IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT.: | | | | | | | | |

PREDAVALNICA: __________ VRSTA: __________ KOLONA: __________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ SKUPAJ: __________

# 1. IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Kemija – univerzitetni študij

17. junij 2013

**A**

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

**1.** [25] Poišči vse rešitve diferencialne enačbe $y' + x^2 y = x^2 y^2$. Namig: Bernoulli.

**Rešitev:** Bernoullijeva DE ima obliko $y' = p(x)y + q(x)y^a$ za neki funkciji $p, q$ in $a \in \mathbb{R}$. Recept je, da deljimo obe strani enačbe z $y^a$. Dobimo $y^{-a}y' = p(x)y^{1-a} + q(x)$, ker pa je leva stran enaka $\frac{1}{1-a}(y^{1-a})'$ vpeljemo substitucijo $z(x) = y^{1-a}(x)$ in dobimo DE $\frac{1}{1-a}z' = p(x)z + q(x)$, ki je linearna. V našem primeru je $p(x) = -x^2, q(x) = x^2, a = 2$, torej dobimo DE $z' = x^2 z - x^2$ (1). Prvo rešimo homogeni del linearne DE: $\frac{dz}{dx} = z' = x^2 z \Leftrightarrow \int \frac{1}{z} dz = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln z = x^3/3 + C \Leftrightarrow z = Ce^{x^3/3}$. Nato z variacijo konstante $C = C(x)$ rešimo partikularni del: $z' = C'e^{x^3/3} + \cancel{Ce^{x^3/3}x^2} \stackrel{(1)}{=} \cancel{x^2 Ce^{x^3/3}} - x^2 \Leftrightarrow C'e^{x^3/3} = -x^2 \Leftrightarrow C = \int -x^2 e^{-x^3/3} dx$. Vpeljemo substitucijo $-x^3/3 = t, -x^2 dx = dt$ in dobimo $C = \int e^t dt = e^t + D = e^{-x^3/3} + D$. Zato je $y^{-1} = z = Ce^{x^3/3} = (e^{-x^3/3} + D)e^{x^3/3} = 1 + De^{x^3/3}$ in torej $\underline{\underline{y = \frac{1}{1 + De^{x^3/3}}}}$.

**2.** [25] Izračunaj jedri matrik $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ ter ugotovi če sta enaki.

**Rešitev:** Jedro matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je podprostor $\mathrm{Ker}A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\vec{x} = 0\}$. Pri iskanju vektorjev iz jedra torej rešujemo sistem $m$ linearnih enačb z $n$ neznankami. Prva matrika:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2)+3(1) \\ (2)-(3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (2)+(3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zato $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ leži v jedru prve matrike natanko tedaj ko velja (2. vrstica) $x_2 = 4x_3+7x_4$ in (1. vrstica) $x_1 = x_2 - 2x_4 = (4x_3+7x_4) - 2x_4 = 4x_3 + 5x_4$, torej ko je $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_3+5x_4, 4x_3+7x_4, x_3, x_4) = (4x_3, 4x_3, x_3, 0) + (5x_4, 7x_4, 0, x_4) = x_3(4{,}4{,}1{,}0) + x_4(5{,}7{,}0{,}1)$, kar pomeni, da je jedro prve matrike enako $Lin\{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Druga matrika:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2)-2(1) \\ (3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1) \\ -(2)/3 \\ (2)+(3) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zato $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ leži v jedru druge matrike natanko tedaj ko velja (2. vrstica) $x_2 = 2x_4$ in (1. vrstica) $x_3 = -2x_1 + x_2 + 2x_4 = -2x_1 + 2x_4 + 2x_4 = -2x_1 + 4x_4$, torej ko je $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_4, -2x_1+4x_4, x_4) = (x_1, 0, -2x_1, 0) + (0, 2x_4, 4x_4, x_4) = x_1(1, 0, -2, 0) + x_4(0, 2, 4, 1)$, kar pomeni, da je jedro druge matrike enako $Lin\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Naj bodo $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l$ poljubni vektorji v $\mathbb{R}^n$. Spomnimo se, da je $Lin\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\} = \{\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. Enakost $Lin\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\} = Lin\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l\}$ velja natanko tedaj ko velja $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \in Lin\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l\}$ in $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_l \in Lin\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$. Vsebnost $\vec{y} \in Lin\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ velja natanko tedaj obstajajo skalarji $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ da $\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{y}$ drži, torej ko je sistem enačb $\begin{bmatrix} \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \vec{y}$ rešljiv. Preizkusimo to na našem primeru $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1)-4(3)-5(4) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Prva vrstica pravi $0 = 9$, torej sistem ni rešljiv, in zato sta jedri prvotnih matrik različni.

