

MATEMATIKA I

/rd/	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
/°/	0	30	45	60	90	180	270
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0

NEDOLOČENI IZRAZI:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, \infty - \infty, 1^\infty$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha$$

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(k\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(k\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin(k2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$$

$$\cos(k2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

EULERJEVE FORMULE:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{k2\pi i} = 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \operatorname{sh} x = -s \operatorname{h}(ix)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(ix)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$$

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

$$|z - w| \geq ||z| - |w||$$

$$|z + w| \geq ||z| - |w||$$

$$z = a + bi$$

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi \quad k = 0, 1, 2$$

$$a = 0, b > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$a = 0, b < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$a > 0, b = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$a < 0, b = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi_z + \varphi_w) + i \cdot \sin(\varphi_z + \varphi_w))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\varphi_z - \varphi_w) + i \cdot \sin(\varphi_z - \varphi_w))$$

$$z^{-1} = |z|^{-1} \cdot (\cos \varphi - i \cdot \sin \varphi)$$

MOIVREOVA FORMULA:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi) = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

$$x^n - z = 0$$

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + k2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + k2\pi}{n} \right) = x_1 \cdot \omega^k$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

$$x_1 = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi}{n} \right) \quad \text{primitivnikore ne note}$$

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1)}{k!} \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C} = 1 \quad C > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

DIVERGENTNE VRSTE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

KONVERGENTNE VRSTE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad k > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} \quad k > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n \quad |q| < 1, a \neq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

TAYLORJEVE VRSTE:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} \cdot x^n \quad x \in (-1, 1), r \in \mathbb{R}$$

$$(a+b)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} \cdot a^{r-n} \cdot b^n \quad |a| > |b|$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in (-1, 1)$$

GEOMETRIJSKA VRSTA:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n \quad s_n = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & |q| > 1, a \neq 0 \\ n \cdot a, & q = 1, a \neq 0 \end{cases}$$

$$s = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1, a \neq 0$$

ODVODI:

$$(kx+n)'=k$$

$$(C)'=0$$

$$(C \cdot f)'(x) = C \cdot f'(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i \right)'(x) = \sum_{i=1}^n f_i'(x)$$

$$(f_1 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n +$$

$$f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n'$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}; n \in \mathbb{R}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a; a > 0$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a; a > 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$x = e^{\ln x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

INTEGRALI:

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

$$\int C \cdot f dx = C \cdot \int f dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{PERPARTE!}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^{kx} dx = \frac{a^x}{k \cdot \ln a} + C$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$$

$$\int \frac{p^{(n)}(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = q^{(n-1)}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + A \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{T^{(2n-3)}(x)}{(x^2 + px + q)^{n+1}} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + px + q} dx$$

$$\int \frac{S^{(m)}(x)}{(x-k)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}, m < n : x - k = \frac{1}{t}$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad a < c < b$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

MNOŽICE

□ Med vsakima dvema racionalnima številoma je še eno racionalno število: med $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq b$, je $\frac{a+b}{2}$.

□ \mathbb{N}, \mathbb{Z} in \mathbb{Q} je enako mnogo, iracionalnih in \mathbb{R} pa je več.

□ Iracionalnih števil ne moremo zapisati v zaporedje.

□ \mathbb{R} zasedejo celo številsko premico, \mathbb{C} pa so točke na ravnini.

□ $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$

D: $A \subseteq \mathbb{R}$ je **NAVZGOR OMEJENA**, če $\exists M \in A \Rightarrow x \leq M, \forall x \in A$. Tak M je **ZGORNJA MEJA**. **SUPREMUM** (natančna zgornja meja) je najmanjša med zgornjimi mejami navzgor omejene A .

D: $A \subseteq \mathbb{R}$ je **NAVZDOL OMEJENA**, če $\exists m \in A \Rightarrow x \geq m, \forall x \in A$. Tak m je **SPODNJA MEJA**. **INFIMUM** (natančna spodnja meja) je največja med spodnjimi mejami navzdol omejene A .

□ A je navzdol omejena, če je $-A$ navzgor omejena. $-A = \{-x : x \in A\}$ $\inf A = -\sup(-A)$

D: A je **OMEJENA**, če je omejena navzgor in navzdol.

□ Če je A omejena, je vsebovana v zaprtem intervalu. $A \subset [m, M]$.

AKSIOM O ZGORNJI MEJI: Vsaka neprazna navzgor omejena množica realnih števil A ima v \mathbb{R} supremum.

□ $\forall a, n \in \mathbb{R}, a > 0, \exists x \in \mathbb{R} : x^n = a$

OSNOVNI IZREK ALGEBRE: Vsaka enačba $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ ($a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$) ima eno rešitev.

ZAPOREDJA IN VRSTE

D: Zaporedje $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ je **NARAŠČAJOČE / PADAJOČE**, če je $a_{n+1} \geq a_n / a_{n+1} \leq a_n, \forall n = 1, 2, \dots$. Zaporedje je **STROGO NARAŠČAJOČE / STROGO PADAJOČE**, če je $a_{n+1} > a_n / a_{n+1} < a_n, \forall n = 1, 2, \dots$

D: Zaporedje $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ je **NAVZGOR / NAVZDOL OMEJENO**, če je taka množica $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.

D: Število a je **LIMITA** zaporedja $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, če je izven vsakega odprtega intervala $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ ($\epsilon > 0$) le končno mnogo členov zaporedja. $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(n > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon)$

D: Zaporedje, ki ima limito, je **KONVERGENTNO**, zaporedje, ki nima limite, pa **DIVERGENTNO**.

D: Število s je **STEKALIŠČE** zaporedja $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, če je v vsakem intervalu $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ ($\epsilon > 0$) neskončno mnogo členov zaporedja.

T: Vsako navzgor / navzdol omejeno naraščajoče / padajoče zaporedje realnih števil (a_n) je konvergentno, njegova limita je $\sup(a_n) / \inf(a_n)$. Vsako monotono omejeno zaporedje \mathbb{R} (a_n) je konvergentno.

D: Strogo naraščajoča in padajoča zaporedja imenujemo **MONOTONA**.

T: Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.

I: Vsako omejeno zaporedje realnih števil (a_n) ima vsaj eno stekališče.

D: Zaporedje (a_n) je **CAUCHYJEVO**, če za $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(n, m > n_\epsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon)$.

