MATEMATIKA I

/rd/	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
/°/	0	30	45	60	90	180	270
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0

NEDOLOČENI IZRAZI:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, 1^{\infty}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1; x < 0 \\ 0; x = 0 \\ 1; x > 0 \end{cases}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin\alpha$$

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$$

$$tg(k\pi \pm \alpha) = \pm tg\alpha$$

$$ctg(k\pi \pm \alpha) = \pm ctg\alpha$$

$$\sin(k2\pi \pm \alpha) = \pm \sin\alpha$$

$$\cos(k2\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \pm \sin\alpha$$

$$tg(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp ctg\alpha$$

$$ctg(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \mp tg\alpha$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

$$ctg 3\alpha = \frac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3tg^2\alpha - 1}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

EULERJEVE FORMULE:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad e^{k2\pi i} = 1; k \in Z$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = -\operatorname{sh}(ix)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \cos x = \operatorname{ch}(ix)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$$

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$$

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

$$|z - w| \geq ||z| - |w||$$

$$|z + w| \geq |z| - |w|$$

$$z = a + bi$$

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + k\pi, k = 0,1,2$$

$$a = 0, b > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$a = 0, b < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$a > 0, b = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$a < 0, b = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi_z + \varphi_w) + i \cdot \sin(\varphi_z + \varphi_w))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\varphi_z - \varphi_w) + i \cdot \sin(\varphi_z - \varphi_w))$$

$$z^{-1} = |z|^{-1} \cdot (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$$

MOIVREOVA FORMULA:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

$$x^n - z = 0$$

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) = x_1 \cdot \omega^k$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

$$x_1 = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi}{n}\right) \quad \text{primitivni kore ne note}$$

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (k - r)!} \qquad n \in N$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!} \qquad r \in R$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C} = 1 \quad C > 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to 0}\left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

DIVERGENTNE VRSTE:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

KONVERGENTNE VRSTE:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\quad k>1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^k}\quad k>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a q^n\quad |q|<1, a\neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

TAYLORJEVE VRSTE:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \forall x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad \forall x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad \forall x$$

$$\operatorname{sh}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}\cdot x^n\quad x\in(-1,1), r\in R$$

$$(a+b)^r = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}\cdot a^{r-n}\cdot b^n\quad |a|>|b|$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad x\in(-1,1)$$

GEOMETRIJSKA VRSTA:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a\cdot q^n\qquad s_n=\begin{cases} a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}, |q|>1, a\neq 0\\ n\cdot a, q=1, a\neq 0\end{cases}$$

$$s=\frac{a}{1-q}, |q|<1, a\neq 0$$

ODVODI:

$(kx+n)'=k$

$(C)'=0$

$(C\cdot f)'(x)=C\cdot f'(x)$

$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)'(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$

$(f_1\cdot\ldots\cdot f_n)'=f_1'\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n+$
$\quad f_1\cdot f_2'\cdot f_3\cdot\ldots\cdot f_n+\ldots+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n'$

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}; n\in R$

$(a^x)'=a^x\cdot \ln a; a>0$

$(a^x)^{(n)}=a^x\cdot \ln^n a; a>0$

$(e^x)'=e^x$

$x=e^{\ln x}$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(\ln x)^{(n)}=\frac{(n-1)!}{x^n}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(shx)'=chx$

$(chx)'=shx$

$(thx)'=\frac{1}{ch^2 x}$

INTEGRALI:

$\int (f\pm g)dx=\int f dx\pm\int g dx$

$\int C\cdot f dx=C\cdot\int f dx$

$\int u\,dv=uv-\int v\,du$ PERPARTES

$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

$\int\frac{f'}{f}dx=\ln|f|+C$

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C; n\neq 1$

$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

$\int e^x dx=e^x+C$

$\int a^{kx} dx=\frac{a^x}{k\cdot\ln a}+C$

$\int e^{kx} dx=\frac{1}{k}e^x+C$

$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

$\int \cos x\,dx=\sin x+C$

$\int shx\,dx=chx+C$

$\int chx\,dx=shx+C$

$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$

$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$

$\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$

$$\int \frac{p^{(n)}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = q^{(n-1)}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{T^{(2n-3)}(x)}{(x^2+px+q)^{n11}} + \int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx$$

$$\int \frac{S^{(m)}(x)}{(x-k)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, m<n : x-k=\frac{1}{t}$$

$$\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad a<c<b$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

MNOŽICE

¤ Med vsakima dvema racionalnima številoma je še eno racionalno število: med $a,b\in Q, a\neq b$, je $\frac{a+b}{2}$.

¤ N, Z in Q je enako mnogo, iracionalnih in R pa je več.

¤ Iracionalnih števil ne moremo zapisati v zaporedje.

¤ R zasedejo celo številsko premico, C pa so točke na ravnini.

¤ $\nexists x\in R : x^2 = -1$

D: $A\subseteq R$ je **NAVZGOR OMEJENA**, če $\exists M\in A \Rightarrow x\leq M, \forall x\in A$. Tak M je **ZGORNJA MEJA**. **SUPREMUM** (natančna zgornja meja) je najmanjša med zgornjimi mejami navzgor omejene A.

D: $A\subseteq R$ je **NAVZDOL OMEJENA**, če $\exists m\in A \Rightarrow x\geq m, \forall x\in A$. Tak m je **SPODNJA MEJA**. **INFIMUM** (natančna spodnja meja) je največja med spodnjimi mejami navzdol omejene A.

¤ A je navzdol omejena, če je –A navzgor omejena. $-A=\{-x : x\in A\}$ $\inf A = -\sup(-A)$

D: A je **OMEJENA**, če je omejena navzgor in navzdol.

¤ Če je A omejena, je vsebovana v zaprtem intervalu. $A\subset[m,M]$.

AKSIOM O ZGORNJI MEJI: Vsaka neprazna navzgor omejena množica realnih števil A ima v R supremum.

¤ $\forall a,n\in R, a>0, \exists x\in R : x^n = a$

OSNOVNI IZREK ALGEBRE: Vsaka enačba $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ $(a_i\in C, a_n\neq 0)$ ima eno rešitev.

ZAPOREDJA IN VRSTE

D: Zaporedje $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je **NARAŠČAJOČE / PADAJOČE**, če je $a_{n+1} \geq a_n$ / $a_{n+1} \leq a_n, \forall n = 1,2,\ldots$ Zaporedje je **STROGO NARAŠČAJOČE / STROGO PADAJOČE**, če je $a_{n+1} > a_n$ / $a_{n+1} < a_n, \forall n = 1,2,\ldots$

D: Zaporedje $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je **NAVZGOR / NAVZDOL OMEJENO**, če je taka množica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

D: Število a je **LIMITA** zaporedja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, če je izven vsakega odprtega intervala (a–ε,a+ε) (ε>0) le končno mnogo členov zaporedja. $a = \lim_{n \to \infty} a_n \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

D: Zaporedje, ki ima limito, je **KONVERGENTNO**, zaporedje, ki nima limite, pa **DIVERGENTNO**.