**3.** [25] Poišči vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $\left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & -5 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

**Rešitev:** Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ je lastna vrednost matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ko obstaja neničelni vektor $\vec{x}$, da je $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, oz. $(A-\lambda I)\vec{x} = 0$, torej ko ima matrika $A-\lambda I$ netrivialno jedro, oz. ni obrnljiva, oz. velja $\det(A-\lambda I) = 0$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ 6 & -5 & -\lambda \end{vmatrix} = \ldots = 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 = \ldots = (1+\lambda)(1-\lambda^2) = (1+\lambda)^2(1-\lambda),$$

torej sta lastni vrednosti $-1$ ter $1$. Pripadajoči lastni vektorji so elementi jedra matrike $A-\lambda I$, torej elementi iz $\mathrm{Ker}(A+I)$ ter $\mathrm{Ker}(A-I)$. Izračunajmo ju.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (2) \\ (3)-3(2) \\ (2)-(1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1)-(2)/2 \\ (2)/2 \\ (3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (2)-3(1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} (1) \\ (2)-3(3) \\ (3)+4(1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Lastni vektorji za $\lambda = \underline{\underline{-1}}$ so $\underline{\underline{Lin\{\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\}}}$, lastni vektorji za $\lambda = \underline{\underline{1}}$ pa $\underline{\underline{Lin\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\}}}$.

**4.** [25] Klasificiraj (lokalni minimum, lokalni maksimum, sedlo) vse kritične točke funkcije

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\,y\,e^{-x^2-y^2}.$$

**Rešitev:** Odvod od funkcije $f$ je

$$D(f)_{(x,y)} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ye^{-x^2-y^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2x) \\ xe^{-x^2-y^2} + xye^{-x^2-y^2}(-2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} \\ x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix},$$

in ta je ničelen natanko tedaj ko je $x = y = 0$ ali $x = \pm\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}$. Torej ima $f$ pet kritičnih točk: $(0,0)$, $\big((-1)^a \frac{1}{\sqrt{2}}, (-1)^b \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ za $a,b \in \{0,1\}$. Drugi odvod funkcije $f$ je $D^2(f)_{(x,y)} =$