I: Zaporedje $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ je konvergentno natanko takrat, ko je Cauchyjevo.

L: Vsako Cauchyjevo zaporedje je omejeno.

T: $(a_n), (b_n)$ sta konvergentni.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n), b = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}; b_n, b \neq 0$$

D: Vrsto $(v) a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ imenujemo **KONVERGENTNO**, če je konvergentno zaporedje njenih delnih vsot. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Če zaporedje delnih vsot ne konvergira, je vrsta **DIVERGENTNA**.

□ Geometrijska vrsta $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ ($a \neq 0$) je konvergentna natanko takrat, ko je $q \in (-1, 1)$.

□ Zaporedje delnih vsot (s_n) je konvergentno, če je Cauchyjevo $(\epsilon > 0)(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(n, m > n_\epsilon \Rightarrow |s_n - s_m| < \epsilon)$.

T: **CAUCHYJEV KRITERIJ**: Vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ je konvergentna

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(n, m > n_\epsilon \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \epsilon).$$

□ Če je vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ konvergentna, potem je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

D: Vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ je **ABSOLUTNO KONVERGENTNA**, če je konvergentna vrsta $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$. Konvergentna vrsta, ki ni absolutno konvergentna, je **POGOJNO KONVERGENTNA**.

T: Vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ je absolutno konvergentna

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_\epsilon \in \mathbb{N})(n > m > n_\epsilon \Rightarrow |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| < \epsilon).$$

T: Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

D: $[(v_1): a_1+a_2+\dots; (v_2): b_1+b_2+\dots]$ Vrsta (v_2) je **MAJORANTA** za vrsto (v_1) , če je $|a_n| \leq |b_n| \forall n$. Tedaj je (v_1) **MINORANTA** za (v_2) .

T: **PRIMERJALNI KRITERIJ**: Če konvergira vrsta absolutno, potem konvergira absolutno tudi vsaka njena minoranta. Če vrsta divergira, divergira tudi vsaka njena majoranta.

T: **KVOCIENTNI ALI D'ALAMBERTOV KRITERIJ**: Predpostavimo, da $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = d$. Če je $d < 1$, potem vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ konvergira absolutno. Če je $d > 1$, vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ divergira.

T: **KORENSKI ALI CAUCHYJEV KRITERIJ**: Predpostavimo, da $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c$. Če je $c < 1$, vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ konvergira absolutno. Če je $c > 1$, potem vrsta $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ divergira.

D: **ALTERNIRAJOČA VRSTA** je vrsta, katere členi izmenjujejo predznak: $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ ali $-a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ ($a_n \geq 0$).

T: **LEIBNITZOV KRITERIJ**: Če v alternirajoči vrsti $a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ čelni $a_n \geq 0$ padajo proti 0 ($a_{n+1} \leq a_n \forall n$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$), potem je vrsta (pogojno) konvergentna.

FUNKCIJE, ODVOD, TAYLORJEVA VRSTA, INTEGRAL IN KRIVULJE

D: **FUNKCIJA** $f: D \rightarrow R$ je predpis, ki vsakemu $x \in D$ priredi točno določen element $f(x) \in R$.

D: $\text{Gra } f = \{(x, f(x)); x \in D\}$

D: **ZALOGA VREDNOSTI** funkcija f je $R_f = \{f(x); x \in D\}$.

D: Funkcija $f: D \rightarrow R$ je **SURJEKTIVNA**, če je $R_f = R$, se pravi če je vsak $y \in R$ slika kakega $x \in D$. Vsaka vzporednica z osjo x seka graf funkcije f . Funkcija $f: D \rightarrow A \subseteq R$ je surjektivna, če je $\forall (x) \in A$ slika vsaj enega $x \in D$.

D: Funkcija $f: D \rightarrow R$ je **INJEKTIVNA**, če velja: $x_1, x_2 \in D; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Če $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Vsaka vzporednica z osjo x seka graf funkcije f kvečjemu enkrat. Funkcija $f: D \rightarrow A \subseteq R$ je injektivna, če je $\forall (x) \in A$ slika kvečjemu enega $x \in D$.

D: Funkcija $f: D \rightarrow R$ je **BIJEKTIVNA**, če je injektivna in surjektivna.

D: **KOMPOZITUM** $g \circ f$ je definiran kot $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ni komutativen, je pa asociativen.

D: **IDENTIČNA PRESLIKAVA (IDENTITETA)** na množici D vsak x preslika samega vase.

$$i_D(x) = x$$

D: **KONSTANTNA PRESLIKAVA** je: $f(x) = \alpha \in R; \forall x \in D$.

D: **INVERZNA PRESLIKAVA** injektivne funkcije f , f^{-1} , je definirana kot $f^{-1}: A \rightarrow D$. $\forall y \in A$ preslika v tisti $x \in D$, ki ga f preslika v y . $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

D: Funkcija f je **(NAVZGOR, NAVZDOL) OMEJENA**, če je taka njena zaloga vrednosti.

\square f je **NAVZGOR OMEJENA** $\Leftrightarrow \exists M \in R : f(x) \leq M, \forall x \in D$

\square f je **NAVZDOL OMEJENA** $\Leftrightarrow \exists m \in R : f(x) \geq m, \forall x \in D$

\square f je **OMEJENA**, če je omejena navzgor in navzdol.

D: Funkcija $f: D \rightarrow R$ je **(STROGO) NARAŠČAJOČA**, če $x_1, x_2 \in D; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < (>)f(x_2)$.

D: Funkcija $f: D \rightarrow R$ je **(STROGO) PADAJOČA**, če $x_1, x_2 \in D; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > (>)f(x_2)$.

D: Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **SODA / LIHA**, če je za $\forall x \in D$ tudi $-x \in D$ in je $f(-x) = f(x)$ / $f(-x) = -f(x)$. Funkcija f je soda, če je njen graf simetričen glede na os y . Funkcija f je liha, če je njen graf simetričen glede na koordinatno izhodišče.

$$D: f : D \rightarrow \mathbb{R}; (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

T: Vsota, razlika, produkt in kvocient dveh sodih funkcij ter produkt in kvocient dveh lihih funkcij je soda funkcija. Vsota in razlika dveh lihih funkcij je liha funkcija.