D: Število s je **STEKALIŠČE** zaporedja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, če je v vsakem intervalu (s–ε,s+ε) (ε>0) neskončno mnogo členov zaporedja.

T: Vsako navzgor / navzdol omejeno naraščajoče / padajoče zaporedje realnih števil (a_n) je konvergentno, njegova limita je $\sup(a_n)$ / $\inf(a_n)$. Vsako monotono omejeno zaporedje R (a_n) je konvergentno.

D: Strogo naraščajoča in padajoča zaporedja imenujemo **MONOTONA**.

T: Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.

I: Vsako omejeno zaporedje realnih števil (a_n) ima vsaj eno stekališče.

D: Zaporedje (a_n) je **CAUCHYJEVO**, če za $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon)$.

I: Zaporedje $(a_n) \subseteq R$ je konvergentno natanko takrat, ko je Cauchyjevo.

L: Vsako Cauchyjevo zaporedje je omejeno.

T: (a_n), (b_n) sta konvergentni.

$$a = \lim_{n \to \infty}(a_n), b = \lim_{n \to \infty}(b_n)$$

$$\lim_{n \to \infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n \to \infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}; b_n, b \neq 0$$

D: Vrsto (v) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ imenujemo **KONVERGENTNO**, če je konvergentno zaporedje njenih delnih vsot. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n$. Če zaporedje delnih vsot ne konvergira, je vrsta **DIVERGENTNA**.

¤ Geometrijska vrsta $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ $(a \neq 0)$ je konvergentna natanko takrat, ko je $q \in (-1,1)$.

¤ Zaporedje delnih vsot (s_n) je konvergentno, če je Cauchyjevo ($(\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon)$).

T: **CAUCHYJEV KRITERIJ**: Vrsta $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ je konvergentna $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in N)(n, m > n_\varepsilon \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon)$.

¤ Če je vrata $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ konvergentna, potem je $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

D: Vrsta $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ je **ABSOLUTNO KONVERGENTNA**, če je konvergentna vrsta $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$. Konvergentna vrsta, ki ni absolutno konvergentna, je **POGOJNO KONVERGENTNA**.

T: Vrsta $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ je absolutno konvergentna
$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists n_\varepsilon\in N)(n>m>n_\varepsilon \Rightarrow |a_{m+1}|+|a_{m+2}|+\ldots+|a_n|<\varepsilon$.

T: Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

D: [(v_1): $a_1+a_2+\ldots$; (v_2): $b_1+b_2+\ldots$] Vrsta (v_2) je **MAJORANTA** za vrsto (v_1), če je $|a_n|\le|b_n|\forall n$. Tedaj je (v_1) **MINORANTA** za (v_2).

T: **PRIMERJALNI KRITERIJ**: Če konvergira vrsta absolutno, potem konvergira absolutno tudi vsaka njena minoranta. Če vrsta divergira, divergira tudi vsaka njena majoranta.

T: **KVOCIENTNI ALI D'ALAMBERTOV KRITERIJ**: Predpostavimo, da $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=d$. Če je d<1, potem vrsta $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ konvergira absolutno. Če je d>1, vrsta $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ divergira.

T: **KORENSKI ALI CAUCHYJEV KRITERIJ**: Predpostavimo, da $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=c$. Če je c<1, vrsta $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ konvergira absolutno. Če je c>1, potem vrsta $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ divergira.

D: **ALTERNIRAJOČA VRSTA** je vrsta, katere členi izmenjujejo predznak: $a_1-a_2+a_3-\ldots$ ali $-a_1+a_2-a_3+\ldots$ ($a_n\ge 0$).

T: **LEIBNITZOV KRITERIJ**: Če v alternirajoči vrsti $a_1-a_2+a_3-\ldots$ čelni $a_n\ge 0$ padajo proti 0 ($a_{n+1}\le a_n\forall n$ in $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$), potem je vrsta (pogojno) konvergentna.

FUNKCIJE, ODVOD, TAYLORJEVA VRSTA, INTEGRAL IN KRIVULJE

D: **FUNKCIJA** $f:D\to R$ je predpis, ki vsakemu $x\in D$ priredi točno določen element $f(x)\in R$.

D: $\mathrm{Graf}(f)=\{(x,f(x));x\in D\}$

D: **ZALOGA VREDNOSTI** funkcija f je $R_f=\{f(x);x\in D\}$.

D: Funkcija $f:D\to R$ je **SURJEKTIVNA**, če je $R_f=R$, se pravi če je vsak $y\in R$ slika kakega $x\in D$. Vsaka vzporednica z osjo x seka graf funkcije f. <u>Funkcija $f:D\to A\subseteq R$ je surjektivna, če je $\forall f(x)\in A$ slika vsaj enega $x\in D$.</u>

D: Funkcija $f:D\to R$ je **INJEKTIVNA**, če velja: $x_1,x_2\in D; x_1\ne x_2\Rightarrow f(x_1)\ne f(x_2)$. Če $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Vsaka vzporednica z osjo x seka graf funkcije f kvečjemu enkrat. <u>Funkcija $f:D\to A\subseteq R$ je injektivna, če je $\forall f(x)\in A$ slika kvečjemu enega $x\in D$.</u>

D: Funkcija $f:D\to R$ je **BIJEKTIVNA**, če je injektivna in surjektivna.

D: **KOMPOZITUM** $g\circ f$ je definiran kot $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. Ni komutativen, je pa asociativen.

D: **IDENTIČNA PRESLIKAVA (IDENTITETA)** na množici D vsak x preslika samega vase.
$i_D(x)=x$

D: **KONSTANTNA PRESLIKAVA** je: $f(x)=\alpha\in R;\forall x\in D$.

D: **INVERZNA PRESLIKAVA** injektivne funkcije f, f^{-1}, je definirana kot $f^{-1}:A\to D$. $\forall y\in A$ preslika v tisti $x\in D$, ki ga f preslika v y. $f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f(x)=y$.

D: Funkcija f je **(NAVZGOR, NAVZDOL) OMEJENA**, če je taka njena zaloga vrednosti.

¤ f je **NAVZGOR OMEJENA** $\Leftrightarrow \exists M\in R: f(x)\le M,\forall x\in D$

¤ f je **NAVZDOL OMEJENA** $\Leftrightarrow \exists m\in R: f(x)\ge m,\forall x\in D$

¤ f je **OMEJENA**, če je omejena navzgor in navzdol.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **(STROGO) NARAŠČAJOČA**, če $x_1, x_2 \in D; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq (<) f(x_2)$.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **(STROGO) PADAJOČA**, če $x_1, x_2 \in D; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq (>) f(x_2)$.

