REŠITVE 2. DOMAČE NALOGE - KEMIJA
predmet: MATEMATIKA 1
asist. Andreja Drobnič Vidic

ZAPOREDJA

Matematika lahko odkrije zaporedje celo v kaosu.

S. Stein

1.
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3\sqrt{n}}{n(\sqrt{n}-2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{0}{1} = 0$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+n}{\sqrt[3]{n^4-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}}} = \frac{0}{1} = 0$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}{4-3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot(\frac{2}{3})^n+2\cdot 3^{-1}}{4\cdot(\frac{1}{3})^n-1} = \frac{2/3}{-1} = -\frac{2}{3}$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3e^n+2}{2e^{n+1}+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+2\cdot(\frac{1}{e})^n}{2e+3\cdot(\frac{1}{e})^n} = \frac{3}{2e}$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{2n-\sqrt{4n^2-2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot(n+\sqrt{4n^2-2})}{4n^2-(4n^2-2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2\sqrt{4n^2-2}}{2} = \infty$
     Realna limita ne obstaja, izraz gre proti neskončnosti.
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{4n}{n-1}} = e^4$
   - $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3(n^2+1)}{3n^2+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{3n^2+1}{2}}\right)^{\frac{3n^2+1}{2}\cdot\frac{2n^2}{3n^2+1}} = e^{\frac{2}{3}}$

2. a) Členi zaporedja $a_n = \frac{n+2}{2n-3}$ so po vrsti

   $$a_1 = -3, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = \frac{5}{3}, \quad a_4 = \frac{6}{5}, \ldots$$

   Od tod razberemo, da zaporedje ni niti padajoče (saj je $a_1 < a_2$) niti naraščajoče (saj je $a_2 > a_3$) , tj. ni monotono.

   b) Prvi člen $a_1 = -3$, je natančna spodnja meja, saj takoj pokažemo, da velja$-3 \le a_n$ za vsak naravni n. Če pa bi mejo poljubno malo povečali, bi 1. člen zaporedja postal manjši od nje, kar ni mogoče. Podobno pokažemo, da je število 4 natančna zgornja meja zaporedja.

   c) Ne.

3. a) Zaporedje je padajoče (in torej monotono).
   b) Da.
   c) Natanko 12 členov je zunaj podane okolice limite.

4. a) Ne.
   b) Da.
   c) Da.

5. - $\inf\{a_n\} = -2$, $\sup\{a_n\} = 1$, zaporedje ni monotono (je alternirajoče), nima limite (ima stekališči -1 in 1).
   - $\inf\{a_n\} = 0$, $\sup\{a_n\} = \frac{3}{2}$, zaporedje ni monotono, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} + 1\right) = 1$.
   - $\inf\{a_n\} = -1$, $\sup\{a_n\} = 1$, ni monotono, nima limite, stekališča so $0, 1, -1$.

6. a) Zaporedje je padajoče (torej monotono).
   b) 1998.
   c) $\inf\{a_n\} = -\frac{1}{2}$, $\sup\{a_n\} = \frac{3}{10}$.

7. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n) = 2$, zunaj ϵ-ske okolice je 7 členov.

8. $a_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$; vsota vrste je $\dfrac{a_1}{1-q}$, $|q| < 1$.

9. Iz Wikipedije lahko preberemo, da je razpadni čas v jedrski fiziki čas, v katerem pade število atomskih jeder, ki radioaktivno razpadajo, na $1/e$ začetne vrednosti, pri čemer je e osnova naravnega logaritma. Razpolovni čas je v jedrski fiziki čas, v katerem pade število atomskih jeder, ki radioaktivno razpadajo, na eno polovico začetne vrednosti. Izpeljimo rešitev za rapolovni čas, ker so zapisi enostavnejši.

   Poglejmo najprej, kako razpada 1. tableta antibiotika:
   1. V času $t = 0$ ure imamo 250 mg tablete antibiotika.
   2. Po $t = 2{\cdot}5$ ure imamo $0{\cdot}5 \cdot 250$ mg tablete antibiotika.
   3. Po $t = 5$ ur le še $0{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}5 \cdot 250$ mg tablete antibiotika in tako naprej.
   V terapiji imamo skupno $t = 27 \cdot \frac{6}{2{\cdot}5}$ razpadov (približno 65 razpadov), zato od prve tablete na koncu ostane

$$Q_1 = 250 \cdot (0{\cdot}5)^{27\cdot\frac{6}{2{\cdot}5}} \quad \text{mg}.$$

   Druge tablete imajo zaporedoma manj razpadov. Zapišemo po vrsti

$$Q_2 = 250 \cdot (0{\cdot}5)^{26\cdot\frac{6}{2{\cdot}5}}, \quad Q_3 = 250 \cdot (0{\cdot}5)^{25\cdot\frac{6}{2{\cdot}5}}, \quad Q_4 = 250 \cdot (0{\cdot}5)^{23\cdot\frac{6}{2{\cdot}5}}, ...,$$

in zadnja $Q_{28} = 250 \cdot (0\dot{}5)^0$. Cilj je sešteti končno geometrijsko vrsto.

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 + ... + Q_{28} &= 250 \cdot (((0\dot{}5)^{\frac{6}{2\dot{}5}})^{27} + ((0\dot{}5)^{\frac{6}{2\dot{}5}})^{26} + ... + ((0\dot{}5)^{\frac{6}{2\dot{}5}})^0) = \\ &= \frac{1 - ((0\dot{}5)^{\frac{6}{2\dot{}5}})^{28}}{1 - (0\dot{}5)^{\frac{6}{2\dot{}5}}} \\ &= 308 \quad \text{mg.} \end{aligned}$$

Po terapiji je v telesu 308 mg antibiotika. Opazimo, da se masa bistveno ne spremeni z daljšanjem terapije. (Kasneje v študijskem letu lahko z znanjem diferencialnih enačb izpeljemo bolj znano splošno formulo.)

10. a) da
    b) da
    c) da
    d) da