D: $\alpha \in \mathbb{R}$ je **NIČLA** funkcije f , če je $f(\alpha) = 0$. V tej točki seka graf funkcije f os x .

$$D: \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ je } \mathbf{POL} \text{ funkcije } f, \text{ če je } \lim_{x \rightarrow \alpha} |f(x)| = \infty. (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\} \wedge |x - \alpha| < \delta \implies |f(x)| > M)$$

D: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Funkcija f je **ZVEZNA V TOČKI a**, $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in D \wedge |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$. Funkcija f je **ZVEZNA**, če je zvezna za vsak $a \in D$ $(\forall \epsilon > 0)(\forall a \in D)(\exists \delta > 0)(x \in D \wedge |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$.

T: Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko takrat, ko za vsako zaporedje $(x_n) \subseteq D$, ki konvergira proti a , konvergira zaporedje $(f(x_n))$ proti $f(a)$.

T: Vsota, razlika in produkt zveznih funkcij so zvezne funkcije. Kvocient dveh zveznih funkcij je zvezen v točkah a , kjer $g(a) \neq 0$. Kompozitum dveh zveznih funkcij je zvezna funkcija.

T: I, J sta intervala, $f : I \rightarrow J$ je zvezna bijekcija. Potem je f strogo monotona (strogo naraščajoča ali strogo padajoča), njena inverzna funkcija pa je tudi zvezna in strogo monotona.

$$D: b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in D \wedge |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon).$$

ASIMPTOTE:

vodoravna: $y = b; b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

navpična: $x = a; \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \wedge \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

poševna: $y = kx + n; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [kx + n - f(x)] = 0 \implies k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$

T: Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, $a < b$, $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Potem $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$. (**METODA BISEKCIJE**)

T: Zvezna funkcija je na zaprtem intervalu omejena.

T: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, zvezna, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$. Potem $\exists x_M \in [a, b] : f(x_M) = M$ in $\exists x_m \in [a, b] : f(x_m) = m$, da za $(\forall c \in [m, M])(\exists x_c \in [a, b] : f(x_c) = c)$.

T: Če je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ injektivna zvezna funkcija, potem je f bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča; če $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$, potem je inverzna preslikava $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ tudi zvezna in strogo monotona.

D: $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcija f je **ENAKOMERNO ZVEZNA** na D , če $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in D)(x \in D \wedge |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$.

□ Vsaka enakomerno zvezna funkcija je zvezna.

T: Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je na zaprtem intervalu $[a, b]$ enakomerno zvezna.

D: **ODVOD** funkcije f v točki x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{x=x_0} = \operatorname{tg} \varphi = k_T$$

□ Geometrijsko je odvod smerni koeficient tangente na graf funkcije.

D: Funkcija f je v točki x_0 **ODVEDLJIVA**, če $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

T: Naj bosta f in g odvedljivi funkciji. Potem so odvedljivi tudi vsota, razlika, produkt in kvocient (kjer g ni nič).

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \text{Leibnitzovo pravilo}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}; g(x) \neq 0$$

T: Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.

T: f in g sta odvedljivi funkciji. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}; u = g(x), y = f(u)$$

T: f je odvedljiva in bijektivna ter $f'(x) \neq 0, \forall x \in D$. Potem je f^{-1} tudi odvedljiva in velja:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

P: Če je $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, da je $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, potem je f konstantna.

$$\text{VIŠJI ODVODI: } f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))'$$

D_f in obnašanje na robovih; ničle; $f(0)$; f' (intervali naraščanja in padanja, ekstremi); f'' (intervali konveksnosti in konkavnosti, prevoji)

KANDIDATI ZA EKSTREME:

- ničle f'
- krajišča intervala
- točke, kjer f ni odvedljiva

$$f(x) = g(x) \text{ na } I$$

$$f'(x) = g'(x) \implies f(x) = g(x) = C \text{ na } I$$

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a) \cdot h$$

T: Če je $f'(x_0) > 0$, funkcija v bližini točke x_0 narašča, če pa je $f'(x_0) < 0$, pa pada.

D: V točki x_m je **LOKALNI MINIMUM** funkcije f , če $\exists \delta > 0 : f(x_m) \leq f(x) \forall x \in (x_m - \delta, x_m + \delta)$.

V točki x_M je **LOKALNI MAKSIMUM** funkcije f , če $\exists \delta > 0 : f(x_M) \geq f(x) \forall x \in (x_M - \delta, x_M + \delta)$.

T: Če je v točki x_0 **LOKALNI EKSTREM** odvedljive funkcije f , potem je $f'(x_0) = 0$.

D: Točka x_0 je **STACIONARNA** za funkcijo f , če je $f'(x_0) = 0$.

T: x v bližini x_0 . Če je za $x < x_0$ $f'(x) < f'(x_0)$ za $x > x_0$ pa $f'(x) > f'(x_0)$, je to lokalni minimum. Če pa je za $x < x_0$ $f'(x) > f'(x_0)$ za $x > x_0$ pa $f'(x) < f'(x_0)$, je to lokalni maksimum.

T: f, f' in f'' so zvezne funkcije. Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) < 0$, potem je v x_0 lokalni maksimum.

Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) > 0$, potem je v x_0 lokalni minimum.

T: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(m)}(x_0) = 0, f^{(m+1)}(x_0) \neq 0, f^{(m+1)}$ je zvezna funkcija. Če je $m+1$ liho število, potem v točki x_0 ni ekstrema. Če pa je $m+1$ sodo število, je v točki x_0 lokalni ekstrem, in sicer minimum, če je $f^{(m+1)}(x_0) > 0$, ali maksimum, če je $f^{(m+1)}(x_0) < 0$.

ROLLEJEV IZREK: Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in odvedljiva na (a, b) . Če je $f(a) = f(b)$, potem $\exists \xi \in (a, b)$, da je $f'(\xi) = 0$.

LAGRANGEOV IZREK: Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in odvedljiva na (a, b) . Potem $\exists \xi \in (a, b)$, da je $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

L'HOPITALOVO PRAVILO: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $f(a) = g(a) = 0$. Velja tudi za

$$|f(a)| = |g(a)| = \infty$$

D: Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je **KONVEKSNA**, če za $x_1 < x < x_2$ iz $[a, b]$ velja

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1).$$

Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je **KONKAVNA**, če za $x_1 < x < x_2$ iz $[a, b]$ velja

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) + f(x_1).$$

D: Če je funkcija levo od x_0 konveksna, desno pa konkavna (in obratno), pravimo, da je v x_0 **PREVOJ** funkcije f .