D: Funkcija $f: D \to R$ je **SODA / LIHA**, če je za $\forall x \in D$ tudi $-x \in D$ in je $f(-x) = f(x)$ / $f(-x) = -f(x)$. Funkcija f je soda, če je njen graf simetričen glede na os y. Funkcija f je liha, če je njen graf simetričen glede na koordinatno izhodišče.

D: $f: D \to R$; $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

T: Vsota, razlika, produkt in kvocient dveh sodih funkcij ter produkt in kvocient dveh lihih funkcij je soda funkcija. Vsota in razlika dveh lihih funkcij je liha funkcija.

D: $\alpha \in R$ je **NIČLA** funkcije f, če je $f(\alpha) = 0$. V tej točki seka graf funkcije f os x.

D: V $\alpha \in R$ je **POL** funkcije f, če je $\lim_{x \to \alpha} |f(x)| = \infty$. $(\forall M \in R)(\exists \delta > 0)(|x - \alpha| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$

D: $f: D \to R$, $a \in D$. Funkcija f je **ZVEZNA V TOČKI a**, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Funkcija f je **ZVEZNA**, če je zvezna za vsak $a \in D$ ($(\forall \varepsilon > 0)(\forall a \in D)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$).

T: Funkcija $f: D \to R$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko takrat, ko za vsako zaporedje $(x_n) \subseteq D$, ki konvergira proti a, konvergira zaporedje $(f(x_n))$ proti f(a).

T: Vsota, razlika in produkt zveznih funkcij so zvezne funkcije. Kvocient dveh zveznih funkcij je zvezen v točkah a, kjer $g(a) \neq 0$. Kompozitum dveh zveznih funkcij je zvezna funkcija.

T: I, J sta intervala, $f: I \to J$ je zvezna bijekcija. Potem je f strogo monotona (strogo naraščajoča ali strogo padajoča), njena inverzna funkcija pa je tudi zvezna in strogo monotona.

D: $b = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$.

ASIMPTOTE:

<u>vodoravna</u>: $y = b; b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

<u>navpična</u>: $x = a; \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

<u>poševna</u>: $y = kx + n; \lim_{x \to \pm\infty} [kx + n - f(x)] = 0 \Rightarrow k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$

T: Naj bo $f: [a, b] \to R$ zvezna, a<b, $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Potem $\exists c \in [a, b]: f(c) = 0$. (**METODA BISEKCIJE**)

T: Zvezna funkcija je na zaprtem intervalu omejena.

T: $f: [a, b] \to R$, zvezna, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$. Potem $\exists x_M \in [a, b]: f(x_M) = M$ in $\exists x_m \in [a, b]: f(x_m) = m$, da za $(\forall c \in [m, M])(\exists x_c \in [a, b]: f(x_c) = c)$.

T: Če je $f: [a, b] \to R$ injektivna zvezna funkcija, potem je f bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča; če $f: [a, b] \to [c, d]$, potem je inverzna preslikava $f^{-1}: [c, d] \to [a, b]$ tudi zvezna in strogo monotona.

D: $D \subseteq R, f: D \to R$. Funkcija f je **ENAKOMERNO ZVEZNA** na D, če $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in D)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

¤ Vsaka enakomerno zvezna funkcija je zvezna.

T: Vsaka zvezna funkcija $f:[a,b]\to R$ je na zaprtem intervalu [a,b] enakomerno zvezna.

D: **ODVOD** funkcije f v točki x_0 je

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{dy}{dx}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x=x_0}=tg\varphi=k_T$$

¤ Geometrijsko je odvod smerni koeficient tangente na graf funkcije.

D: Funkcija f je v točki x_0 **ODVEDLJIVA**, če $\exists\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

T: Naj bosta f in g odvedljivi funkciji. Potem so odvedljivi tudi vsota, razlika, produkt in kvocient (kjer g ni nič).

$$(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \quad \text{Leibnitzovo pravilo}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2};g(x)\neq 0$$

T: Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.

T: f in g sta odvedljivi funkciji. $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx};u=g(x),y=f(u)$$

T: f je odvedljiva in bijektivna ter $f'(x)\neq 0,\ \forall x\in D$. Potem je f^{-1} tudi odvedljiva in velja:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

P: Če je $f:(a,b)\to R$ taka, da je $f'(x)=0,\ \forall x\in(a,b),$ potem je f konstantna.

VIŠJI ODVODI: $f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

D_f in obnašanje na robovih; ničle; f(0); f' (intervali naraščanja in padanja, ekstremi); f'' (intervali konveksnosti in konkavnosti, prevoji)

KANDIDATI ZA EKSTREME:

– ničle f'
– krajišča intervala
– točke, kjer f ni odvedljiva

$f(x)=g(x)$ na I
$f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)-g(x)=C$ na I

$$f(a+h)\doteq f(a)+f'(a)\cdot h$$

T: Če je $f'(x_0)>0,$ funkcija v bližini točke x_0 narašča, če pa je $f'(x_0)<0,$ pa pada.

D: V točki x_m je **LOKALNI MINIMUM** funkcije f, če $\exists\delta>0: f(x_m)\leq f(x)\forall x\in(x_m-\delta,x_m+\delta)$.
V točki x_M je **LOKALNI MAKSIMUM** funkcije f, če $\exists\delta>0: f(x_M)\geq f(x)\forall x\in(x_M-\delta,x_M+\delta)$.

T: Če je v točki x_0 **LOKALNI EKSTREM** odvedljive funkcije f, potem je $f'(x_0)=0$.

D: Točka x_0 je **STACIONARNA** za funkcijo f, če je $f'(x_0)=0$.

T: x v bližini x_0. Če je za $x<x_0$ $f'(x)<f'(x_0)$ za $x>x_0$ pa $f'(x)>f'(x_0)$, je to lokalni minimum. Če pa je za $x<x_0$ $f'(x)>f'(x_0)$ za $x>x_0$ pa $f'(x)<f'(x_0)$, je to lokalni maksimum.

T: f, f' in f'' so zvezne funkcije. Če je $f'(x_0)=0$ in $f''(x_0)<0$, potem je v x_0 lokalni maksimum.
Če je $f'(x_0)=0$ in $f''(x_0)>0$, potem je v x_0 lokalni minimum.

T: $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0,\ldots,f^{(m)}(x_0)=0, f^{(m+1)}(x_0)\neq 0, f^{(m+1)}$ je zvezna funkcija. Če je m+1 liho število, potem v točki x_0 ni ekstrema. Če pa je m+1 sodo število, je v točki x_0 lokalni ekstrem, in sicer minimum, če je $f^{(m+1)}(x_0)>0,$ ali maksimum, če je $f^{(m+1)}(x_0)<0.$

ROLLEJEV IZREK: Naj bo $f:[a,b]\to R$ zvezna funkcija in odvedljiva na (a,b). Če je $f(a)=f(b)$, potem $\exists\xi\in(a,b)$, da je $f'(\xi)=0$.