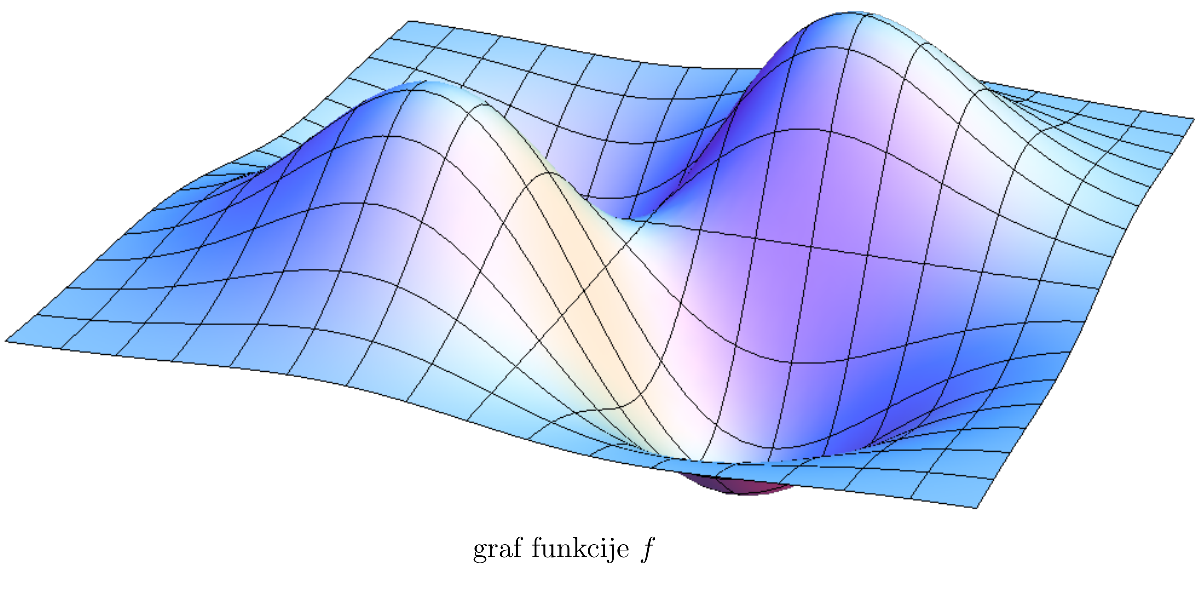
$$\begin{bmatrix} y(-4x)e^{-x^2-y^2} + y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2x), & (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} + y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2y) \\ (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} + y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}(-2y), & x(-4y)e^{-x^2-y^2} + x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}(-2y) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2}, & (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \\ (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}, & 2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}.$$

Ko to evaluiramo v vseh petih kritičnih točkah, dobimo

$$\begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (-1)^{a+b+1}, & 0 \\ 0, & (-1)^{a+b+1} \end{bmatrix} \tfrac{2}{e}.$$

Prva matrika ima karakteristični polinom $\lambda^2-1$, torej lastni vrednosti $-1, 1$. Druga matrika ima obe lastni vrednosti enaki $(-1)^{a+b+1}$. Izrek pravi, da če je $a \in \mathbb{R}^n$ kritična točka gladke funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in so vse lastne vrednosti matrike $D^2(f)_a$ neničelne ter vse pozitivne / vse negativne / nekatere pozitivne nekatere negativne, je $a$ lokalni minimum / lokalni maksimum / sedlo. V našem primeru je torej $(0,0)$ sedlo, $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big), \big(-\frac{1}{\sqrt{2}}$ in $-\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ sta lokalna maksimuma, $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ in $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ sta lokalna minimuma.



graf funkcije $f$

IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT: | | | | | | | | |

PREDAVALNICA: __________ VRSTA: __________ KOLONA: __________

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ SKUPAJ: __________

# 1. IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Kemija – univerzitetni študij

17. junij 2013

**B**

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

**1.** [25] Izračunaj jedri matrik $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ ter ugotovi če sta enaki.

**Rešitev:** Enako kot pri A.

**2.** [25] Poišči vse rešitve diferencialne enačbe $y' = xy^2 - xy$. Namig: Bernoulli.

**Rešitev:** Podobno kot pri A: $\underline{\underline{y = \frac{1}{1+De^{x^2/2}}}}$.

**3.** [25] Klasificiraj (lokalni minimum, lokalni maksimum, sedlo) vse kritične točke funkcije

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 1 - xy\, e^{-x^2-y^2}.$$

**Rešitev:** Podobno kot pri A, le da je pri prvem in drugem odvodu spredaj minus, torej se lokalna minimuma zamenjata z lokalnima maksimuma.

**4.** [25] Poišči vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 5 \\ -6 & 3 & 7 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

**Rešitev:** Podobno kot pri A: $\det(A-\lambda I)=-(\lambda-2)^2(\lambda+2)$, $Lin\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$, $Lin\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.