T: Če je f' naraščajoča funkcija in $f'' > 0$, je funkcija konveksna, če pa je f' padajoča in $f'' < 0$, je funkcija konkavna. Če je x_0 prevoj za f , je $f''(x_0) = 0$.

T: Če vrsta $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$ konvergira na intervalu $(a-r, a+r)$, potem smemo to vrsto členoma odvajati in dobljena vrsta konvergira na istem intervalu. Enako velja za integriranje.

DIFERENCIAL: $dy = f'(x_0)dx$

TAYLORJEVA FORMULA:

f je $(n+1)$ -krat odvedljiva

$$f(x) = T_n + R_n$$

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \quad \xi \in (a, x)$$

$$\alpha \text{ Ko je } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0 \text{ (} f \text{ je } \infty\text{-krat odvedljiva) je } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

KONVERGENCA TAYLORJEVE VRSTE:

$\exists R : x \in (a-R, a+R)$ konvergira absolutno

$x \in (-\infty, a-R) \cup (a+R, \infty)$ divergira

NEDOLOČENI INTEGRAL:

$$F(x) = \int f(x)dx \iff f(x) = F'(x)$$

$$G(x) = F(x) + C \iff G'(x) = F'(x) \iff G(x) = \int f(x)dx$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{UNIVERZALNA SUBSTITUCIJA}$$

DOLOČENI INTEGRAL:

$$\text{RIEMANNOVA VSOTA: } S_p(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad ; \xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$$

DELITEV ALI PARTICIJA INTERVALA [a,b]: končna množica točk

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

$$\Delta_p = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_i x$$

D: RIEMANNOV INTEGRAL: Število I je limita Riemannovih vsot:

$$I = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} S_p(f) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\Delta_p < \delta \Rightarrow |S_p(f) - I| < \varepsilon). \text{ Če limita Riemannovih vsot } S_p(f)$$

obstaja, pravimo, da je f na intervalu [a,b] integrabilna v Riemannovem smislu.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} S_p(f)$$

I: Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je integrabilna. To velja tudi za funkcije, ki so nezvezne v končno ali števno neskončno mnogo točkah.

T: $a \leq b; f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Če je $f(x) \leq g(x)$, potem je $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

P: $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \quad b \geq a \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

T: Če je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

IZREK O POVPREČNI VREDNOSTI: Med infimumom m in supremumom M na intervalu [a,b]

zvezne funkcije f obstaja med taka točka c, da je $c = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$.

T: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad a \leq b$

OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA: Če je f zvezna funkcija, je njen določeni integral

$F(t) = \int_a^t f(x) dx$ odvedljiva funkcija zgornje meje r in velja: $F'(t) = f(t)$.

P: (DRUGI OSNOVNI IZREK INTEGRALSKEGA RAČUNA): Če je $F'(x) = f(x) \forall x$, je

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

T: Če je $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ monotona odvedljiva funkcija in f zvezna, potem velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \text{ če je } \varphi(\alpha) = a \text{ in } \varphi(\beta) = b.$$

D: IZLIMITIRANI INTEGRALI: $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$. Če limita obstaja, pravimo, da je

integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ **konvergenten**, če pa ne, je **divergenten**.

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^r} = \frac{a}{r-1} \quad r > 1$$

D: $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ Integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ je **ABSOLUTNO KONVERGENTEN**, če je konvergenten integral $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$.

T: Vsak absolutno konvergenten integral je konvergenten.

T: Če je $|f(x)| \leq g(x)$ in je integral $\int_a^{\infty} g(x) dx$ konvergenten, potem je integral $\int_a^{\infty} f(x) dx$ **absolutno konvergenten**.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad \alpha > 1 \Rightarrow \exists \text{ konvergira}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad \alpha \leq 1 \Rightarrow \nexists \text{ nekonvergira}$$

$$\left. \begin{array}{l} \int_a^{a+1} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} \\ \int_{a-1}^a \frac{dx}{(a-x)^{\alpha}} \end{array} \right\} \alpha < 1 \Rightarrow \exists \text{ konvergira}$$

$$\left. \begin{array}{l} \int_a^{a+1} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} \\ \int_{a-1}^a \frac{dx}{(a-x)^{\alpha}} \end{array} \right\} \alpha \geq 1 \Rightarrow \nexists \text{ nekonvergira}$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \exists \wedge 0 \leq g(x) \leq f(x) \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx \exists$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \nexists \wedge 0 \leq f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx \nexists$$

TRAPEZNA FORMULA: $\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$

SIMPSONOVA FORMULA: $\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \dots + 2f(a+(n-1)h) + f(b))$

PLOŠČINA MED KRIVULJAMA: $S = \int (f(x) - g(x)) dx, f(x) \geq g(x) \forall x$

DOLŽINA KRIVULJE: $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

– parametrično podane: $s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$

– v polarnih koordinatah: $s = \int_a^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\phi$

PROSTORNINA VR TENINE: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

POVRŠINA VR TENINE: $S_{pl} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

TEŽIŠČE RAVNINSKEGA LIKA: $x_T = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx \quad y_T = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx$

PAPPUSOVI IZREKI: $S = 2\pi y_T s = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$ **Površina vrtenine**, ki nastane, ko se ravninska krivulja zavrti okrog osi, ki je ne seka, je enaka produktu dolžine krivulje in poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče te krivulje.

$V = 2\pi y_T S = \pi \int_a^b y^2 dx$ **Prostornina vrtenine**, ki nastane, ko se ravninski lik zavrti okrog osi, ki ga ne seka, je enaka produktu ploščine tega lika in poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče.

VEKTORJI IN VEKTORSKI PROSTORI

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\|\alpha \vec{r}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{r}\|$$

$$\alpha \vec{r} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\forall \vec{a} \quad \exists (-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$$

$$1\vec{a} = \vec{a}$$

$$0\vec{a} = \vec{0}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\|\vec{r}\|} \quad \cos \beta = \frac{y}{\|\vec{r}\|} \quad \cos \gamma = \frac{z}{\|\vec{r}\|} \quad \begin{array}{l} \text{smern} \\ \text{koti} \end{array}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|\vec{r}\|^2}$$

$\alpha \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$; \vec{a} in \vec{b} sta **KOLINEARNA** $\Leftrightarrow \exists k \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Takrat je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

$\alpha \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$; \vec{a}, \vec{b} in \vec{c} sta **KOPLANARNI** $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

D: **LINEARNA KOMBINACIJA VEKTORJEV** $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ je vsak vektor oblike

$\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$). Vektor $\vec{0}$ je vedno linearna kombinacija vektorjev. **Trivialna linearna kombinacija**: Vsi koeficienti v kombinaciji so 0.