LAGRANGEOV IZREK: Naj bo $f:[a,b]\to R$ zvezna funkcija in odvedljiva na (a,b). Potem $\exists\xi\in(a,b)$, da je $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

L'HOPITALOVO PRAVILO: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $f(a)=g(a)=0$. Velja tudi za $|f(a)|=|g(a)|=\infty$.

D: Funkcija $f:[a,b]\to R$ je **KONVEKSNA**, če za $x_1<x<x_2$ iz [a,b] velja

$$f(x)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1).$$

Funkcija $f:[a,b]\to R$ je **KONKAVNA**, če za $x_1<x<x_2$ iz [a,b] velja

$$f(x)\ge\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1).$$

D: Če je funkcija levo od x_0 konveksna, desno pa konkavna (in obratno), pravimo, da je v x_0 **PREVOJ** funkcije f.

T: Če je f' naraščajoča funkcija in $f''>0$, je funkcija konveksna, če pa je f' padajoča in $f''<0$, je funkcija konveksna. Če je x_0 prevoj za f, je $f''(x_0)=0$.

T: Če vrsta $f(x)=a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$ konvergira na intervalu $(a-r,a+r)$, potem smemo to vrsto členoma odvajati in dobljena vrsta konvergira na istem intervalu. Enako velja za integriranje.

DIFERENCIAL: $dy=f'(x_0)dx$

TAYLORJEVA FORMULA:

f je $(n+1)-$krat odvedljiva

$$f(x)=T_n+R_n$$

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\qquad \xi\in(a,x)$$

¤ Ko je $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ (f je $\infty-$krat odvedljiva) je $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k$

KONVERGENCA TAYLORJEVE VRSTE:

$\exists R: x\in(a-R,a+R)$ konvergira (absolutno)

$x\in(-\infty,a-R)\cup(a+R,\infty)$ divergira

NEDOLOČENI INTEGRAL:

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow f(x) = F'(x)$$

$$G(x) = F(x) + C \Leftrightarrow G'(x) = F'(x) \Leftrightarrow G(x) = \int f(x)dx$$

$t = tg\frac{x}{2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ UNIVERZALNA SUBSTITUCIJA

DOLOČENI INTEGRAL:

RIEMANNOVA VSOTA: $S_p(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad ; \xi \in [x_i, x_{i-1}]$

DELITEV ALI PARTICIJA INTERVALA [a,b]: končna množica točk

$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$

$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$

$\Delta_p = \max_{1 \le i \le n} \Delta_i x$

D: **RIEMANNOV INTEGRAL:** Število I je limita Riemannovih vsot:

$I = \lim_{\Delta_p \to 0} S_p(f) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\Delta_p < \delta \Rightarrow |S_p(f) - I| < \varepsilon)$. Če limita Riemannovih vsot $S_p(f)$ obstaja, pravimo, da je f na intervalu [a,b] integrabilna v Riemannovem smislu.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta_p \to 0} S_p(f)$$

I: Vsaka zvezna funkcija $f:[a,b] \to R$ je integrabilna. To velja tudi za funkcije, ki so nezvezne v končno ali števno neskončno mnogo točkah.

T: $a \le b;\ f, g : [a,b] \to R$. Če je f(x)≤g(x), potem je $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

P: $m \le f(x) \le M\ \forall x \in [a,b]\ b \ge a \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

T: Če je $f:[a,b] \to R$ zvezna, $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

IZREK O POVPREČNI VREDNOSTI: Med infimumom m in supremumom M na intervalu [a,b] zvezne funkcije f obstaja med taka točka c, da je $c = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$.

T: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \quad a \le b$

OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA: Če je f zvezna funkcija, je njen določeni integral $F(t) = \int_a^b f(x)dx$ odvedljiva funkcija zgornje meje r in velja: $F'(t) = f(t)$.

P: (**DRUGI OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA**): Če je $F'(x) = f(x)\ \forall x$, je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

¤ $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

T: Če je $\varphi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ monotona odvedljiva funkcija in f zvezna, potem velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$, če je $\varphi(\alpha) = a$ in $\varphi(\beta) = b$.

D: **IZLIMITIRANI INTEGRALI:** $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Če limita obstaja, pravimo, da je integral $\int_a^\infty f(x)dx$ **<u>konvergenten</u>**, če pa ne, je **<u>divergenten</u>**.

¤ $\int_a^\infty \frac{dx}{x^r} = \frac{a}{r-1} \quad r > 1$

D: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to a}\int_a^b f(x)dx$ Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ je **ABSOLUTNO KONVERGENTEN**, če je konvergenten integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$.

T: Vsak absolutno konvergenten integral je konvergenten.

T: Če je $|f(x)| \le g(x)$ in je integral $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergenten, potem je integral $\int_a^\infty f(x)dx$ **<u>absolutno konvergenten</u>**.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha > 1 \Rightarrow \exists, \text{konvergira} \\ \alpha \le 1 \Rightarrow \nexists, \text{nekonvergira} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^{a+1} \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \\ \int_{a-1}^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha < 1 \Rightarrow \exists, \text{konvergira} \\ \alpha \ge 1 \Rightarrow \nexists, \text{nekonvergira} \end{array}$$

$$\int_a^\infty f(x)dx\ \exists \wedge 0 \le g(x) \le f(x) \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx\ \exists$$

$$\int_a^\infty f(x)dx\ \nexists \wedge 0 \le f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx\ \nexists$$

TRAPEZNA FORMULA: $\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$

SIMPSONOVA FORMULA: $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + {}$
$+ 2f(a+4h) + \ldots + 4f(a+(n-1)h) + f(b))$

PLOŠČINA MED KRIVULJAMA: $S = \int (f(x) - g(x))dx,\ f(x) \ge g(x)\ \forall x$

DOLŽINA KRIVULJE: $s=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

– parametrično podane: $s=\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$

– v polarnih koordinatah: $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$

PROSTORNINA VRTENINE: $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

POVRŠINA VRTENINE: $S_{pl}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

TEŽIŠČE RAVNINSKEGA LIKA: $x_T=\frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx$ $y_T=\frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx$

PAPPUSOVI IZREKI: $S=2\pi y_T s=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ __**Površina vrtenine**__, ki nastane, ko se ravninska krivulja zavrti okrog osi, ki je ne seka, je enaka produktu dolžine krivulje in poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče te krivulje.

$V=2\pi y_T S=\pi\int_a^b y^2\,dx$ __**Prostornina vrtenine**__, ki nastane, ko se ravninski lik zavrti okrog osi, ki ga ne seka, je enaka produktu ploščine tega lika in poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče.

