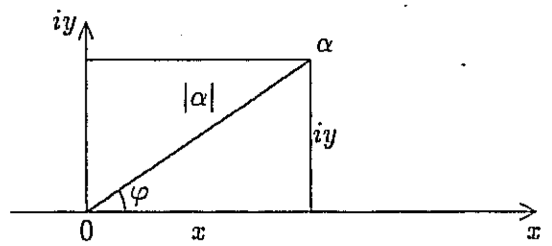
S sliko pridemo do polarnega zapisa!

Polarni zapis

Eksponentna
Množenje
in deljenje

Moivre
Korenjenje

Reševanje
enačb



Slika 1.7: Polarni zapis kompleksnega števila

pomočjo tega zapisa precej poenostavimo množenje in deljenje kompleksnih števil. Naj bo $\alpha = |\alpha|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $\beta = |\beta|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

$$\alpha.\beta = |\alpha|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).|\beta|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |\alpha||\beta|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|\beta|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{|\alpha|}{|\beta|}.(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Tudi potenciranje lahko izvajamo preprosteje s pomočjo *Moivrove formule:*

$$\alpha^n = |\alpha|^n.(\cos n\varphi + i.\sin n.\varphi) \tag{1.9}$$

Formulo dokažemo z indukcijo:
Za $n = 1$ formula očitno velja, saj je to samo definicija polarnega zapisa.
Predpostavimo, da enakost velja za n, in dokažimo, da velja tudi za $n + 1$:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n.\alpha = |\alpha|^n.|\alpha|(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi)(\cos\varphi + i.\sin\varphi) =$$

Upoštevamo še adicijske izreke za trigonometrične funkcije in dobimo:

$$= |\alpha|^{n+1}.(\cos(n+1)\varphi + i.\sin(n+1)\varphi)$$

- *Primera:*

  1. Naj bo $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Prepričaj se, da α ustreza enačbi $\alpha^3 = 1$ in da velja enakost :

  $$(x + y + z)(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

pri čemer so x, y, z poljubna realna števila.

$$|\alpha| = 1, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\alpha^3 = \cos 2\pi + i.\sin 2\pi = 1$$

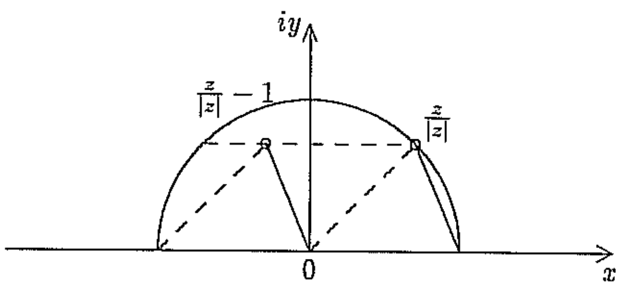
$$(x+y+z)(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x+\alpha^2 y+\alpha z) = x^3+y^3+z^3+3\alpha(1+\alpha)xyz$$
$$+(1+\alpha+\alpha^2)(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$$

pri čemer je $\alpha(1+\alpha) = -1$.

2. S pomočjo geometrijske interpretacije dokaži:

$$|\frac{z}{|z|} - 1| \leq \arg z$$

$\frac{z}{|z|}$ leži na enotskem krogu. Če ga za 1 premaknemo v levo, leži nekje znotraj enotskega kroga. Razdalja od izhodišča je zaradi skladnih trikotnikov enaka tetivi. Tetiva pa je vedno krajša od loka, ki na enotskem krogu predstavlja argument kompleksnega števila.



Slika 1.8: Rešitev naloge

1.6 Naloge

1. Z Venovimi diagrami načrtaj množice, ki zadoščajo naslednjim pogojem: $A \neq C$, $B \cap C = \emptyset$, $B \cap A \neq \emptyset$

2. S pomočjo lastnosti množic dokaži:
(a) $A - (A \cap B) = A - B$ (b) $(A \cap B) - B = \emptyset$

3. Določi $A \cup B$, če je $A = \{3n - 7\}$ in $B = \{2n + 5\}$.

4. Naj bodo $A = (0,2)$, $B = (1,5)$ in $C = [4,10]$ intervali. Določi $A \cup B$, $B \cap C$, $(a \cup B) \cup C$, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ in $(A \cap B) \cap C$.

5. S popolno indukcijo dokaži, da za vsak naravni n velja:
(a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$
(b) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ za $x \geq -1$
(c) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$
(d) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

6. Dokaži, da $\sqrt{2}$ in $\sqrt{3}$ nista racionalni števili.

7. Reši neenačbo : $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$.

8. Reši neenačbe:

$$|x-2| < 3$$

$$||2x-1| - 3x| > 4$$

$$|x^2 + 4x + 3| > 1$$

$$|x^2 - 1| + |x^2 + 1| < 2$$

9. Izračunaj vse mogoče izraze $||x+1| - |x-2| + |x|| =$.

10. Izračunaj i^3, i^9, i^7, i^{26}, i^{1991}.

11. Izračunaj $\frac{1}{i}$, $\frac{1-i}{1+i}$, $(1 + i\sqrt{3})^3$.

12. Reši enačbo $\bar{z} = z^{n-1}$ ($n \neq 2$, naravno število).

13. Reši enačbi: $z^4 + 1 = 0$ in $z^3 + 2 - 2i = 0$.

14. Določi geometrijsko mesto točk v ravnini, podano z neenačbo:

$$1 < |z-1| < 3$$

Reši še enačbi:

$z^3 + 2 + 2i = 0$

$z^4 - i = 0$