D: Vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ so **LINEARNO NEODVISNI**, če iz $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$ sledi $\alpha_i = 0$

T: \vec{a} in \vec{b} sta linearno neodvisna $\Leftrightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. Potem nista kolinearna.

ENAČBA PREMICE:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

ENAČBA RAVNINE:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

$$ax + by + cz = d \quad d = \vec{r}_0 \circ \vec{n} \quad \vec{n} = (a, b, c)$$

skozi tri točke:

$$\begin{aligned} \vec{r}_A = \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) & \vec{r}_B = \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{r}_C = \vec{c} &= (c_1, c_2, c_3) & \vec{d} &= (x, y, z) \end{aligned}$$

$$(\vec{d} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}) = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{RAZDALJA TOČKE OD PREMICE: } d(T, p) = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\|}{\|\vec{s}\|}$$

$$\text{RAZDALJA TOČKE OD RAVNINE: } D(T_1, \Psi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

RAZDALJA MED DVEMA PREMICA:

vzporednici

$$p: \vec{r} = \vec{r}_p + t\vec{s} \quad q: \vec{r} = \vec{r}_q + t\vec{s}$$

$$d(p, q) = \frac{\|\vec{s} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_q)\|}{\|\vec{s}\|}$$

mimobežnici

$$p: \vec{r} = \vec{r}_p + t\vec{s}_p \quad q: \vec{r} = \vec{r}_q + t\vec{s}_q$$

$$d(p, q) = \frac{\|(\vec{r}_p - \vec{r}_q), \vec{s}_p, \vec{s}_q\|}{\|\vec{s}_p \times \vec{s}_q\|}$$

SKALARNI PRODUKT:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi = \|\vec{a}\| \cdot \text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

$$\vec{a} \circ (\beta \vec{b}) = \beta (\vec{a} \circ \vec{b})$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0; \quad \vec{a} \circ \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

VEKTORSKI PRODUKT:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2, \quad \vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \quad \vec{b}_1 \perp \vec{a}, \quad \vec{b}_2 \parallel \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \quad \vec{a} \times (\beta \vec{b}) = \beta (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\beta \vec{b}) = \beta (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{e} \perp \vec{a}, \quad \|\vec{e}\| = 1; \quad \|\vec{e} \times \vec{a}\| = \|\vec{a}\|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

MEŠANI PRODUKT:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$V_{\text{paralelipiped}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

$$V_{\text{piramida}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\alpha \vec{a}, \beta \vec{b}, \gamma \vec{c}) = \alpha \beta \gamma (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha_1 (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \alpha_2 (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

Trije vektorji so **KOPLANARNI**, ko je njihov mešani produkt enak 0.

VEČKRATNI PRODUKTI:

1. dvojni vektorski produkt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0 \quad \text{Jacobijske identitete}$$

2. Lagrangeova identiteta:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} \Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$3. (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{d}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{d}) \vec{a} = \vec{d} \cdot (\vec{a}, \vec{b}) \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{a}, \vec{b}) \vec{d}$$

D: Realen **VEKTORSKI PROSTOR** V je neprazna množica V (njeni elementi so vektorji), opremljena z operacijama seštevanja in množenja s skalarjem, ki zadoščata naslednjim pogojem:

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\exists \vec{0} \in V : \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$$

$$\exists (-\vec{u}) : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

D: Podmnožica U vektorskega prostora V je **VEKTORSKI PODPROSTOR**, če je vektorski prostor za isti operaciji kot V .

T: Neprazna podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor

$$\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U \quad \text{in} \quad \vec{u} \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\vec{u} \in U$$

T: Neprazna podmnožica U vektorskega prostora V je vektorski podprostor

$$\Leftrightarrow \forall \vec{u}, \vec{v} \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U$$

T: $\forall \vec{v} \in V : 0 \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad -\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$

T: Če je U vektorski podprostor V , potem je $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n \in U$ za $\forall \vec{u}_i \in U, \alpha_i \in \mathbb{R}$.

D: **LINEARNA LUPINA** podmnožice S v vektorskem prostoru V je množica vseh linearnih kombinacij vektorjev iz S .

$$[S] = \{\lambda_1 \vec{s}_1 + \dots + \lambda_n \vec{s}_n : \vec{s}_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$S = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \Rightarrow [S] = \{\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

T: $[S]$ je vektorski podprostor v V , $S \subseteq [S]$, če je U vektorski podprostor V in $S \subseteq U \Rightarrow [S] \subseteq U$.

D: Podmnožica S v vektorskem prostoru V je **OGRODJE**, če je $[S] = V$. To pomeni, da se mora dati vsak vektor iz V izraziti kot linearna kombinacija vektorjev iz S .

D: Končna množica $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ je **LINEARNO NEODVISNA**, če iz $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$.

□ Če je S linearno neodvisna, je linearno neodvisna tudi vsaka njena neprazna podmnožica.

D: Neskončna množica v vektorskem prostoru V je linearno neodvisna, če je linearno neodvisna vsaka njena končna podmnožica.

D: Podmnožica B v vektorskem prostoru V je **BAZA**, če je ogrodje in je linearno neodvisna hkrati.

I: V vsakem vektorskem prostoru (razen 0) obstaja baza.

D: Vektorski prostor V je **KONČNO RAZSEŽEN**, če ima kako končno ogrodje. $S = \{v_1, \dots, v_n\}$

L: Če je S ogrodje vektorskega prostora V in T taka podmnožica V , da lahko vsak vektor iz S izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev iz T , potem je tudi T ogrodje.

L: Če je A linearno neodvisna, S pa ogrodje v vektorskem prostoru V , je $|A| \leq |S|$.
($A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ $m \leq n$).

I: Vsak končno razsežen vektorski prostor ($V \neq 0$) ima bazo; vse baze imajo enako moč in vsako linearno neodvisno podmnožico $A \subseteq V$ lahko dopolnimo do baze.