VEKTORJI IN VEKTORSKI PROSTORI

$\|\vec{r}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\|\alpha\vec{r}\|=|\alpha|\cdot\|\vec{r}\|$

$\alpha\vec{r}=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

$\forall\vec{a}\quad\exists(-\vec{a}):\quad\vec{a}+(-\vec{a})=0$

$\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$

$1\vec{a}=\vec{a}$

$0\vec{a}=0$

$\cos\alpha=\frac{x}{\|\vec{r}\|}$ $\cos\beta=\frac{y}{\|\vec{r}\|}$ $\cos\gamma=\frac{z}{\|\vec{r}\|}$ smerni koti

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2+y^2+z^2}{\|\vec{r}\|^2}$

¤ $\vec{a},\vec{b}\neq 0$; $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **KOLINEARNA** $\Leftrightarrow \exists k\cdot\vec{a}=\vec{b}$. Takrat je $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

¤ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\neq 0$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ sta **KOPLANARNI** $\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

D: **LINEARNA KOMBINACIJA VEKTORJEV** $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ je vsak vektor oblike $\alpha_1\vec{a}_1+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n \quad (\alpha_i\in R)$. Vektor $\vec{0}$ je vedno linearna kombinacija vektorjev. **Trivialna linearna kombinacija**: Vsi koeficienti v kombinaciji so 0.

D: Vektorji $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ so **LINEARNO NEODVISNI**, če iz $\alpha_1\vec{a}_1+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$ sledi $\alpha_i=0$

T: $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$. Potem nista kolinearna.

ENAČBA PREMICE:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s}$$

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c)$$

ENAČBA RAVNINE:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

$$ax+by+cz=d \qquad d=\vec{r}_0\circ\vec{n} \qquad \vec{n}=(a,b,c)$$

skozi tri točke:

$$\vec{r}_A=\vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \qquad \vec{r}_B=\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

$$\vec{r}_C=\vec{c}=(c_1,c_2,c_3) \qquad \vec{d}=(x,y,z)$$

$$(\vec{d}-\vec{a},\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{a})=\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$$

RAZDALJA TOČKE OD PREMICE: $d(T,p)=\dfrac{\|\vec{s}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_0)\|}{\|\vec{s}\|}$

RAZDALJA TOČKE OD RAVNINE: $D(T_1,\Psi)=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

RAZDALJA MED DVEMA PREMICAMA:

vzporednici

$$p:\vec{r}=\vec{r}_p+t\vec{s} \qquad q:\vec{r}=\vec{r}_q+t\vec{s}$$

$$d(p,q)=\frac{\|\vec{s}\times(\vec{r}_p-\vec{r}_q)\|}{\|\vec{s}\|}$$

mimobežnici

$$p:\vec{r}=\vec{r}_p+t\vec{s}_p \qquad q:\vec{r}=\vec{r}_q+t\vec{s}_q$$

$$d(p,q)=\frac{\|(\vec{r}_p-\vec{r}_q),\vec{s}_p,\vec{s}_q\|}{\|\vec{s}_p\times\vec{s}_q\|}$$

SKALARNI PRODUKT:

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\varphi=\|\vec{a}\|\cdot\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{b}\circ\vec{a}$$

$$\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}$$

$$\vec{a}\circ(\beta\vec{b})=\beta(\vec{a}\circ\vec{b})$$

$$\vec{a}\circ\vec{a}=\|\vec{a}\|^2\geq 0; \quad \vec{a}\circ\vec{a}=0\Rightarrow\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\circ\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

VEKTORSKI PRODUKT:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\varphi$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}_1 \qquad \vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2,\ \vec{b}_1 \perp \vec{a},\ \vec{b}_2 \| \vec{a}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c}) + (\vec{b}\times\vec{c}) \quad \vec{a}\times(\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$(\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{e}\perp\vec{a},\ \|\vec{e}\| = 1; \qquad \|\vec{e}\times\vec{a}\| = \|\vec{a}\|$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\|\vec{b}$$

MEŠANI PRODUKT:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$$

$$V_{paralelpiped} = \left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$$

$$V_{piramida} = \frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$$

$$\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$$

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$$

$$(\alpha\vec{a},\beta\vec{b},\gamma\vec{c}) = \alpha\beta\gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

$$(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}) = \alpha_1(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}) + \alpha_2(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$$

Trije vektorji so **KOPLANARNI**, ko je njihov mešani produkt enak 0.

VEČKRATNI PRODUKTI:

1. **dvojni vektorski produkt**:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\circ\vec{c})\circ\vec{b} - (\vec{b}\circ\vec{c})\circ\vec{a}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} + (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = 0$$ Jacobijeva identiteta

2. **Lagrangeova identiteta**:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\circ\vec{c} & \vec{a}\circ\vec{d} \\ \vec{b}\circ\vec{c} & \vec{b}\circ\vec{d} \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{c}\ \ \vec{d} = \vec{b} \Longrightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\circ\vec{b})^2$$

3. $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b} - (\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a} = \vec{d},\vec{a},\vec{b})\vec{c} - (\vec{c},\vec{a},\vec{b})\vec{d}$

D: Realen **VEKTORSKI PROSTOR** V je neprazna množica V (njeni elementi so vektorji), opremljena z operacijama seštevanja in množenja s skalarjem, ki zadoščata naslednjim pogojem:

$$\forall u,v,w\in V,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$u+v = v+u$$

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

$$\exists 0\in V:\quad u+0 = u = 0+u$$

$$\exists(-u):\quad u+(-u) = 0 = (-u)+u$$

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$$

$$1\cdot u = u$$

D: Podmnožica U vektorskega prostora V je **VEKTORSKI PODPROSTOR**, če je vektorski prostor za isti operaciji kot V.

T: Neprazna podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor
$\Leftrightarrow u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ in $u \in U, \alpha \in R \Rightarrow \alpha u \in U$.

T: Neprazna podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor
$\Leftrightarrow \forall u, v \in U, \forall \alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U.$

T: $\forall v \in V : 0 \cdot v = 0 \quad -v = (-1) \cdot v$

T: Če je U vektorski podprostor V, potem je $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \in U$ za $\forall u_i \in U, \alpha_i \in R$. s

D: **LINEARNA LUPINA** podmnožice S v vektorskem prostoru V je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev iz S.
$[S] = \{\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n : s_i \in S, \lambda_i \in R, n \in N\}$
$S = \{a_1, \ldots, a_n\} \Rightarrow [S] = \{\lambda_a a_1 + \ldots + \lambda_n a_n : \lambda_i \in R\}$

T: [S] je vektorski podprostor v V, $S \subseteq [S]$, če je U vektorski podprostor V in $S \subseteq U \Rightarrow [S] \subseteq U$.

D: Podmnožica S v vektorskem prostoru V je **OGRODJE**, če je $[S] = V$. To pomeni, da se mora dati vsak vektor iz V izraziti kot linearna kombinacija vektorjev iz S.

D: Končna množica $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ je **LINEARNO NEODVISNA**, če iz $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$.

¤ Če je S linearno neodvisna, je linearno neodvisna tudi vsaka njena neprazna podmnožica.

