

MATEMATIKA 1 - naloge za 1. semester

1. Izračunaj limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!^n}{((n+1)! - n!)^{n+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1).$$

2. Zaporedje $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je dano z rekurzijsko formulo

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2}$$

in s prvim členom $x_1 = a > 0$. Dokaži, da je naraščajoče. Pri katerih $a > 0$ zaporedje konvergira in kolikšna je tedaj njegova limita? Posebej obravnavaj primer $a = 1$.

3. Dokaži, da vsako naraščajoče zaporedje s stekališčem konvergira.

4. Ali zaporedje s členi $x_n = \sin n$ konvergira?

5. Razišči konvergenco in absolutno konvergenco vrst

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}.$$

6. Izračunaj limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \cos x}{x^2}.$$

7. Izračunaj limiti

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right).$$

8. Izračunaj limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{1}{x}.$$

9. Poišči maksimalno definicijsko območje $D_f \subseteq \mathbb{R}$ in zalogo vrednosti $Z_f \subseteq \mathbb{R}$ funkcije f , dane s predpisom

$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}.$$

Ali je funkcija f injektivna?

10. Harmonično nihanje ima enačbo oblike $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$. Ali je vsota $f = f_1 + f_2$ harmoničnih nihanj z enačbama

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

harmonično nihanje?

11. Načrtaj graf funkcije $f(x) = \arcsin(\cos x)$.
12. Dokaži, da za vsako zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ veljata naslednji trditvi:
- (a) Če f ni omejena niti navzgor niti navzdol, je surjektivna.
- (b) Če je f bijektivna, je bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča.

13. Ali je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & |x| \leq 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

zvezna v 1?

14. Ali je abscisna os tangenta krivulje z enačbo $f(x) = \ln(x^2 + 1)$?
15. Pod katerim kotom seka graf funkcije $f(x) = x^3 - x + 1$ ordinatno os?
16. Pod katerim kotom vidimo iz izhodišča koordinatnega sistema graf parabole $f(x) = x^2 + 1$?
17. Izračunaj odvode funkcij

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}, \quad f(x) = \operatorname{arctg} x^2, \quad f(x) = \operatorname{ch} \ln x.$$

18. Izračunaj odvode funkcij

$$f(x) = \sin \sin x, \quad f(x) = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad f(x) = e^{\operatorname{arsh} x}.$$

19. Naj bo f inverz funkcije $x \mapsto x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Poišči tangento na graf funkcije f v točki z absciso 1.
20. Izračunaj odvod funkcije

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Ali je f povsod odvedljiva?