D: **DIMENZIJA ALI RAZSEŽNOST**, $\dim V$, vektorskega prostora V je moč baze.

T: Če je $\{a_1, \dots, a_n\}$ linearno neodvisna množica v n -razsežnem vektorskem prostoru, je baza.

D: **EVKLIDSKI PROSTOR** je realen vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom. **Skalarni produkt** na realnem vektorskem prostoru V je predpis, ki vsakemu urejenemu paru (a, b) vektorjev iz V priredi realno število $\langle a, b \rangle$. Pri tem mora veljati:

$$\forall a, a_1, a_2, b \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$$

$$\langle a_1 + a_2, b \rangle = \langle a_1, b \rangle + \langle a_2, b \rangle$$

$$\langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle$$

$$\langle a, a \rangle \geq 0 \quad \langle a, a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$$

D: **NORMA ALI DOLŽINA VEKTORJA** a v vektorskem prostoru V s skalarnim produktom je

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \text{trikotniška neenakost}$$

$$\|a\| \geq 0, \quad \|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$$

L (Schwarz, Cauchy, Bunjakovski): $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Enakost velja, če sta vektorja linearno odvisna.

D: **KOT MED VEKTORJEMA** $a, b \in V$, $a, b \neq 0$ je tisti kot $\varphi \in [0, \pi]$, ki zadošča pogoju:

$$\cos \varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}. \text{ Če je } a=0 \text{ ali } b=0 \text{ pravimo, da sta vektorja pravokotna.}$$

D: Vektorja a in b v evklidskem prostoru sta **ORTOGONALNA ALI PRAVOKOTNA**, če je $\langle a, b \rangle = 0$. Množica vektorjev je **ORTOGONALNA**, če sta poljubna dva različna vektorja v njej ortogonalna. Množica je **ORTONORMIRANA**, če je ortogonalna in imajo vsi njeni vektorji dolžino 1.

T: Vsaka ortogonalna množica $\{a_1, \dots, a_n\}$ neničelnih vektorjev je linearno neodvisna.

□ **GRAMM-SCHMIDTOV POSTOPEK**: Postopek, po katerem dobimo ortogonalno ali ortonormirano bazo s popraviljanjem vektorjev iz prostora.

$$\lambda_a^b = \frac{\langle x_a, y_b \rangle}{\langle y_b, y_b \rangle} \quad \begin{array}{l} x \rightarrow \text{originalni vektorji} \\ y \rightarrow \text{popravljeni vektorji} \end{array} \quad \text{npr. } y_3 = x_3 - \lambda_3^2 y_2 - \lambda_3^1 y_1.$$

I: V vsakem evklidskem prostoru $V \neq 0$ obstaja ortonormirana baza.

D: **KOMPLEKSNI VEKTORSKI PROSTOR** je množica V , opremljena z operacijama seštevanja in množenja. Veljajo enaki pogoji kot za realni vektorski prostor

D: **UNITARNI PROSTOR** je kompleksen končno razsežen vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom. **Skalarni produkt** je predpis, ki vsakemu paru vektorjev $u, v \in V$ priredi kompleksno število $\langle u, v \rangle$. Pri tem mora veljati:

$$u, u_1, u_2, v \in V, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$$

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

MATRIKE

D: **REALNA MATRIKA** velikosti $m \times n$, $M_{m,n}$, je tabela oblike $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$

□ **Stolpec:** $M_{m,1}$, **Vrstica:** $M_{1,n}$, **Kvadratna matrika:** $M_{n,n} = M_n$

□ **Diagonalna matrika:** $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$, **Identična matrika:** $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **Skalarna**

matrika: $A = \alpha I$, **Zgornja trikotna $n \times n$ matrika** (podobno **spodnja**): $Z_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$;

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & e_{ij} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{ij} = 1$$

T: Matrika $M_{m,n}$ je za naslednji operaciji vektorski prostor z dimenzijo $m \times n$.

$$A, B \in M_{m,n}$$

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{m,n}$$

$$\alpha A = \alpha [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] \in M_{m,n}$$

□ $A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$; **Ogrodje:** $\{E_{ij} : i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\}$

D: **TRANSPONIRANA MATRIKA** matrike A je tista matrika, ki ima na mestu ij tisti element matrike A , ki je v njej na mestu ji . $A^T = [a_{ji}] \iff A = [a_{ij}]$

D:

$$A \in M_{m,n}, B \in M_{n,p}$$

$$AB = [a_{ij}] [b_{jk}] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{jp} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{2j} b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{jp} \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

□ **Nilpotentna matrika:** $A^2 = 0$, **Idempotentna matrika:** $A^2 = A$, **Antisimetrična matrika:** $A^T = -A$

D: Preslikava $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **LINEARNA**, če obstaja taka matrika A velikosti $m \times n$, da je

$$A(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

T: Preslikava $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **LINEARNA** natanko takrat, ko je

$$A(a+b) = A(a) + A(b), \quad A(\alpha a) = \alpha A(a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \text{ oz.}$$

$$A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

□ Linearna preslikava preslika 0 v 0. ($A(0) = 0$).

D: **LINEARNA PRESLIKAVA** $A: U \rightarrow V$ je predpis, ki vsakemu vektorju $u \in U$ priredi natanko določen vektor $A(u) \in V$, pri čemer velja:

$$A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b) \quad \forall a, b \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

□ **LINEARNI FUNKCIONAL** je taka funkcija A , ki slika iz \mathbb{R}^n v \mathbb{R} ($A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

T: Naj bo $\{a_1, \dots, a_n\}$ baza za U , $\{b_1, \dots, b_n\}$ pa poljubni vektorji iz V . Potem obstaja natanko ena preslikava $A: U \rightarrow V$, da je: $A(a_1) = b_1, \dots, A(a_n) = b_n$.

$$\alpha (Au)_M = A_{M,N} u_N$$

D: $A: U \rightarrow V$ linearna preslikava.

$$\text{ZALOGA VREDNOSTI: } R_A = \{Au : u \in U\} = \{v \in V : \exists u \in U, v = Au\} \subseteq V.$$

$$\text{JEDRO: } N_A = \{u \in U : Au = 0\} \subseteq U.$$

T: R_A je vektorski podprostor za V , N_A pa za U .