D: Neskončna množica v vektorskem prostoru V je linearno neodvisna, če je linearno neodvisna vsaka njena končna podmnožica.

D: Podmnožica B v vektorskem prostoru V je **BAZA**, če je ogrodje in je linearno neodvisna hkrati.

I: V vsakem vektorskem prostoru (razen 0) obstaja baza.

D: Vektorski prostor V je **KONČNO RAZSEŽEN**, če ima kako končno ogrodje. $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$

L: Če je S ogrodje vektorskega prostora V in T taka podmnožica V, da lahko vsak vektor iz S izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev iz T, potem je tudi T ogrodje.

L: Če je A linearno neodvisna, S pa ogrodje v vektorskem prostoru V, je $|A| \le |S|$.
$(A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad S = \{s_1, \ldots, s_n\} \quad m \le n)$.

I: Vsak končno razsežen vektorski prostor V $(V \ne 0)$ ima bazo; vse baze imajo enako moč in vsako linearno neodvisno podmnožico $A \subseteq V$ lahko dopolnimo do baze.

D: **DIMENZIJA ALI RAZSEŽNOST**, dimV, vektorskega prostora V je moč baze.

T: Če je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ linearno neodvisna množica v n–razsežnem vektorskega prostora, je baza.

D: **EVKLIDSKI PROSTOR** je realen vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom. **Skalarni produkt** na realnem vektorskem prostoru V je predpis, ki vsakemu urejenemu paru (a,b) vektorjev iz V priredi realno število $\langle a, b \rangle$. Pri tem mora veljati:
$\forall a, a_1, a_2, b \in V, \forall \alpha \in R$
$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$
$\langle a_1 + a_2, b \rangle = \langle a_1, b \rangle + \langle a_2, b \rangle$
$\langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$
$\langle a, a \rangle \ge 0 \quad \langle a, a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$

D: **NORMA ALI DOLŽINA VEKTORJA** a v vektorskem prostoru V s skalarnim produktom je $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$.

$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ trikotniška neenakost ali neenakost Minkovskega

$\|a\| \geq 0, \quad \|a\| = 0 \Longrightarrow a = 0$

$\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$

L (Schwarz, Couchy, Bunjakovski): $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Enakost velja, če sta vektorja linearno odvisna.

D: **KOT MED VEKTORJEMA** $a, b \in V,\ a, b \neq 0$ je tisti kot $\varphi \in [0, \pi]$, ki zadošča pogoju: $\cos\varphi = \dfrac{\langle a, b\rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$. Če je a=0 ali b=0 pravimo, da sta vektorja pravokotna.

D: Vektorja a in b v evklidskem prostoru sta **ORTOGONALNA ALI PRAVOKOTNA**, če je $\langle a, b\rangle = 0$. Množica vektorjev je **ORTOGONALNA**, če sta poljubna dva različna vektorja v njej ortogonalna. Množica je **ORTONORMIRANA**, če je ortogonalna in imajo vsi njeni vektorji dolžino 1.

T: Vsaka ortogonalna množica $\{a_1, \ldots, a_n\}$ neničelnih vektorjev je linearno neodvisna.

¤ **GRAMM–SCHMIDTOV POSTOPEK**: Postopek, po katerem dobimo ortogonalno ali ortonormirano bazo s popravljanjem vektorjev iz prostora.

$$\lambda_a^b = \frac{\langle \vec{x}_a, \vec{y}_b\rangle}{\langle \vec{y}_b, \vec{y}_b\rangle} \quad \begin{array}{l} x \rightarrow \text{originalni vektorji} \\ y \rightarrow \text{popravljeni vektorji} \end{array} \quad \text{npr. } y_3 = x_3 - \lambda_3^2 y_2 - \lambda_3^1 y_1.$$

I: V vsakem evklidskem prostoru $V \neq 0$ obstaja ortonormirana baza.

D: **KOMPLEKSNI VEKTORSKI PROSTOR** je množica V, opremljena z operacijama seštevanja in množenja. Veljajo enaki pogoji kot za realni vektorski prostor

D: **UNITARNI PROSTOR** je kompleksen končno razsežen vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom. <u>**Skalarni produkt**</u> je predpis, ki vsakemu paru vektorjev $u, v \in V$ priredi kompleksno število $\langle u, v\rangle$. Pri tem mora veljati:

$u, u_1, u_2, v \in V,\ \alpha \in C$

$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$

$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$

$\langle u, u\rangle \geq 0 \quad \langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \qquad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

<u>MATRIKE</u>

D: **REALNA MATRIKA** velikosti m×n, $M_{m,n}$, je tabela oblike $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$

¤ <u>**Stolpec**</u>: $M_{m,1}$, <u>**Vrstica**</u>: $M_{1,n}$, <u>**Kvadratna matrika**</u>: $M_{n,n}=M_n$

¤**Diagonalna matrika**: $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$, **Identična matrika**: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **Skalarna matrika**: $A = \alpha I$, **Zgornja trikotna n×n matrika** (podobno **spodnja**): $Z_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$;

$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & e_{ij} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, $e_{ij} = 1$

T: Matrika $M_{m,n}$ je za naslednji operaciji vektorski prostor z dimenzijo m×n.

$A, B \in M_{m,n}$

$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{m,n}$

$\alpha A = \alpha [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] \in M_{m,n}$

¤ $A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$; **Ogrodje**: $\{E_{ij} : i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\}$

D: **TRANSPONIRANA MATRIKA** matrike A je tista matrika, ki ima na mestu ij tisti element matrike A, ki je v njej na mestu ji. $A^T = [a_{ji}] \Leftrightarrow A = [a_{ij}]$

D:

$A \in M_{m,n}, B \in M_{n,p}$

$$AB = [a_{ij}][b_{jk}] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj} b_{jp} \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$

$(AB)C = A(BC)$

$(A + B)C = AC + BC$

$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$

$(AB)^T = B^T A^T$

¤ **Nilpotentna matrika**: $A^2 = 0$, **Idempotentna matrika**: $A^2 = A$, **Antisimetrična matrika**: $A^T = -A$.

D: Preslikava $A : R^n \to R^m$ je **LINEARNA**, če obstaja taka matrika A velikosti m×n, da je $A(x) = Ax \quad \forall x \in R^n$.

T: Preslikava $A : R^n \to R^m$ je **LINEARNA** natanko takrat, ko je

$A(a + b) = A(a) + A(b), \; A(\alpha a) = \alpha A(a) \quad \forall a, b \in R^n, \alpha \in R$ oz.

$A(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot A(a) + \beta \cdot A(b) \quad \forall a, b \in R^n, \alpha, \beta \in R$.

¤ Linearna preslikava preslika 0 v 0. $(A(0) = 0)$.

D: **LINEARNA PRESLIKAVA** $A: U \to V$ je predpis, ki vsakemu vektorju $u \in U$ priredi natanko določen vektor $A(u) \in V$, pri čemer velja:
$A(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot A(a) + \beta \cdot A(b) \quad \forall a, b \in U, \forall \alpha, \beta \in R(C)$.

