
4. DOMAČA NALOGA - KEMIJA

predmet: MATEMATIKA 1
asist. Andreja Drobnič Vidic

INTEGRALI

Integralni račun daje človeškemu razumu neomejeno področje za njegovo dejavnost.

A. Comte

1. Izračunaj nedoločeni integral z zamenjavo spremenljivke:

a) $\int \frac{x+3}{2x-1} dx$

b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$

c) $\int \frac{2e^x dx}{4e^x - 5}$

Rešitev:

a) $\frac{2x-1}{4} + \frac{7}{4} \ln|2x-1| + C = \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \ln|2x-1| + C_1$

b) $\sqrt{x^2+2x+3} + C$

c) $\frac{1}{2} \ln|4e^x - 5| + C$

2. Reši naslednje integrale z integracijo po delih:

a) $\int (3x+1) \sin(2x) dx$

b) $\int x \ln x dx$

c)* $\int (x^2 - 2x)e^{2x} dx$

Rešitev:

a) $-\frac{(3x+1)}{2} \cos(2x) + \frac{3}{4} \sin(2x) + C$

b) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

c) $\frac{e^{2x}}{4} (2x^2 - 6x + 3) + C$

3. Izračunaj integrale naslednjih racionalnih funkcij:

a) $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 6} dx$

b) $\int \frac{dx}{9 - x^2}$

c)* $\int \frac{x^6 dx}{x^2 - 1}$

Rešitev:

a) $\ln \left| \frac{(x - 3)^9}{(x - 2)^7} \right| + C$

b) $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{3 + x}{3 - x} \right| + C$

c)* $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$

4. Izračunaj integrale naslednjih racionalnih funkcij:

a) $\int \frac{4x + 2}{x^2 + 2} dx$

b) $\int \frac{8x + 12}{x^2 - 6x + 13} dx$

Rešitev:

a) $2 \ln |x^2 + 2| + \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

b) $4 \ln(x^2 - 6x + 13) + 18 \arctan \frac{x - 3}{2} + C$

5. Izračunaj integrale naslednjih racionalnih funkcij:

a) $\int \frac{4}{(x^2 + 4)x} dx$

b) $\int \frac{3(x^2 + x)}{(x^2 + 2)(2x - 1)} dx$

c)* $\int \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

Rešitev:

a) $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$

b) $\frac{1}{2} \ln \left| (x^2 + 2)(x - \frac{1}{2}) \right| + \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

$$\text{c)* } \frac{1}{1-x} + \ln|x^2 - 1| + C$$

6. Izračunaj integrale naslednjih iracionalnih funkcij:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+6x+1}}$$

$$\text{d)* } \int \frac{-7x^2+x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{e) } \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

Rešitev:

$$\text{a) } \arcsin \frac{x-2}{3} + C$$

$$\text{b) } \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + C?$$

$$\text{c) } -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| 2x+3 + \sqrt{2}\sqrt{2x^2+6x+1} \right| + C?$$

$$\text{d*) } \left(\frac{7}{2}x-1\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{5}{2} \arcsin x + C$$

$$\text{e) } 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\left(\ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| \right) + C?$$

7. Izračunaj določeni integral dane trigonometrijske funkcije:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$$

$$\text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx$$

$$\text{c) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \cos^2 x dx$$

$$\text{d) } \int_0^{2\pi} (1 - \cos x)^2 dx$$

$$\text{e) } \int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos x} dx$$

Rešitev:

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx = \int_0^1 t^3 \, dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

b) $\frac{1}{5}$

c) 0 (Opomba. Integral lihe funkcije na simetričnem intervalu, torej intervalu od $-a$ do a , $a \in \mathbb{R}$, je vselej 0.)

d) 3π

e) 4