T: Če je $A: U \rightarrow V$ linearna preslikava in $\{a_1, \dots, a_n\}$ baza za U , je potem $\{A(a_1), \dots, A(a_n)\}$ ogrodje za R_A .

(Če je $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, potem stolpci matrike A tvorijo ogrodje za R_A .)

T: $A: U \rightarrow V$. A je **SURJEKTIVEN** (operator) $\Leftrightarrow R_A = V$.

A je **INJEKTIVEN** $\Leftrightarrow N_A = 0$.

D: A je **INJEKTIVEN**, če iz $A(u_1) = A(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$.

T: $A: U \rightarrow V$ linearen operator. $\dim N_A + \dim R_A = \dim U$.

D: $\dim R_A = \text{rang } A$

□ $\text{rang } A =$ št. linearnih neodvisnih vrstic/stolpcev (množenje vrstice/stolpca z nen ničelnim številom; menjava vrstic/stolpcev; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic/stolpcev neki vrstici/stolpcu).

□ $\dim N_A =$ št. spremenljivk $-\text{rang } A$

□ stolpci matrike A so elementi R_A , R_A je množica vseh linearnih kombinacij stolpcev matrike A .

□ **SISTEMI LINEARNIH ENAČB:** (množenje vrstice z nen ničelnim številom; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic neki vrstici; menjava vrstic). **HOMOGEN SISTEM** je vedno rešljiv $(0, \dots, 0)$, množica rešitev je vektorski podprostor v R^n ;

$\dim(\text{v.pr. rešitev}) =$ št. rešitev $=$ št. spremenljivk $-\text{rang prirejen}$ matrike **NEHOMOGEN**

SISTEM je rešljiv $\iff \text{rang } A_{(\text{prirejen mat.})} = \text{rang } \bar{A}_{(\text{razširjen mat.})}$; Če je rešljiv:

$\text{mn. reš.} = \text{partikularna reš.} + \text{mn. reš. prirejenega homogenega sistema}$

T: Naj bo u **PARTIKULARNA REŠITEV** sistema $Ax = b$. Vsako rešitev tega sistema lahko izrazimo kot vsoto $x = u + h$, kjer je h rešitev homogenega sistema $Ah = 0$. Pri danem b ima sistem $Ax = b$ največ eno rešitev, če ima homogen sistem $Ax = 0$ le rešitev $x = 0$.

D: $A \in M_n$. **INVERZNA MATRIKA** je taka matrika, da je $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

T: $A \in M_n, A: R^n \rightarrow R^n, N_A = 0 \iff \exists! X \in M_n : XA = AX = I$

T: $R_A = R^n \iff \exists! X \in M_n : XA = AX = I$

D: **PERMUTACIJA** števil $1, \dots, n$ je bijektivna preslikava množice vase.

D: **TRANSPOZICIJA** je permutacija, ki zamenja le dva elementa.

D: $\alpha \tau \in S_n \rightarrow \sigma \tau \in S_n$ ($(\alpha \tau)(i) = \alpha(\tau(i))$). Produkt $\sigma \tau$ je permutacija, ki jo dobimo, če najprej izvedemo τ in nato σ .

T: Vsako permutacijo lahko izrazimo kot produkt transpozicij.

D: **SODE PERMUTACIJE** so tiste, ki se dajo zapisati kot produkt sodomnogih transpozicij. Enako velja za **LIHE**.

□ **INVERZIJA** je pojav, da je večje število pred manjšim. Pri **SODI INVERZIJI** nastopa sodo število inverzij, pri **LIHI** pa liho.

D: Predznak permutacije: $\uparrow : \begin{cases} 1, 2 \text{ je sodo} \\ \vdots \\ 1, 2 \text{ je liho} \end{cases} : \text{sgn}$

$$D: \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \text{sgn } \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$T: \bullet \det \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = - \det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \bullet \det \begin{bmatrix} a_1 + \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ enako za stolpce} \bullet \det A^T = \det A$$

□ (če zamenjamo dve vrstici/stolpca, se predznak spremeni; če vrstico/stolpec pomnožimo s skalarjem, se determinanta pomnoži s tem skalarjem; prištevanje linearne kombinacije drugih vrstic/stolpcev neki

vrstici/stolpcu; razvoj po vrstici/stolpcu). Determinanta trikotne ali diagonalne matrike je enaka produktu elementov na diagonalni.

T: $\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad A, B \in M_n$

□ **MINOR** k elementu a_{ij} , D_{ij} , je poddeterminanta, v kateri izpustimo vrstico i in stolpec j iz determinante.
KOFAKTOR k elementu a_{ij} je $(-1)^{i+j} D_{ij}$.

□ $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A) \cdot I$; \tilde{A} je **PRIREJENKA** k matriki A : $\tilde{A} = [(-1)^{i+j} D_{ij}]$.

T: Matrika $A \in M_n$ je **OBRNLJIVA** ($\exists A^{-1}$) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Takrat je $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$.

□ $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \quad \det A^2 = (\det A)^2 \quad \det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$

□ **CRAMERJEVO PRAVILO**: Če je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ in $Ax = b$, potem je

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot D_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

T: $A \in M_{m,n}$; $\text{rang} A$ je največji tak k , da v A obstaja $k \times k$ podmatrika z determinanto različno od 0.

D: Vektor $a \in V$ je **LASTNI VEKTOR** za linearno preslikavo $A: V \rightarrow V$, če je $Aa = \lambda a$ za kak $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Število λ imenujemo **LASTNA VREDNOST** za A , če $a \neq 0$.

T: λ je lastna vrednost za linearno preslikavo A natanko takrat, ko je $\det(A - \lambda I) = 0$.

D: **KARAKTERISTIČNI POLINOM** je $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ za linearno preslikavo A .

T: Linearno preslikavo $A: V \rightarrow V$ lahko predstavimo z **DIAGONALNO MATRIKO** (A se da diagonalizirati) natanko tedaj, ko obstaja baza za V iz lastnih vektorjev za A .

D: Matrika $S \in M_n(\mathbb{R})$ je **SIMETRIČNA**, če je $S^T = S$.

T: Če je $S \in M_n$ simetrična, je $y^T S x = x^T S y \quad \forall x, y$ (stolpca $\in \mathbb{R}^n$)

T: Lastne vrednosti simetrične matrike $S \in M_n(\mathbb{R})$ so realna števila.