¤ **LINEARNI FUNKCIONAL** je taka funkcija A, ki slika iz R^n v R $(A : R^n \to R)$.

T: Naj bo $\{a_1, \dots, a_n\}$ baza za U, $\{b_1, \dots, b_n\}$ pa poljubni vektorji iz V. Potem obstaja natanko ena preslikava $A: U \to V$, da je: $A(a_1) = b_1, \dots, A(a_n) = b_n$.

¤ $(Au)_M = A_{M,N} u_N$

D: $A: U \to V$ linearna preslikava.
ZALOGA VREDNOSTI: $R_A = \{Au : u \in U\} = \{v \in V : \exists u \in U, v = Au\} \subseteq V$.
JEDRO: $N_a = \{u \in U : Au = 0\} \subseteq U$.

T: R_A je vektorski podprostor za V, N_A pa za U.

T: Če je $A: U \to V$ linearna preslikava in $\{a_1, \dots, a_n\}$ baza za U, je potem $\{A(a_1), \dots, A(a_n)\}$ ogrodje za R_A.
(Če je $A : R^n \to R^m$, potem stolpci matrike A tvorijo ogrodje za R_A.)

T: $A: U \to V$. A je **SURJEKTIVEN** (operator) $\Leftrightarrow R_A = V$.
A je **INJEKTIVEN** $\Leftrightarrow N_A = 0$.

D: A je **INJEKTIVEN**, če iz $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$.

T: $A: U \to V$ linearen operator. $\dim N_A + \dim R_A = \dim U$.

D: $\dim R_A = \operatorname{rang} A$

¤ $\operatorname{rang} A = \text{št. linearno neodvisnih vrstic/stolpcev}$ (množenje vrstice/stolpca z neničelnim številom; menjava vrstic/stolpcev; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic/stolpcev neki vrstici/stolpcu).

¤ $\dim N_A = \text{št. spremenljivk} - \operatorname{rang} A$

¤ stolpci matrike A so elementi R_A, R_A je množica vseh linearnih kombinacij stolpcev matrike A.

¤ **SISTEMI LINEARNIH ENAČB**: (množenje vrstice z neničelnim številom; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic neki vrstici; menjava vrstic). **HOMOGEN SISTEM** je vedno rešljiv (0, …,0), množica rešitev je vektorski podprostor v R^n;
$\dim(\text{v.pr. rešitev}) = \text{št. rešitev} = \text{št. spremenljivk} - \text{rang prirejene matrike}$ **NEHOMOGEN SISTEM** je rešljiv $\Longleftrightarrow \operatorname{rang} A_{(\text{prirejena mat.})} = \operatorname{rang} \overline{A}_{(\text{razširjena mat.})}$; Če je rešljiv:
$\text{mn. reš.} = \text{partikularna reš.} + \text{mn. reš. prirejenega homogenega sistema}$

T: Naj bo u **PARTIKULARNA REŠITEV** sistema $Ax = b$. Vsako rešitev tega sistema lahko izrazimo kot vsoto $x = u + h$, kjer je h rešitev homogenega sistema $Ah = 0$. Pri danem b ima sistem $Ax = b$ največ eno rešitev, če ima homogen sistem $Ax = 0$ le rešitev $x = 0$.

D: $A \in M_n$. **INVERZNA MATRIKA** je taka matrika, da je $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

T: $A \in M_n$, $A : R^n \to R^n$. $N_A = 0 \Leftrightarrow \exists! X \in M_n : XA = AX = I$

T: $R_A = R^n \Rightarrow \exists! X \in M_n : XA = AX = I$

D: **PERMUTACIJA** števil 1,…,n je bijektivna preslikava množice vase.

D: **TRANSPOZICIJA** je permutacija, ki zamenja le dva elementa.

D: $\sigma, \tau \in S_n \to \sigma \cdot \tau \in S_n \quad (\sigma \cdot \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Produkt $\sigma\tau$ je permutacija, ki jo dobimo, če najprej izvedemo τ in nato σ.

T: Vsako permutacijo lahko izrazimo kot produkt transpozicij.

D: **SODE PERMUTACIJE** so tiste, ki se dajo zapisati kot produkt sodomnogih transpozicij. Enako velja za **LIHE**.

¤ **INVERZIJA** je pojav, da je večje število pred manjšim. Pri **SODI INVERZIJI** nastopa sodo število inverzij, pri **LIHI** pa liho.

D: Predznak permutacije: $\operatorname{sgn}\sigma := \begin{cases} 1; & \sigma \text{ je soda} \\ -1; & \sigma \text{ je liha} \end{cases}$

D: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$

T: • $\det \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ • $\det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ • $\det \begin{bmatrix} a_1 + \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ enakc za stolpc • $\det A^T = \det A$

¤ (če zamenjamo dve vrstici/stolpca, se predznak spremeni; če vrstico/stolpec pomnožimo s skalarjem, se determinanta pomnoži s tem skalarjem; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic/stolpcev neki vrstici/stolpcu; razvoj po vrstici/stolpcu). Determinanta trikotne ali diagonalne matrike je enaka produktu elementov na diagonali.

T: $\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad A, B \in M_n$

¤ **MINOR** k elementu a_{ij}, D_{ij}, je poddeterminanta, v kateri izpustimo vrstico i in stolpec j iz determinante. **KOFAKTOR** k elementu a_{ij} je $(-1)^{i+j} D_{ij}$.

¤ $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A) \cdot I$; $\tilde{A}$ je **PRIREJENKA** k matriki A: $\tilde{A} = \left[(-1)^{i+j} D_{ij}\right]$.

T: Matrika $A \in M_n$ je **OBRNLJIVA** $(\exists A^{-1}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Takrat je $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$.

¤ $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \quad \det A^2 = (\det A)^2 \quad \det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$

¤ **CRAMERJEVO PRAVILO**: Če je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ in $Ax = b$, potem je

$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot D_i, \; i = 1, \ldots, n.$

T: $A \in M_{m,n}$; rangA je največji tak k, da v A obstaja k×k podmatrika z determinanto različno od 0.

D: Vektor $a \in V$ je **LASTNI VEKTOR** za linearno preslikavo $A : V \to V$, če je $Aa = \lambda a$ za kak $\lambda \in R(C)$. Število λ imenujemo **LASTNA VREDNOST** za A, če $a \neq 0$.

T: λ je lastna vrednost za linearno preslikavo A natanko takrat, ko je $\det(A - \lambda I) = 0$.

D: **KARAKTERISTIČNI POLINOM** je $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ za linearno preslikavo A.

T: Linearno preslikavo $A : V \to V$ lahko predstavimo z **DIAGONALNO MATRIKO** (A se da diagonalizirati) natanko tedaj, ko obstaja baza za V iz lastnih vektorjev za A.