T: Lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim simetrične matrike, so med seboj pravokotni.

I: Če je $S \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrika, obstaja taka matrika $P \in M_n(\mathbb{R})$, da je $P^T S P = D$ diagonalna lastna vrednost matrike S . Matrika P ima za stolpce ortonormirane lastne vektorje matrike S . Velja: $P^{-1} = P^T$.

$$\square A^n : P D^n P^{-1} \quad P : \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_m \\ | & & | \end{bmatrix} \quad D^n : \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ | & & & | \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ | & & & | \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ | & & & | \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m^n \\ | & & & | \end{bmatrix}$$

v_i - lastni vektorji (stolpci)
 λ_i - lastne vrednosti

D: Matrika P je **ORTOGONALNA**, če je $P^{-1} = P^T$, $P^T P = P P^T = I$.

T: $P \in M_n(\mathbb{R})$ je ortogonalna $\Leftrightarrow P^T P = P P^T = I \Leftrightarrow$ stolpci in vrstice matrike P so ortonormirani.

$$\begin{aligned} A^{-1} / AX = B \quad XA = B / A^{-1} \\ X = A^{-1}B \quad X = BA^{-1} \end{aligned}$$

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK, PARCIALNI ODVODI, TOTALNI DIFERENCIAL, POSREDNO ODVAJANJE, TANGENTNA RAVNINA IN TAYLORJEVA VRSTA, EKSTREMI ZA FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

D: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, **FUNKCIJA** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je predpis, ki vsakemu $x \in D$ priredi natanko določeno število $y = f(x) \in \mathbb{R}$.

D: $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$. f je **V TOČKI** $a \in D$ **ZVEZNA**, če

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$. Ko se x bliža a , se $f(x)$ bliža $f(a)$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. f je zvezna na D , če je **ZVEZNA** v vsaki točki $a \in D$.

T: Če je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, je zvezna po vsaki spremenljivki posebej. Obrano ni res.

D:

$$\begin{aligned} z = f(x_1, \dots, x_n), f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n, \\ a \in D, a = (a_1, \dots, a_n), f_1(x_1) = f(x_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = f'_1(a); \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = f'_2(a); \dots$$

D: Podmnožica $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je **ODPRTA**, če okrog vsake njene točke lahko opišemo n -razsežno kroglo, ki je vsa vsebovana v D . $(\forall a \in D)(\exists \delta > 0)(K(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \delta\} \subseteq D)$.

D: Množica je **ZAPRTA**, če je njen komplement odprt.

D:

$$D^{\text{odprta}} \subseteq \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D, a = (a_1, \dots, a_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

...

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h e_n) - f(a)}{h}$$

$(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) = a + h e_1$
 \dots
 $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + h) = a + h e_n$

D: **VIŠJI ODVODI:**

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

T: Če sta odvoda $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ zvezni funkciji, potem je $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. To velja tudi za funkcije več kot dveh spremenljivk.

D:

$$U^{\text{odprta}} \subseteq \mathbb{R}^n, f : U^{\text{odprta}} \rightarrow \mathbb{R}, a \in U,$$

$$\text{grad } f(a) = (\nabla f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

D: $u = f(x_1, \dots, x_n), D \subseteq \mathbb{R}^n, f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D$. **TOTALNI DIFERENCIAL FUNKCIJE f V TOČKI a**

$$\text{je } du = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n. \quad du = \text{grad } f(a)dx = (\nabla f)(a)dx.$$

T: Če je $D^{\text{odprta}} \subseteq \mathbb{R}^n, f : D^{\text{odprta}} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija z zveznimi parcialnimi odvodi, potem za $\forall a \in D$ velja:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\Delta u - du(a)}{\|h\|} = 0. \quad \begin{aligned} \Delta u &= f(a+h) - f(a) \\ du(a) &= (\nabla f)(a) \circ h \end{aligned}$$

$$\square \frac{du}{dt}(t_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x(t_0)) \frac{dx_1}{dt}(t_0) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x(t_0)) \frac{dx_n}{dt}(t_0) = (\nabla u)(x(t_0)) \frac{dx}{dt}(t_0)$$

T: Naj ima funkcija $u = u(x_1, \dots, x_n)$ zvezne parcialne odvode in naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija.

$$\text{Potem velja } \frac{d}{dt} u(x(t)) = (\nabla u)(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t).$$

$$\square \frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

$$\square f(x, y) = 0, \quad y = y(x); \quad \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

D: **ODVOD FUNKCIJE u GLEDE NA VEKTOR v V TOČKI a :**

$$(\nabla_v u)(a) = \left. \frac{d}{dt} f(a+tv) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot v_n = \langle (\nabla f)(a), v \rangle; \quad \begin{aligned} u &= f(x) \\ x &= a+tv, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□ Če ima v isto smer kot $(\nabla f)(a)$, potem je $(\nabla_v u)(a) = \|(\nabla f)(a)\|$. Če pa ima v nasprotno smer kot $(\nabla f)(a)$, potem je $(\nabla_v u)(a) = -\|(\nabla f)(a)\|$.

T: $\text{grad } f(a) = (\nabla f)(a)$ kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije f v okolici točke a .

□ $(\nabla f)(a)$ je pravokoten na **TANGENTNO RAVNINO** na ploskev v točki a .

□ **TAYLORJEVA VRSTA:**

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(h \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right)^i \Big|_{(a,b)} + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{n+1} \Big|_{(a+\xi h, b+\xi k)} \quad \begin{aligned} \xi &\in (0, 1) \\ h &= x - a \\ k &= y - b \end{aligned}$$

T: Če ima odvedljiva funkcija $u = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ v točki $a = (a_1, \dots, a_n)$ lokalni ekstrem, so v tej

$$\text{točki vsi njeni parcialni odvodi enaki 0. } \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

$$T: K(a, b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \Big|_{(a,b)}. \quad \text{Če ima } u = f(x, y) \text{ v točki } (a, b) \text{ stacionarno točko in je}$$

$K(a, b) > 0$, potem je v (a, b) **lokalni ekstrem**, in sicer **lokalni minimum**, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, ali

lokalni maksimum, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$. Če je $K(a, b) < 0$, potem v točki (a, b) **ni lokalnega**

ekstrema. Če pa je $K(a, b) = 0$, **ne moremo določiti**, če je v točki (a, b) lokalni ekstrem ali ne.