D: Matrika $S \in M_n(\mathbb{R})$ je **SIMETRIČNA**, če je $S^T = S$.

T: Če je $S \in M_n$ simetrična, je $y^T S x = x^T S y \ \forall x, y \,(\text{stolpca}) \in \mathbb{R}^n$

T: Lastne vrednosti simetrične matrike $S \in M_n(\mathbb{R})$ so realna števila.

T: Lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim simetrične matrike, so med seboj pravokotni.

I: Če je $S \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrika, obstaja taka matrika $P \in M_n(\mathbb{R})$, da je $P^T S P = D$ diagonalna lastna vrednost matrike S. Matrika P ima za stolpce ortonormirane lastne vektorje matrike S. Velja: $P^{-1} = P^T$.

¤ $A^n : PD^nP^{-1} \quad P : \left[\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_m\right] \quad D^n : \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m^n \end{bmatrix}$

$\vec{v}$ - lastni vektorji (stolpci)
λ - lastne vrednosti

D: Matrika P je **ORTOGONALNA**, če je $P^{-1} = P^T$, $P^T P = P P^T = I$.

T: $P \in M_n(\mathbb{R})$ je ortogonalna $\Leftrightarrow P^T P = P P^T = I \Leftrightarrow$ stolpci in vrstice matrike P so ortonormirani.

¤ $\begin{array}{ll} A^{-1} / \quad AX = B & XA = B \ / \ A^{-1} \\ \quad X = A^{-1}B & \quad X = BA^{-1} \end{array}$

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK, PARCIALNI ODVODI, TOTALNI DIFERENCIAL, POSREDNO ODVAJANJE, TANGENTNA RAVNINA IN TAYLORJEVA VRSTA, EKSTREMI ZA FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

D: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, **FUNKCIJA** $f : D \to \mathbb{R}$ je predpis, ki vsakemu $x \in D$ priredi natanko določeno število $y = f(x) \in \mathbb{R}$.

D: $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$. f je **V TOČKI** $a \in D$ **ZVEZNA**, če $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$. Ko se x bliža a, se f(x) bliža f(a): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. f je zvezna na D, če je **ZVEZNA** v vsaki točki $a \in D$.

T: Če je $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, je zvezna po vsaki spremenljivki posebej. Obrano ni res.

D:

$$z = f(x_1, \dots, x_n), f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n,$$
$$a \in D, a = (a_1, \dots, a_n), f_1(x_1) = f(x_1, a_2, \dots, a_n)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = f_1'(a); \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = f_2'(a); \dots$$

D: Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je **ODPRTA**, če okrog vsake njene točke lahko opišemo n–razsežno kroglo, ki je vsa vsebovana v D. $(\forall a \in D)(\exists \delta > 0)(K(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \delta\} \subseteq D)$.

D: Množica je **ZAPRTA**, če je njen komplement odprt.

D:

$$D^{odprta} \subseteq R^n,\ f : D \to R,\ a \in D,\ a = (a_1,\ldots,a_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h,a_2,\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots a_n)}{h};$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_n)-f(a)}{h}$$

$(a_1+h,a_2,\ldots,a_n)=a+he_1$
$\ldots$
$(a_1,\ldots,a_{n-1},a_n+h)=a+he_n$

D: **VIŠJI ODVODI**:

$$z = f(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

T: Če sta odvoda $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ zvezni funkciji, potem je $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. To velja tudi za funkcije več kot dveh spremenljivk.

D:

$$U^{odprta} \subseteq R^n,\ f : U^{odprta} \to R,\ a \in U,$$

$$\operatorname{grad} f(a) = (\nabla f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

D: $u = f(x_1,\ldots,x_n), D \subseteq R^n, f : D \to R, a \in D$. **TOTALNI DIFERENCIAL FUNKCIJE f V TOČKI a** je $du = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$. $du = \operatorname{grad} f(a)dx = (\nabla f)(a)dx$.

T: Če je $D^{odprta} \subseteq R^n, f : D^{odprta} \to R$ funkcija z zveznimi parcialnimi odvodi, potem za $\forall a \in D$ velja:

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\Delta u - du(a)}{\|h\|} = 0. \qquad \Delta u = f(a+h) - f(a)$$
$$du(a) = (\nabla f)(a) \circ h$$

¤ $\frac{du}{dt}(t_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x(t_0))\frac{dx_1}{dt}(t_0) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x(t_0))\frac{dx_n}{dt}(t_0) = (\nabla u)(x(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0)$

T: Naj ima funkcija $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ zvezne parcialne odvode in naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Potem velja $\frac{d}{dt}u(x(t)) = (\nabla u)(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t)$.

¤ $\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$

¤ $f(x,y) = 0,\ \ y = y(x);\ \frac{d}{dx}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

D: **ODVOD FUNKCIJE u GLEDE NA VEKTOR v V TOČKI a**:

$$(\nabla_v u)(a)=\frac{d}{dt}f(a+tv)\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot v_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot v_n=\langle(\nabla_v f)(a),v\rangle;\qquad \begin{array}{c}u=f(x)\\ x=a+tv,\ t\in R\end{array}.$$

¤ Če ima v isto smer kot $(\nabla f)(a)$, potem je $(\nabla_v u)(a)=\|(\nabla f)(a)\|$. Če pa ima v nasprotno smer kot $(\nabla f)(a)$, potem je $(\nabla_v u)(a)=-\|(\nabla f)(a)\|$.

T: $\operatorname{grad} f(a)=(\nabla f)(a)$ kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije f v okolici točke a.

¤ $(\nabla f)(a)$ je pravokoten na **TANGENTNO RAVNINO** na ploskev v točki a.

¤ **TAYLORJEVA VRSTA**:

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{[i]}\Bigg|_{(a,b)}+R_n$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{[n+1]}\Bigg|_{(a+\xi h,b+\xi k)}\qquad \begin{array}{l}\xi\in(0,1)\\ h=x-a\\ k=y-b\end{array}$$

T: Če ima odvedljiva funkcija $u=f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ v točki $a=(a_1,\ldots,a_n)$ lokalni ekstrem, so v tej točki vsi njeni parcialni odvodi enaki 0. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0,\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)=0$

T: $K(a,b)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}_{(a,b)}$. Če ima $u=f(x,y)$ v točki (a,b) stacionarno točko in je $\boxed{K(a,b)>0}$, potem <u>**je**</u> v (a,b) <u>**lokalni ekstrem**</u>, in sicer <u>**lokalni minimum**</u>, če je $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0}$, ali <u>**lokalni maksimum**</u>, če je $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0}$. Če je $\boxed{K(a,b)<0}$, potem v točki (a,b) <u>**ni lokalnega ekstrema**</u>. Če pa je $\boxed{K(a,b)=0}$, <u>**ne moremo določiti**</u>, če je v točki (a,b) lokalni ekstrem ali ne.